本题分数	30 分
得　　分	

一、填空题：（每题 3 分）

1. 复数 $\frac{1+i}{1-i}+1$ 的三角表达式为________.

2. 已知 $z^3-2=0$，则 $z=$ ________.

3. 已知 $e^z=1+i$，则 $z=$ ________.

4. $i^{1+i}=$________.

5. $\oint_{|z|=1}\frac{\sin z}{z-2}dz=$________.

6. $\int_0^i zdz=$ ________.

7. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2021}}z^n$ 的收敛半径为________.

8. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$ 的收敛半径为________.

9. $\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z-2021i},2021i\right]=$ ________

10. $\mathrm{Res}[\frac{1-\cos z}{z^5},0]=$________.

本题分数	10 分
得　分	

二、函数 $f(z)=2xy+1+x^2yi+3i$ 在何处可导？何处解析？并在可导点处求出该函数的导数.

三、证明 $u(x,y)=2x(3y-x)+2y^2$ 为调和函数，并求出解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，使满足 $f(i)=2+i$.

本题分数	30 分
得　分	

四、计算以下积分.

1. $\oint_{|z-1|=1} \frac{\cos z}{(z-1)^5} dz$　　2. $\oint_{|z|=1} \frac{2z}{(z-\frac{i}{2})(z^2+2)} dz$

3. $\oint_{c} \frac{e^z}{z(z-1)(z-2)^2} dz$，其中 $c:|z|=8$

五、①将 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-4z+3}$ 在 $2<|z-3|<+\infty$ 内展成洛朗级数；

②将 $f(z)=z^4\sin\dfrac{1}{z}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内展成洛朗级数.

六、求将上半平面 $\mathrm{Im}\, z > 0$ 映射成单位圆 $|w| < 1$ 的分式线性映射 $w = f(z)$，使满足条件：$f(i) = 0,\ f(0) = 1$.

一.

1. $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

2. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}\,e^{\frac{2}{3}\pi i}$, $\sqrt[3]{2}\,e^{-\frac{2}{3}\pi i}$

3. $\frac{1}{2}\ln 2+i\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right), k\in Z$

4. $i\,e^{-2k\pi-\frac{\pi}{2}}, k\in Z$

5. 0

6. $-\frac{1}{2}$

7. 1

8. $+\infty$

9. 1

10. $-\frac{1}{24}$

二、

$$u(x,y)=2xy+1,\ v(x,y)=x^2y+3$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=2y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2x$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2xy,\ \frac{\partial v}{\partial y}=x^2$$

C-R方程：$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases}2y=x^2\\2x=-2xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$$

由于 $u(x,y)$，$v(x,y)$可微，仅在 $z=0$ 成立 C-R 方程。故仅在 $z=0$ 可导

处处不解析

$f'(z)=u_x+iv_x$ 有 $f'(0)=0$

三、$u(x,y)=2x(3y-x)+2y^2$

$u(x,y)=6xy-2x^2+2y^2$

$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=6y-4x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-4$

$\frac{\partial u}{\partial y}=4y+6x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4$

$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-4+4=0$

$\therefore u(x,y)$是调和函数

$\because f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$

$\therefore f'(z)=6y-4x-i(4y+6x)$

$f'(z)=-4(x+iy)-6i(x+iy)$

$f'(z)=-4z-6iz$

$\therefore f(z)=\int -4z-6iz\,dz$

$f(z)=-2z^2-3iz^2+C$

$\because f(i)=2+i$

$\therefore C=-2i,\ f(z)=-2z^2-3iz^2-2i$

四

1. $f(z)=\cos z$ 在 $|z-1|\le 1$ 内解析

$z=1$ 在 $|z-1|\le 1$ 内

由高阶导数公式可知

$$原式=2\pi i\cdot\frac{1}{(5-1)!}\frac{d^4 f(z)}{dz^4}\Big|_{z=1}$$

$$=\frac{\pi i}{12}f^{(4)}(1)$$

$$=\frac{\pi i}{12}\cos z\Big|_{z=1}$$

$$=\frac{\pi i}{12}\cos 1$$

四

2. $(z-\frac{i}{2})(z^2+2)=0$

$z=\frac{i}{2}, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$

仅 $z=\frac{i}{2}$ 在 $|z|=1$ 内

由柯西积分公式

$$原式=\oint_{|z|=1} \frac{\frac{2z}{z^2+2}}{z-\frac{i}{2}}dz$$

$$=2\pi i\cdot\left.\frac{2z}{z^2+2}\right|_{z=\frac{i}{2}}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{4i}{7}$$

$$=-\frac{8\pi}{7}$$

五

① $2<|z-3|<+\infty$ 有 $\left|\frac{2}{z-3}\right|<1$

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-3)}$$

$$f(z)=\frac{1}{(z-3)(z-3+2)}$$

$$f(z)=\frac{1}{(z-3)^2(1+\frac{2}{z-3})}$$

已知 $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\ |z|<1$

$$\therefore f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-3)^{n+2}}$$

② $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}(-1)^n}{(2n+1)!},\ |z|<+\infty$

$\sin\frac{1}{z}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 解析

$$\therefore \sin\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{-2n-1}}{(2n+1)!}$$

$$\therefore f(z)=z^4\sin\frac{1}{z}$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{3-2n}}{(2n+1)!}$$

六

$z=i$, $z=-i$ 关于 $\mathrm{Im}\,z=0$ 对称

$\mathrm{Im}\,z=0$ 映射为 $|w|=1$

$w=0$ 与 $w=\infty$ 关于 $|w|=1$ 对称

$f(i)=0$ 由保对称性有

$f(-i)=\infty$, $f(z)=k\dfrac{z-i}{z+i}$

$f(0)=1$ 有 $k\cdot\dfrac{-i}{i}=1$, $k=-1$

$\therefore w=f(z)=\dfrac{i-z}{i+z}$