南京航空航天大学

二〇二一～二〇二二学年第1学期《数学分析 I》考试试题

考试日期:　　　年　月　日　试卷类型:　　　试卷代号:

班号　　　　学号　　　　姓名

题号	一	二	三	四	总分
得分					

本题分数	40
得　分	

一、基础题（每题4分，共40分）

1、叙述关于极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在的柯西准则.

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

2、用“$\varepsilon-\delta$语言”解释函数 $f(x)$ 在区间 I 上不一致连续.

3、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

4、指出函数 $f(x)=[1/\cos x]$ 的间断点及其类型.

5、设 $f'(1)=2$，求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{\sqrt[3]{x}-1}$.

6、设$x=2t-t^2, y=3t-t^3$,求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

7、设$y=x^{\sin x}, x>0$,求$\frac{dy}{dx}$.

8、设$f(x)$二阶可导，$y=e^{f(x)}$,求d^2y.

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

9、设$f(x)=x\sin x$,求$f^{(20)}(0)$.

10、写出函数$f(x)=(x-1)\ln x$,在$x=1$处的Peano型余项的n阶Taylor公式.

本题分数	12
得　分	

二、求下列极限（每题6分，共12分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{3}{\sqrt{n^4+3}}+\cdots+\frac{2n-1}{\sqrt{n^4+2n-1}}\right)$

2、$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

本题分数	36
得　分	

三、证明题

1、（7分）用极限的$\varepsilon-\delta$定义证明$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{2}{3}$.

2、(7 分) 证明：$f(x)=\sin\sqrt[4]{x}$ 在$[0,+\infty)$ 上一致连续.

3、(6 分) 证明不等式$\frac{2}{\pi}x<\sin x, x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

4、(6 分) 设$f(x)$在$[a,b]$上可导$(a>0)$，求证：存在$\xi,\eta\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$$

5、(10 分）叙述并证明“Heine-Borel 有限覆盖定理”.

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

本题分数	12
得　分	

四、设$f(x)=x\cdot arctanx$,讨论$f(x)$的单调性，凸性，极值，拐点与渐近线，并绘制图形.

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

2021-2022 学年第一学期《数学分析 I》考试试题参考答案

（本试卷由学支教员董家华整理，答案仅供参考。如遇答案有误，请和学支教员部成员联系，学支会及时进行订正，感谢您的使用）

一，基础题

1，设函数f在$U(-\infty)$上有定义.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$存在 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0,\ \exists M>0, s.t\ \forall\ x',x''<-M$,有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

2，设 函数f在区间 I上有定义.

$f(x)$在区间 I上不一致连续 $\Leftrightarrow$ $\exists\varepsilon_0>0, \forall\delta>0, s.t\ \forall x', x''\in I$,

虽然$|x'-x''|<\delta$，但$|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$.

3，$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})-(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}]$$

$$=0$$

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

另解：

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]$$

$$\overset{\text{归结原则}}{\Rightarrow}\quad=\lim_{x\to+\infty}[(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})]$$

$$\overset{Lagrange\text{定理}}{\Rightarrow}\quad=\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{2\sqrt{\xi+1}}-\frac{1}{2\sqrt{\xi}})(x+1-x)\qquad(x<\xi<x+1)$$

$$=\lim_{\xi\to+\infty}(\frac{1}{2\sqrt{\xi+1}}-\frac{1}{2\sqrt{\xi}})$$

$$=0$$

4，当$x=n\pi$时，$f(x)=[|\cos x|]=1$.

当$x\neq n\pi$时，由于$|\cos n\pi|<1$,故$f(x)=[|\cos x|]=0$,

且$\lim\limits_{x\to n\pi} f(x)=\lim\limits_{x\to n\pi}[|\cos x|]=0\neq f(n\pi)$,

故$x=n\pi$，$n=0,\pm1,\pm2\cdots$，为$f(x)$的第一类可去间断点.

5, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{\sqrt[3]{x}-1}$

$L'H\hat{o}pital$法则 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3f'(x)}{\sqrt[3]{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3f'(1)}{1}$

$=6$

6, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{d(\frac{dy}{dt}/\frac{dx}{dt})}{dx}=\frac{\frac{3}{2}d(t+1)}{(2-2t)dt}=\frac{3}{4(1-t)}$

7,对等式两边取对数$\Rightarrow \ln y=\sin x\ln x$

等式两边对 x 求导$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\cos x\ln x+\frac{1}{x}\sin x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{1}{x}\sin x)$

8,对等式两边取对数$\Rightarrow \ln y=f(x)$

等式两边对 x 求导$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=f'(x)\Rightarrow \frac{dy}{dx}=f'(x)y$

等式两边对 x 求导$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)y+\frac{dy}{dx}f'(x)=f''(x)e^{f(x)}+f'(x)^2e^{f(x)}$

故$d^2y=e^{f(x)}(f''(x)+f'(x)^2)dx^2$

9,由 *leibniz* 公式得

$f^{(20)}(x)=(x\sin x)^{(20)}=(\sin x)^{(20)}x^{(0)}+C_{20}^{1}(\sin x)^{(19)}x^{(1)}=x\sin x-20\cos x$

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

$f^{(20)}(0)=-20\cos 0=-20$

10, $f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$

$f^{(n)}(x)=(-1)^n[\frac{1}{(n-2)!x^{n-1}}+\frac{1}{(n-1)!x^n}]$ $(n\geq 2)$

$f'(1)=0$

$f^{(n)}(1)=(-1)^n\frac{n}{(n-1)!}$

$f(x)=f(1)+f'(x)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}}{n!}(x-1)^n+o((x-1)^n)$

$=(x-1)^2-\frac{1}{4}(x-1)^3+\frac{1}{36}(x-1)^4+\cdots+\frac{(-1)^n}{[(n-1)!]^2}(x-1)^n+o((x-1)^n)$

二、求下列极限

1. $\frac{n^2}{\sqrt{n^4+2n-1}}=\frac{1}{\sqrt{n^4+2n-1}}[1+3+\cdots+(2n+1)]$

$<\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{3}{\sqrt{n^4+3}}+\cdots+\frac{2n-1}{\sqrt{n^4+2n-1}}$

$<\frac{1}{n^2}[1+3+\cdots+(2n-1)]=\frac{n^2}{n^2}=1$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^4+2n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}}=1$

由追敛性得: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4}}+\frac{3}{\sqrt{n^4+1}}+\cdots+\frac{2n-1}{\sqrt{n^4+2n-1}}\right)=1$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln\frac{1}{x})\sin x$

$\overset{L'H\hat{o}pital法则}{\Rightarrow}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\sin x)^2}{x\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x$

$=0$

三、证明题

1. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 取$\delta=min\{1,3\varepsilon\}$, 当 $0<|x-1|<\delta$时, 有

$$\left|\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{x-1}{(2x-1)}\right|<\frac{|x-1|}{3}<\varepsilon$$

证毕

2. $f(x)$在$[0,1]$内为连续函数，由一致连续性定理得

$f(x)$在$[0,1]$上一致连续

南航资源免费共享 收集网站 nuaa.store

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$, 取$\delta=4\varepsilon$, s. t. $\forall x', x''\in(1,\infty)$

只要$|x'-x''|<\delta$,则

$$|\sin\sqrt[4]{x'}-\sin\sqrt[4]{x''}|$$

$\overset{Lagrange定理}{\Rightarrow}=\left|\frac{\cos\sqrt[4]{\xi}}{4\xi^{\frac{3}{4}}}(x'-x'')\right|\qquad(x'<\xi<x'')$

$<\frac{1}{4}|x'-x''|<\varepsilon$

故 $f(x)$在$(1,\infty)$上一致连续

综上: $f(x)$在$[0,\infty)$上连续一致，证毕。

3. 设 $f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$

$f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$

$f''(x)=-\sin x<0$

因此$f(x)$为$(0,\frac{\pi}{2})$上得连续凹函数

故 $f(x) \geq \min\{f(0), \ f(\frac{\pi}{2})\} = 0$

进而 $\sin x > \frac{2}{\pi} x$

证毕。

4. $f(x)$在$[a,b]$上可导，由$Lagrange$中值定理

$$f(a) - f(b) = f'(\xi)(b-a)$$

设 $g(x) = x^2$,显然$g(x)$在$[a,b]$上可导，由 *Cauchy* 中值定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(y)}{2y}$$

故 $f'(\xi)(b-a) = \frac{(b^2-a^2)}{2y} f'(y)$

进而 $f(\xi) = \frac{(b-a)}{2y} f'(y)$

5. (海涅—博雷尔(Heine-Borel)有限覆盖定理) 设 H 为闭区间$[a,b]$的一个(无限)开覆盖，则从 H 中可选出有限个开区间来覆盖$[a,b]$

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

证：

用反证法 假设定理的结论不成立，即不能用 H 中有限个开区间来覆盖$[a,b]$.

将$[a,b]$等分为两个子区间,则其中至少有一个子区间不能用 H 中有限个开区间来覆盖.记这个子区间为$[a_1,b_1]$,则$[a_1,b_1]$C$[a,b]$,且$b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b-a)$.再将$[a_1,b_1]$等分为两个子区间，同样，其中至少有一个子区间不能用 H 中有限个开区间来覆盖.记这个子区间为$[a_2,b_2]$,则$[a_2,b_2]$C$[a,b]$,且$b_2 - a_2 = \frac{1}{2^2}(b-a)$重复上述步骤并不断地进行下去，则得到一个闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$,它满足 $[a_n,b_n] \supset [a_{n+1},b_{n+1}]$,n=1,2,⋯,

$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a) \to 0 (n \to \infty)$

即$\{[a_n,b_n]\}$是区间套，且其中每一个闭区间都不能用 H 中有限个开区间来覆盖.由区间套定理，存在唯一的一点$\xi \in [a_n,b_n]$,n=1,2,⋯.由于 H 是[a,b]的一个开覆盖，故存在开区间$(\alpha,\beta) \in H$,使$\xi \in (\alpha,B)$.于是，由定理 7.1 推论，当 n 充分大时，有$[a_n,b_n]$C(α,β).

这表明[a,b。]只需用 H 中的一个开区间(α , β)就能覆盖，与挑选[a_n, b_n]时的假设“不能用 H 中有限个开区间来覆盖”相矛盾.从而证得必存在属于 H 的有限个开区间能覆盖[a,b].

四,

$$f(x) = x \cdot \arctan x$$

$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{x^2+1}$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2 \geq 0$$

设渐近线 $y = kx + b$

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

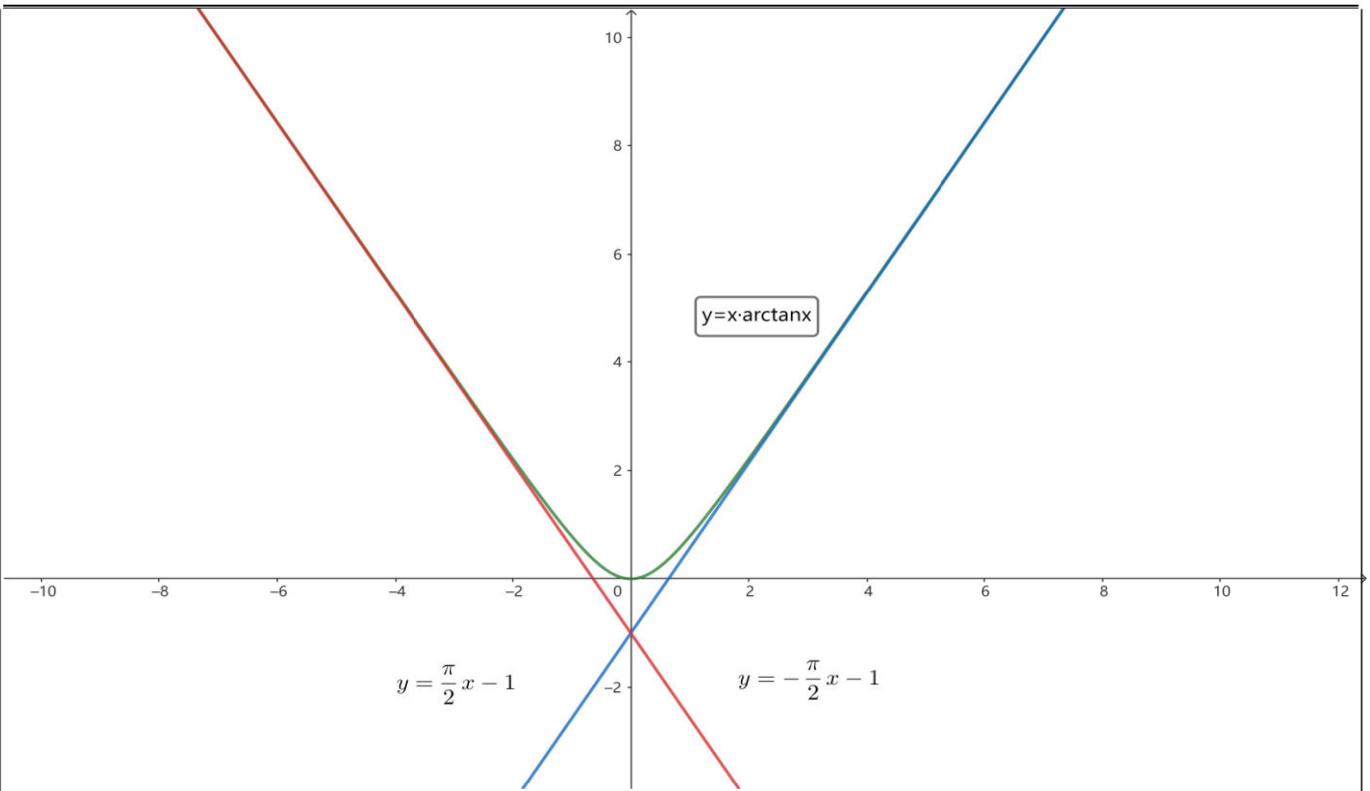
本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} \left(x \cdot \arctan x - \frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^2}{x^2+1}\right) = -1$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty} \left(x \cdot \arctan x + \frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x^2}{x^2+1}\right) = -1$$

因此，两条渐近线为 $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ 和 $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$

x	$(-\infty, 0)$	0	(0,1)	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	+	+
$f''(x)$	+	+	+	0	+
$f(x)$	凸减 ↓	极小值 0	凸增 ↑	拐点(1, arctan 1)	凸增 ↑



本资源免费共享 收集网站 nuaa.store