得分				

本题分数	10
得　分	

一、（10 分，每题 2 分）

1、有阻尼系统的自由振动为在平衡位置附近作幅值不断衰减的往复振动。（　　）

2、对于单自由度系统，将位移幅值放大系数 β 下降到其共振峰值 $1/\sqrt{2}$ 倍所对应的频段称为共振区。（　　）

3、在两自由度无阻尼系统中，对任一阶固有频率而言，每个质量块的两阶固有振动同相或反相。（　　）

4、二自由度系统的自由振动一般是两种不同频率固有振动的合成，未必为简谐振动。（　　）

5、对于自由边界条件的杆，第 n 阶纵向振动固有振型一定有 n-1 个节点。（　　）

本题分数	10
得　分	

二、（10 分，每题 2 分）填空题

1、振动系统的三要素为__________。

2、有阻尼单自由度系统的自由振动可看成__________引起的自由振动。

3、在多自由度系统中，对第 j 个自由度作用单位位移，把其他自由度固定不产生位移，则由此在第 i 个自由度上产生的力，就定义为__________。

4、具有多个刚体自由度的系统相当于多个线性无关的刚体振型对应于同一个零频率，故为__________系统。

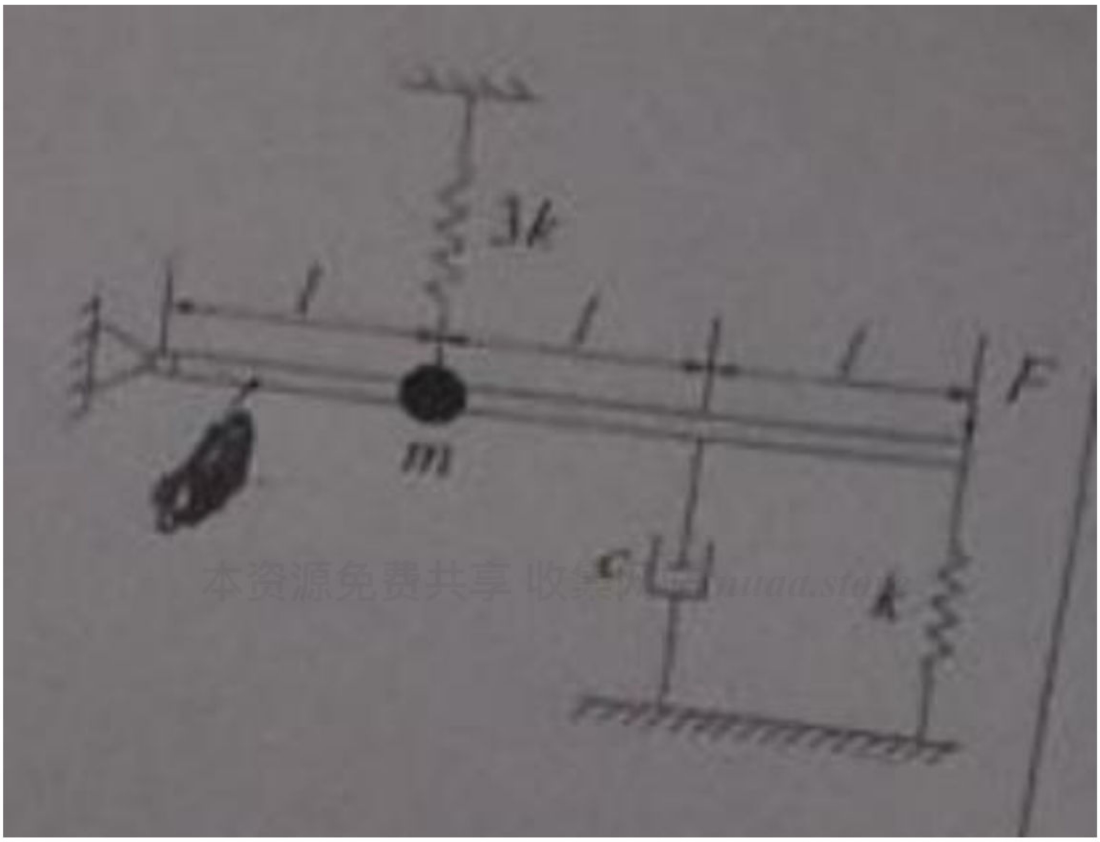
5、求解杆纵向振动的偏微分方程可用__________法，即将时间和空间的变量分离。

本题分数	5
得　分	

三、（5 分）一个单自由度系统，质量 m=5kg 时，弹簧静伸长 δ_s=0.01m。自由振动 6 个循环后，振幅从 0.02m 降至 0.012m。试求：（1）基于小阻尼比假设估算系统的阻尼比 ζ；（2）系统的阻尼振动频率 ω_d 和固有频率 ω_n。

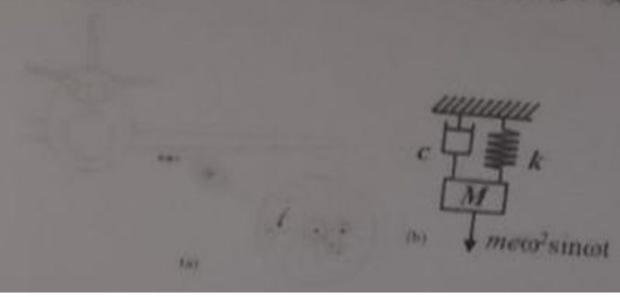
本题分数	10
得　分	

四、（10分）如图所示为一无重杠杆。其一端铰支，距铰支端 l 处有一质量为 m 的质点，距 $2l$ 处有一阻尼器，阻尼系数为 c；距 l、$3l$ 处分别有一刚度为 $3k$、k 的弹簧，并作用一简写激励 $F=F_0\sin\omega t$。刚杆在水平位置平衡。试求（1）建立系统的振动微分方程；（2）求解其固有频率；（3）当 ω 等于固有频率 ω_n 时，试求质点 m 的振幅。



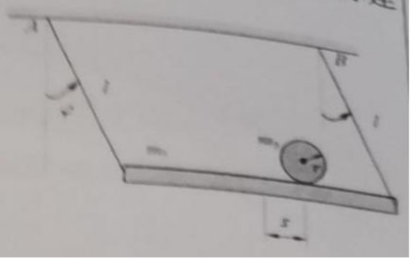
本题分数	10
得　分	

五、（10分）图（a）所示的小型航空发动机质量 M，通过安装节吊装于刚性机翼下，安装节静变形为 δ。航空发动机的转子不平衡量 me，产生激振力为 $P=me\omega^2\sin(\omega t)$，其中是旋转 ω 角速度，系统的阻尼比为 ζ。（1）如图（b）所示，取竖直向下的位移 x 为广义坐标，针对航空发动机建立其竖直方向上的振动微分方程，并确定 k 和 c；（2）试求航空发动机在不平衡激励下发生速度共振时的转速（转/分）以及位移振幅。



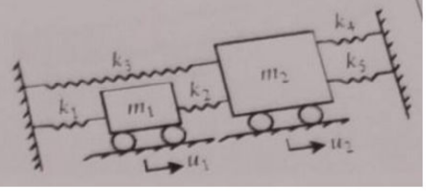
本题分数	15
得　分	

六、(15 分) 如图所示，一质量 m_1 的水平台用两根长度为 l 的绳子悬挂起来，其上有一半径为 r，质量为 m_2 的圆柱体，沿水平台做无滑动滚动。试用 φ 和 x 为广义坐标建立系统的运动微分方程。



本题分数	15
得　分	

七、(15 分) 如图所示系统中，两物体质量分别为 $m_1=m_2=m$，弹簧刚度系数分别为 $k_1=k_2=k$，$k_3=k_4=k_5=1/3k$，物体运动阻尼不计。试求：(1) 写出系统的运动微分方程；(2) 计算系统的固有频率和振型；(3) 假定初始条件为 $\begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} \dot{u}_1(0) \\ \dot{u}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$，求其自由振动响应。



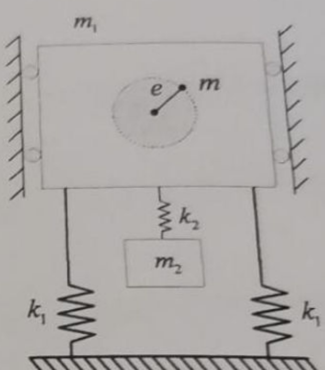
本题分数	15
得　分	

八、(15 分) 如图所示，某机器系统如图所示。机器有一偏心块 m 重 1kg，偏心距 $e=1cm$，偏心块的转速 n=1600r/min。已知机器总重 $m_1=70kg$（含偏心块 m），减振器重 $m_2=2.5kg$。试求：

(1) 写出系统竖直方向的运动微分方程；

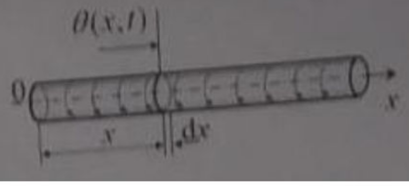
(2) 弹簧刚度 k_2 多大才能使机器的振幅为零？此时 m_2 的振幅 B_2 为多大？

(3) 若使减振器 m2 的振幅 B_2 不超过 1mm，减振器的参数 m_2 应如何改变？



本题分数	10
得　分	

九、（10 分）如下图所示，等截面均匀杆两端自由。长度为 l，截面极惯性矩为 $I_p(x)$，材料的剪切模量为 $G(x)$，密度为 $\rho(x)$。坐标为 x 的截面在时刻 t 的角位移为 $\theta(x,t)$。（1）写出杆扭转振动的边界条件；（2）试推导杆扭转振动微分方程。



1-5

一. 错 对 对. 对. 错.

二. 1. 振幅. 相位. 频率

2. 初始条件

3. k_{ij}, 刚度矩阵中的元素

4. 半正定.

填空 5 分离变量法

三、

$mg = k\delta_{st}$

$\Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{\delta_{st}}$ 故 固有频率 $\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$

$= \sqrt{\frac{9.81}{0.01}} = 31.321\ rad/s$

$$\frac{X_1}{X_6} = \frac{X e^{-\zeta\omega_n t_1}\cdot\cos(\omega_d t_1-\varphi)}{X e^{-\zeta(t_1+6T_d)\cdot\omega_n}\cos(\omega_d t_1-\varphi)}$$

$$= e^{-\zeta\omega_n t_1+\zeta\omega_n t_1+6\zeta\omega_n T_d}$$

$$= e^{6\zeta\omega_n\frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{\frac{12\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = \frac{0.02}{0.012}$$

$$= 1.6667$$

$$\ln e^{\frac{12\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = \ln 1.6667$$

$$\Rightarrow \frac{12\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln 1.6667$$

$$\Rightarrow 12\pi\zeta \approx \ln 1.6667$$

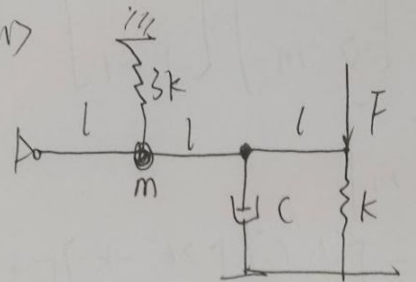
$\Rightarrow$ 阻尼比 $\zeta = 0.01355$

$\Rightarrow \omega_n = 31.321\ rad/s$

阻尼固有频率 $\omega_d = \omega_n\cdot\sqrt{1-\zeta^2} = 31.318124\ rad/s$

四.

(1)



由达朗贝尔原理:

$$-ml^2\cdot\ddot{\theta} - c(2l)^2\cdot\dot{\theta} - k(3l)^2\cdot\theta + F_0\cdot 3l\cdot\sin\omega t = 0$$

即

$$ml^2\ddot{\theta} + 4cl^2\dot{\theta} + 9kl^2\theta = 3F_0 l\cdot\sin\omega t$$

(2). 固有频率 $\omega_n = \sqrt{\frac{9kl^2}{ml^2}} = 3\sqrt{\frac{k}{m}}$ 单位 rad/s.

(3)

振幅为: $\beta = \dfrac{3F_0 l/(9kl^2)}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\zeta\lambda)^2}}$

λ为频率比 当 $\frac{\omega}{\omega_n}=1$时. $\lambda=1$

$$\beta = \frac{3F_0 l/(9kl^2)}{2\zeta}$$

阻尼比:

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{4cl^2}{2ml^2\cdot 3\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{mk}}$$

五

(1)

~~$m\ddot{x}+c\dot{x}$~~ 振动微分方程为：

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=me\omega^2\sin\omega t$$

$$\xi=\frac{c}{c_c} \Leftrightarrow c=\xi\cdot c_c=2m\xi\cdot\omega_n$$

而：$k\delta=mg \Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{g}{\delta}}=\sqrt{\frac{k}{m}}$

故 $k=\frac{mg}{\delta}$　　故 $c=2m\cdot\xi\sqrt{\frac{k}{m}}=2\xi\sqrt{km}$

~~为系统阻尼系数~~ c.

$$c=2\xi\sqrt{\frac{mg}{\delta}\cdot m}=2\xi\sqrt{\frac{m^2g}{\delta}}$$

为阻尼系数.

(2) 速度共振时

$$\omega=\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g}{\delta}}$$

转速 $n=60\cdot\omega/2\pi$

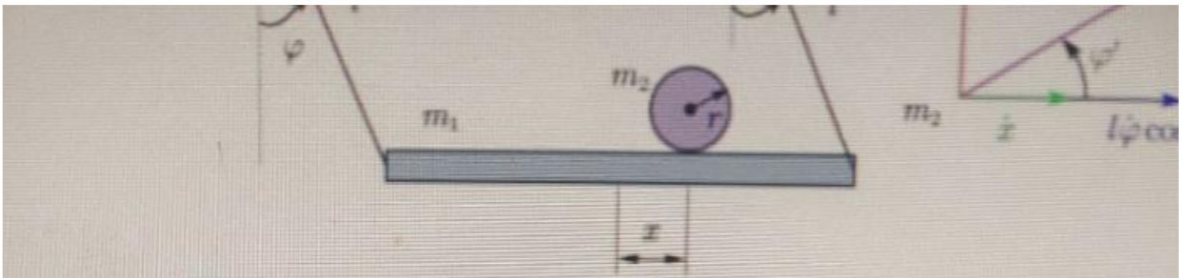
$$=\frac{60\sqrt{g/\delta}}{2\pi}=\frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta}}\ (r/min)$$

转速

振幅 $X=\frac{me\omega^2/k}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$，$r=1$时

$$X=\frac{1}{2\xi}\cdot\frac{me\omega^2}{\sqrt{\frac{mg}{\delta}}}=\frac{me\omega^2}{2\xi}\cdot\sqrt{\frac{\delta}{mg}}$$

为振幅.



解：

以 $\varphi=0$ 为零势能点

系统势能：$U=(m_1+m_2)gl(1-\cos\varphi)$

系统动能：$T=\dfrac{1}{2}m_1\dot{\varphi}^2l^2+\dfrac{1}{2}m_2(l^2\dot{\varphi}^2+\dot{x}^2+2\dot{x}\dot{\varphi}l\cos\varphi)+\dfrac{1}{4}m_2\dot{x}^2$

六

$$\frac{\partial U}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}=(m_1+m_2)gl\sin\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=\frac{3}{2}m_2\dot{x}+m_2\dot{\varphi}l\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{3}{2}m_2\ddot{x}+m_2l\ddot{\varphi}\cos\varphi-m_2l\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=-m_2\dot{x}\dot{\varphi}l\sin\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=m_1\dot{\varphi}l^2+m_2\dot{\varphi}l^2+m_2\dot{x}l\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)=m_1\ddot{\varphi}l^2+m_2\ddot{\varphi}l^2+m_2\ddot{x}l\cos\varphi-m_2\dot{x}l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

代入拉格朗日方程 $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial q_i}+\dfrac{\partial U}{\partial q_i}=Q_i$

摆幅较小，整理得运动微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{3}{2}m_2\ddot{x}+m_2l\ddot{\varphi}=0\\(m_1+m_2)\ddot{\varphi}l^2+m_2\ddot{x}l+(m_1+m_2)gl\varphi=0\end{cases}$$

七、(1) 运动微分方程为：

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3+k_4+k_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) 由频率方程：

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

得 $(2k - m\omega^2)(2k - m\omega^2) - k^2$

$= m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = (m\omega^2 - k)(m\omega^2 - 3k) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_{n1}^2 = \frac{k}{m} \\ \omega_{n2}^2 = \frac{3k}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{n1} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \\ f_{n2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3k}{m}} \end{cases} \text{(单位Hz)}$$

为固有频率.

七 (2) 续.

$$r_1 = \frac{2k - m\omega_{n1}^2}{k} = \frac{2k - m\frac{k}{m}}{k} = 1$$

$$\Rightarrow X^{(1)} = [1,\ 1]^T$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$r_2 = \frac{2k - m\omega_n^2}{k} = \frac{2k - m\frac{3k}{m}}{k} = -1$$

$$\Rightarrow X^{(2)} = [1,\ -1]^T.$$

主振型矩阵 $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix}$

(3) 由 $X^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

得主坐标初始条件为

$$\begin{matrix} q_1(0) = \\ q_2(0) = \end{matrix} \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1(0)\cdot\cos\omega_{n1}t + \frac{\dot{q}_1(0)}{\omega_{n1}}\sin\omega_{n1}t \\ q_2(0)\cdot\cos\omega_{n2}t + \frac{\dot{q}_2(0)}{\omega_{n2}}\sin\omega_{n2}t \end{bmatrix}$$

七(2) 续.

$$= \begin{bmatrix} 3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + 4\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \\ -\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t + 2\cdot\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

自由振动响应为

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + 4\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \\ -\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t + 2\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t \end{bmatrix}$$

八. 系统竖直方向的运动微分方程为:

(1).

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} me\omega^2 \cdot \sin\omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

~~即~~

(2) 设 $\begin{cases} x_1 = X_1 \sin\omega t \\ x_2 = X_2 \sin\omega t \end{cases}$

故有

$$\begin{bmatrix} 2k_1+k_2-m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-m_2\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} me\omega^2 \cdot \sin\omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

由克莱默法则

$$X_1 = \frac{\mathrm{Det}\begin{bmatrix} me\omega^2\sin\omega t & -k_2 \\ 0 & k_2-m_2\omega^2 \end{bmatrix}}{\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 2k_1+k_2-m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-m_2\omega^2 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{me\omega^2 \cdot \sin(\omega t)(k_2-m_2\omega^2)}{\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 2k_1+k_2-m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-m_2\omega^2 \end{bmatrix}}$$

故 $k_2 = m_2\omega^2$ 时 即 $k_2 = 2.5 \times \left(\frac{1600 \times 2\pi}{60}\right)^2$

$= 70183.853 \ N/m$.

时 机器振幅为零.

此时 $X_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2k_1+k_2-m_1\omega^2 & me\omega^2\sin\omega t \\ -k_2 & 0 \end{vmatrix}}{\mathrm{Det}\left[K - M\omega^2\right]}$

此时 $B_2 = \dfrac{m e \omega^2}{k_2} = \dfrac{m e}{m_2} = \dfrac{1 \times 0.01}{2.5}$

$= 4 \times 10^{-3} m$.

(3). $\cancel{B_2 = \dfrac{m e \omega^2}{k_2}}$

$B_2 = X_2 \le 0.001 m$.

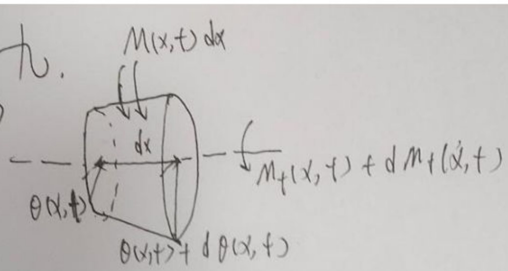
即 $\dfrac{m_3 e}{m_2} \le 0.001 m$

$\Rightarrow m_2 \geq 10kg$.

$\therefore m_2$ 应大于等于 $10kg$.

九.

(1)



自由边界条件为

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} \\ \left.\dfrac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l}=0\end{cases}$$

(2) 根据定轴转动微分方程得

$$I_p(x)\cdot dx\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=M_t+dM_t-M_t+Mdx$$
$$=\frac{\partial M_t}{\partial x}dx+Mdx$$

上式中 $M_t=GI_p\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$

故 $$\frac{\partial}{\partial x}\left(GI_p(x)\cdot\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)+M(x,t)=J(x)\cdot\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}$$

上式中 $J(x)$ 为单位长度圆轴对轴线的转动惯量. $(0<x<l)$

对于等截面轴.

$$GI_p\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}+M(x,t)=J\cdot\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}\quad(0<x<l)$$

自由振动时.

$$\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}=\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2},\ (0<x<l)$$

上式中: $b=\sqrt{\dfrac{GI_p}{J}}=\sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$