南京航空航天大学

二〇二一 ～ 二〇二二学年 第二学期《现代控制理论》考试试题

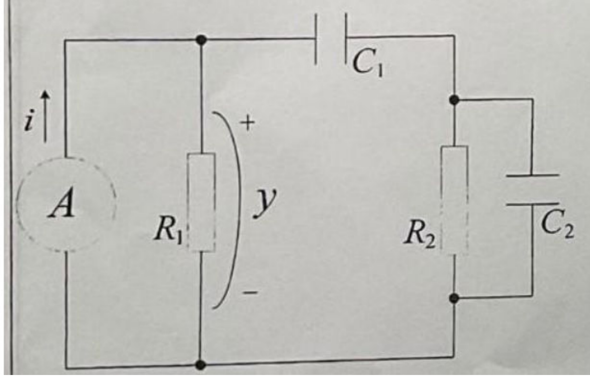
考试日期：2022 年 5 月 15 日　　试卷类型：A　　试卷代号：030006

班号　　　　学号　　　　姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

本题分数	10 分
得　分	

一、有如下电路图，设输入 u 为恒定电流源 A 的电流值 i，输出 y 为电阻 R_1 上的电压值 V_{c1}，若以电容 C_1、C_2 上的电压值 V_{c1}、V_{c2} 作为状态变量，取状态变量 $x_1=V_{c1}$，$x_2=V_{c2}$，试列写该系统的状态空间表达式。



本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

本题分数	10 分
得　分	

二、已知线性定常系统的状态方程为 $\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}u$，初始条件为 $x(0)=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$，试求系统的单位阶跃响应。

本题分数	15 分
得　分	

三、

（1）若系统的传递函数为 $G(s)=\dfrac{s^2+8s+7}{s^2+5s+6}$，试求系统的能控标准型，能观标准型，对角标准型；

（2）若系统的传递函数为 $G(s)=\dfrac{s^2+6s+8}{s^2+5s+6}$，是否存在既能控又能观的状态空间实现，请说明原因。

本资源免费共享收集网站 nuaa.store

本题分数	15 分
得　分	

四、已知系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\end{bmatrix}x$$

（1）判断系统的能控性与能观性；

（2）若系统能控，化为能控标准型，若系统不能控，将系统按能控性进行分解。

本题分数	15 分
得　分	

五、某线性定常离散系统的状态方程为

$$x_1(k+1)=x_1(k)-x_2(k)$$
$$x_2(k+1)=\frac{1}{2}x_1(k)$$

（1）试分析系统在平衡状态 $x_e=0$ 处的稳定性；

（2）讨论李雅普诺夫渐近稳定的物理含义。

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

本题分数	20 分
得　分	

六、给定原系统的传递函数为

$$\frac{s+1}{s(s-1)(s+3)}$$

（1）设计一个状态反馈增益矩阵，将传递函数变为 $\dfrac{1}{(s+2)(s+4)}$；

（2）求出系统在该状态反馈下的状态空间表达式，并分析状态反馈对系统性能的影响；

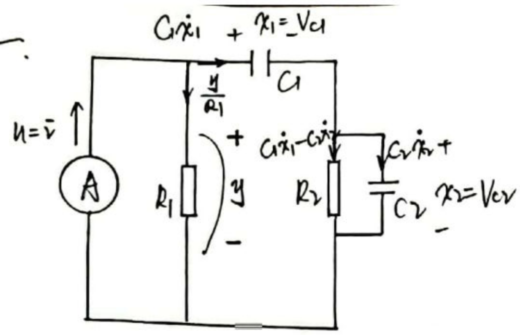
（3）为原系统设计一个全维状态观测器，使得观测器的极点为 $-5,-2\pm j2$。

本题分数	15分
得　分	

七、设系统状态方程及初始条件为 $\begin{cases}\dot{x}_1(t)=u(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_1(t)\end{cases}$，$x_1(0)=x_2(0)=2$，$x_1(2)=x_2(2)=0$，试求使性能指标 $J=2\int_0^2 u^2(t)dt$ 为极小的最优控制 $u^*(t)$ 和最优轨线 $x^*(t)$。

资源免费共享 收集网站 nuaa.store

一、



由题 $\begin{cases} u=\frac{y}{R_1}+C_1\dot{x}_1 & ① \\ x_2=(C_1\dot{x}_1-C_2\dot{x}_2)R_2 & ② \\ y=x_1+x_2 & ③ \end{cases}$

由①③得 $\dot{x}_1=-\frac{y}{C_1R_1}+\frac{u}{C_1}$

$$=-\frac{x_1}{C_1R_1}-\frac{x_2}{C_1R_1}+\frac{u}{C_1} \quad ④$$

由②④得 $x_2=C_1R_2\dot{x}_1-C_2R_2\dot{x}_2$

$$\dot{x}_2=\frac{C_1R_2}{C_2R_2}\dot{x}_1-\frac{1}{C_2R_2}x_2$$

$$=-\frac{x_1}{C_2R_1}-\frac{x_2}{C_2R_1}+\frac{u}{C_2}-\frac{1}{C_2R_2}x_2$$

$$=-\frac{1}{C_2R_1}x_1-\frac{R_1+R_2}{C_2R_1R_2}x_2+\frac{u}{C_2}$$

由③得 $y=x_1+x_2$

∴该系统的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{C_1R_1} & -\frac{1}{C_1R_1}\\ -\frac{1}{C_2R_1} & -\frac{R_1+R_2}{C_2R_1R_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{C_1}\\ \frac{1}{C_2}\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

二. $SI-A=\begin{bmatrix}s-2 & 0\\ -1 & s-3\end{bmatrix}$

$$(SI-A)^{-1}=\frac{1}{(s-2)(s-3)}\begin{bmatrix}s-3 & 0\\ 1 & s-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s-2} & 0\\ \frac{1}{s-3}-\frac{1}{s-2} & \frac{1}{s-3}\end{bmatrix}$$

$$\phi(t)=L^{-1}\left[(SI-A)^{-1}\right]=\begin{bmatrix}e^{2t} & 0\\ e^{3t}-e^{2t} & e^{3t}\end{bmatrix}$$

∵输入信号为单位阶跃信号

∴ $u(t)=1(t) \quad u(s)=\frac{1}{s}$

$$x(t)=\phi(t)x(0)+\int_0^t \phi(\tau)Bu(t-\tau)d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}e^{2t} & 0\\ e^{3t}-e^{2t} & e^{3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}e^{2\tau} & 0\\ e^{3\tau}-e^{2\tau} & e^{3\tau}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{2t}\\ 2e^{3t}-2e^{2t}-e^{3t}\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}e^{2\tau}\\ -e^{2\tau}\end{bmatrix}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{2t}\\ e^{3t}-2e^{2t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^{2t}-1)\\ \frac{1}{2}(1-e^{2t})\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}\\ e^{3t}-\frac{5}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

三、

(1) $G(s)=\dfrac{s^2+8s+7}{s^2+5s+6}=1+\dfrac{3s+1}{s^2+5s+6}=1+\dfrac{-5}{s+2}+\dfrac{8}{s+3}$

①能控标准型

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-5&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+u$$

②能观标准型

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-5\\1&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+u$$

③对角标准型

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0\\0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}-5&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+u$$

(2) $G(s)=\dfrac{s^2+6s+8}{s^2+5s+6}=\dfrac{(s+2)(s+4)}{(s+2)(s+3)}=\dfrac{s+4}{s+3}$

因为系统的传递函数零极点对消

所以不存在既能控又能观的状态空间实现

四、

(1)

$$\dot{x}=\left[\begin{array}{c|cc}-2&0&0\\ \hline 0&3&1\\0&0&3\end{array}\right]x+\left[\begin{array}{c}2\\ \hline 1\\0\end{array}\right]u$$

$$y=\left[\begin{array}{c|cc}2&-1&1\end{array}\right]x$$

直接约当标准型判据可知

系统不能控，但能观

(2) 由(1)已知系统不能控，可进行能控性分解

$$\operatorname{rank}S_c=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}B&AB&A^2B\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}2&-4&8\\1&3&9\\0&0&0\end{bmatrix}=2$$

取变换 $T_c^{-1}=\begin{bmatrix}2&-4&0\\1&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$T_c=\begin{bmatrix}\frac{3}{10}&\frac{2}{5}&0\\-\frac{1}{10}&\frac{1}{5}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\bar{A}=T_cAT_c^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{10}&\frac{2}{5}&0\\-\frac{1}{10}&\frac{1}{5}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-4&0\\1&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&6&\frac{2}{5}\\1&1&\frac{1}{5}\\0&0&3\end{bmatrix}$$

$$\bar{B}=T_cB=\begin{bmatrix}\frac{3}{10}&\frac{2}{5}&0\\-\frac{1}{10}&\frac{1}{5}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\bar{C}=CT_c^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-4&0\\1&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \dot{\bar{x}}=\left[\begin{array}{cc|c}0&6&\frac{2}{5}\\1&1&\frac{1}{5}\\ \hline 0&0&3\end{array}\right]\bar{x}+\left[\begin{array}{c}1\\0\\ \hline 0\end{array}\right]u$$

$$y=\left[\begin{array}{cc|c}3&-1&1\end{array}\right]\bar{x}$$

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

五、

(1) 由题可得 $\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$

$\phi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ $\quad |\phi| \neq 0$. 原点是唯一的平衡状态

解法一（李雅普诺夫第一法：判断特征值是否在单位圆内）：

$$|zI-\phi| = \begin{vmatrix} z-1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & z \end{vmatrix} = z^2 - z + \frac{1}{2} = 0$$

$z_1 = 0.5 + j0.5 = 0.707 \angle 45^\circ$

$z_2 = 0.5 - j0.5 = 0.707 \angle -45^\circ$

特征值均在单位圆内，系统稳定

解法二（李雅普诺夫第二法：李雅普诺夫方程）：

取 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，已知 $\phi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$，设实对称矩阵 $P = P^T = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$

令 $\phi^T P \phi - P = -Q$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_2 + \frac{1}{4}P_3 & -P_1 - \frac{3}{2}P_2 \\ -P_1 - \frac{3}{2}P_2 & P_1 - P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} P_2 + \frac{1}{4}P_3 = -1 \\ -P_1 - \frac{3}{2}P_2 = 0 \\ P_1 - P_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 3 \\ P_2 = -2 \\ P_3 = 4 \end{cases} \quad \text{即 } P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$\because P_1 = 3 > 0 \quad \begin{vmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8 > 0$

$\therefore$ P正定

$\therefore$ 系统在平衡状态 $x_e = 0$ 处为大范围渐进稳定的

(2) 通过分析系统运动过程中能量的变化来判断系统的稳定性。

构造一个反映系统运动过程中能量变化的虚拟能量函数，其时间导数如果始终小于零，表明系统运动逐步趋向平缓，直至在平衡状态处稳定。

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

六.

(1) 原系统的传递函数 $\frac{s+1}{s(s-1)(s+3)} = \frac{s+1}{s^3+2s^2-3s}$

其能控标准型为 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$

系统是能控的

设状态反馈增益矩阵 $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$

$$|\lambda I-(A-bK)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ k_1 & k_2-3 & \lambda+k_3+2 \end{vmatrix} = \lambda^3+(k_3+2)\lambda^2+(k_2-3)\lambda+k_1$$

期望的系统特征方程为 $(\lambda+2)(\lambda+4)(\lambda+1) = \lambda^3+7\lambda^2+14\lambda+8$

$$\begin{cases} k_3+2=7 \\ k_2-3=14 \\ k_1=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1=8 \\ k_2=17 \\ k_3=5 \end{cases} \quad \text{即 } K = \begin{bmatrix} 8 & 17 & 5 \end{bmatrix}$$

(2) 已知加入状态反馈后系统的传递函数 $\frac{1}{(s+2)(s+4)} = \frac{s+1}{(s+2)(s+4)(s+1)} = \frac{s+1}{s^3+7s^2+14s+8}$

∴其状态空间表达式为 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$

也可以以 A-bK 计算

$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$

系统从原先的不稳定到稳定，同时其动态性能（快速性、稳定性）也得到提升。

(3) $\text{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = 3$

∴系统能观

设 $H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$. $A-HC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1 & h_1 & 0 \\ h_2 & h_2 & 0 \\ h_3 & h_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_1 & 1-h_1 & 0 \\ -h_2 & -h_2 & 1 \\ -h_3 & 3-h_3 & -2 \end{bmatrix}$

$$|\lambda I-(A-HC)| = \begin{vmatrix} \lambda+h_1 & h_1-1 & 0 \\ h_2 & \lambda+h_2 & -1 \\ h_3 & h_3-3 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+h_1)(h_3-3)-h_3(h_1-1)+(\lambda+2)\left[(\lambda+h_1)(\lambda+h_2)-h_2(h_1-1)\right]$$
$$= \lambda^3+(h_1+h_2+2)\lambda^2+(2h_1+3h_2+h_3-3)\lambda-3h_1+2h_2+h_3$$

又 $(\lambda+5)(\lambda+2+j2)(\lambda+2-j2) = \lambda^3+9\lambda^2+28\lambda+40$

$$\therefore \begin{cases} h_1+h_2+2=9 \\ 2h_1+3h_2+h_3-3=28 \\ -3h_1+2h_2+h_3=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1=-4 \\ h_2=11 \\ h_3=6 \end{cases}$$

$\therefore H = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix}$

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

七.

由题可知 $t_0=0$. $x(0)=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$; $t_f=2$. $x(2)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$; $\phi=0$. $L=2u^2$; $\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u(t)\\x_1(t)\end{bmatrix}$

构造哈密顿函数 $H=L+\lambda^T(t)\cdot f=2u^2+\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\x_1\end{bmatrix}$

$$=2u^2+\lambda_1 u+\lambda_2 x_1$$

由协态方程 $\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1(t)\\\dot{\lambda}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\partial H}{\partial x_1(t)}\\-\frac{\partial H}{\partial x_2(t)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda_2\\0\end{bmatrix}$

$\therefore \lambda_2(t)=a$. $\lambda_1(t)=-at+b$

由控制方程 $\frac{\partial H}{\partial u}=4u+\lambda_1=0$

$\therefore u(t)=-\frac{1}{4}\lambda_1(t)=\frac{a}{4}t-\frac{b}{4}$

由状态方程 $\dot{x}_1(t)=u(t)=\frac{a}{4}t-\frac{b}{4}$

$x_1(t)=\frac{a}{8}t^2-\frac{b}{4}t+c$

$\dot{x}_2(t)=x_1(t)=\frac{a}{8}t^2-\frac{b}{4}t+c$

$x_2(t)=\frac{a}{24}t^3-\frac{b}{8}t^2+ct+d$

已知 $\begin{cases}x_1(0)=2\\x_2(0)=2\\x_1(2)=0\\x_2(2)=0\end{cases}$. 即 $\begin{cases}c=2\\d=2\\\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+c=0\\\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+2c+d=0\end{cases}$. 解得 $\begin{cases}a=24\\b=28\\c=2\\d=2\end{cases}$

$\therefore u^*(t)=6t-7$

$x^*(t)=\begin{bmatrix}3t^2-7t+2\\t^3-\frac{7}{2}t^2+2t+2\end{bmatrix}$

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store