南京航空航天大学 **2011** 级硕士研究生

2011 ~ 2012 学年第 1 学期 《矩阵论》 课程考试 A 卷

考试日期：2012 年 1 月 9 日，：

学院	专业	学号	姓名	成绩

一（20 分）设 $A=\begin{pmatrix}3 & 6 & -15\\ 1 & 2 & -5\\ 1 & 2 & -5\end{pmatrix}$。

（1） 求 A 的特征多项式和 A 的全部特征值；

（2） 求 A 的行列式因子，不变因子，初等因子和最小多项式；

（3） 写出 A 的 Jordan 标准形 J 。

（1）$|\lambda \boldsymbol{I}-A|=\lambda^3$， 3'

$\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=0$； 3'

（2）$\boldsymbol{A}$ 的行列式因子 $1,\ \lambda,\lambda^3$； 3'

$\boldsymbol{A}$ 的不变因子 $1,\ \lambda,\lambda^2$； 3'

$\boldsymbol{A}$ 的初等因子 λ,λ^2； 2'

$\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 λ^2； 1'

（3）$\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形 $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$。 5'

二（20 分）（1）设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$，求 $\|A\|_1,\|A\|_2,\|A\|_\infty,\|A\|_F$；

（2）设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$，证明：

（i）对 m 阶酉矩阵 U 和 n 阶酉矩阵 V，有 $\|UAV\|_F=\|A\|_F$；

（ii）若 $rank(A)=r$，$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$ 为 A 的全部正奇异值，则 $\sum_{k=1}^{r}\sigma_k^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2$。

（1）$\|A\|_1=6,$　　2'

$A^H A=\begin{pmatrix}14 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}, \|A\|_2=\sqrt{14}$；　　4'

$\|A\|_\infty=3$；　　2'

$\|A\|_F=\sqrt{19}$.　　2'

(2)(i)
$$\|UAV\|_F=[tr((UAV)^H UAV)]^{\frac{1}{2}}=[tr(V^H A^H U^H UAV)]^{\frac{1}{2}}$$
$$=[tr(V^H A^H AV)]^{\frac{1}{2}}=[tr(V^{-1}A^H AV)]^{\frac{1}{2}}=[tr(A^H A)]^{\frac{1}{2}}=\|A\|_F .$$
5'

(ii) 因为 $rank(A)=r$，则由奇异值分解定理知，存在 m 阶酉矩阵 U 和 n 阶酉矩阵 V，

使得 $U^H AV=\begin{pmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，其中 $\Sigma=diag(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r)$，从而

$$\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2=\left\|\begin{pmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\|_F^2=\left\|U^H AV\right\|_F^2=\|A\|_F^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$$
5'

三（20 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&2&1&1\end{pmatrix}$， $b=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$.

（1） 计算 A 的满秩分解；

（2）计算广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^+$；

（3）用广义逆矩阵判定线性方程组 $Ax=b$ 是否相容。若相容，求其通解；若不相容，求其极小最小二乘解。

（1） $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$； 8'

（2） $A^+=C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T$ 2'

$$=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}5&-4&1\\0&3&3\\-5&7&2\\5&-4&1\end{pmatrix}$$ 6'

（3）因为 $AA^+b=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}50\\5\\55\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}10\\1\\11\end{pmatrix}\neq b$，所以 $Ax=b$ 不相容。 2'

$Ax=b$ 的极小最小二乘解为 $x=A^+b=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}19\\12\\-7\\19\end{pmatrix}$。 2'

四（20 分）（1）设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$，判断 A 是否是正定或半正定矩阵，并说明理由；

（2）设 A 是 n 阶 Hermite 正定矩阵，B 是 n 阶 Hermite 矩阵，证明：AB 相似于实对角矩阵；

（3）设 A，B 均为 n 阶 Hermite 矩阵，并且 $AB=BA$，λ 是 AB 的特征值，证明：存在 A 的特征值 α 和 B 的特征值 β，使得 $\lambda=\alpha\beta$。

（1）因为 A 的顺序主子式 $\Delta_1=2>0,\Delta_2=5>0,\Delta_3=-8<0$，所以 A 不是正定的。 4’

因为 A 有一个主子式 $\Delta_3=-8<0$ 或 $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=-3<0$，所以 A 也不是半正定的。 4’

（2）因为 A 是 n 阶 Hermite 正定矩阵，则存在可逆 Hermite 矩阵 S，使得 $A=S^2$，从而 AB 相似于 $S^{-1}ABS=SBS=S^HBS$。 3’

又因为 B 是 Hermite 矩阵，则 S^HBS 是 Hermite 矩阵。由 Hermite 矩阵的谱分解 S^HBS 相似于实对角矩阵，再由相似的传递性知，AB 相似于实对角矩阵。 3’

（3）因为 A，B 均为 n 阶 Hermite 矩阵，并且 $AB=BA$，则存在 n 阶酉矩阵 U，使得

$$U^HAU=diag(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),U^HBU=diag(\beta_1,\cdots,\beta_n)。$$ 3’

从而 $U^HABU=diag(\alpha_1\beta_1,\cdots,\alpha_n\beta_n)$，即 AB 相似于对角矩阵 $diag(\alpha_1\beta_1,\cdots,\alpha_n\beta_n)$。因此，如果 λ 是 AB 的特征值，则存在 A 的特征值 α 和 B 的特征值 β，使得 $\lambda=\alpha\beta$。 3’

五（20 分）设 $R[x]_3$ 表示实数域 $\boldsymbol{R}$ 上次数小于 3 的多项式再添上零多项式构成的线性空间。

（1）　确定 $R[x]_3$ 的维数，并写出 $R[x]_3$ 的一组基；

（2）　对 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\in R[x]_3$，在 $R[x]_3$ 上定义线性变换 T 如下：

$$T(f(x))=(a_0-a_1)+(a_1-a_2)x+(a_2-a_0)x^2,$$

求 T 在（1）中所取基下的矩阵表示；

（3）　求（2）中线性变换 T 的值域 $\boldsymbol{R(T)}$ 和核 $Ker(T)$，并确定它们的维数；

（4）　在 $R[x]_3$ 中定义内积

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx,\ \ \forall f(x),g(x)\in R[x]_3$$

求 $R[x]_3$ 的一组标准正交基。

（1）　$\dim(R[x]_3)=3$，　2’

$R[x]_3$ 的一组基为 $\alpha_1=1,\alpha_2=x,\alpha_3=x^2$。　3’

（2）　因为

$$T(\alpha_1)=1-x^2=\alpha_1-\alpha_3$$
$$T(\alpha_2)=-1+x=-\alpha_1+\alpha_2$$
$$T(\alpha_3)=-x+x^2=-\alpha_2+\alpha_3$$

则 T 在基 α_1，α_2，α_3 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$。　6’

（3）$R(T)=span(T(\alpha_1),T(\alpha_2),T(\alpha_3))=span(\alpha_1-\alpha_3,-\alpha_1+\alpha_2)$，　1’

$\dim(R(T))=2$，　1’

$Ker(T)=span(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$，　1’

$\dim(Ker(T))=1$。　1’

（4）$R[x]_3$ 的一组标准正交基为

$\varepsilon_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$；　1’

$\varepsilon_2=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$；　2’

$\varepsilon_3=\dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2-\dfrac{1}{3})$。　2’