2022 高等工程数学试卷

一、已知实矩阵$C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & -2 & -1\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$，求$\|C\|_1,\|C\|_\infty,\|C\|_F,\|C\|_2$。

二、已知矩阵$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$

1. 求 B 的特征多项式和 B 的全部特征值;
2. 求 B 的不变因子，初等因子及最小多项式;
3. 求 B 的 Jordan 标准型 J 及变换矩阵 P，使得 $P^{-1}BP=J$;
4. 令$T>0$，确定幂级数$s(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(T+\frac{3}{k})^k}z^k$的收敛半径。令$h(z)=s(\frac{z}{2}-3)$，对上述 B 讨论矩阵幂级数 $h(B)$ 的绝对收敛性（收敛圆边界上的情形除外）。

三、1. 求矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$的因子分解 $A=QR$，其中$Q\in\mathrm{R}^{4\times 3}$为列正交规范矩阵，$R\in\mathrm{R}^{3\times 3}$为可逆上三角矩阵.

2、已知矩阵 B，存在可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，使得$P^{-1}BP=J=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求$\cos(B)$.

四、1. 当实数 t 满足什么条件时，$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ 4 & -t+12 & t\\ 0 & t & -t\end{pmatrix}$半正定？

2. 令$B\in C^{n\times n}$为 Hermite 矩阵，证明：若 B 的顺序主子式均大于 0，则 B 为正定矩阵.

3. 令$B\in C^{n\times n}$为复矩阵，$E\in C^{n\times n}$为可逆 Hermite 矩阵，证明：若$tr(EE^HB^HB)=0$，则$B=0$.

五、矩阵$F=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ -6 & -1 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$，向量$g=\begin{pmatrix}4\\ -8\\ 4\end{pmatrix}$

1. 求矩阵 F 的满秩分解，并计算F^+；

2. 对于方程组$Fx=g$，用广义逆矩阵判定方程组是否相容？若相容，求其通解及极小范数

解；若不相容，求其最小二乘解及极小最小二乘解.