第一章 概率论的基本概念

1.1. 用集合的形式写出下列随机试验的样本空间 S 和随机事件 A.

(1) 掷一枚骰子, 观察向上一面的点数. 事件 A 表示“出现奇数点”____.

(2) 对一个目标进行射击, 一旦击中就停止射击, 观察射击的次数. 事件 A 表示“射击次数不超过 3 次”. ________________________

(3) 把单位长度的一根细棒折成三段, 观察各段的长度, 事件 A 表示“三段细棒能构成一个三角形”. ________________________.

1.2. 设 A,B,C 为三个事件, 用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件:

⑴ A发生，B与C不发生.

(2)A与B都发生，而C不发生.

（3）A,B,C中至少有一个发生.

（4）A,B,C都发生.

（5）A,B,C都不发生.

（6）A,B,C中不多于一个发生.

（7）A,B,C中不多于两个发生.

（8）A,B,C中至少有两个发生.

1.3. 化简下列各式

$(1) AB \cup A\bar{B}$

$(2) (A \cup B) \cup (\bar{A} \cup \bar{B})$

$(3) (\overline{A \cup B}) \cap (A - \bar{B})$

1.4. 某建筑倒塌(记为事件 A)的原因有以下 3 个：地震(记为事件 A_1)；台风(记为事件 A_2)；暴雨(记为时间 A_3)。已知台风时必定有暴雨，请用 A_1, A_2, A_3 来表示 A.

1.5. 设A, B, C是三个事件，且$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = P(BC) = 0,$ $P(AC) = \frac{1}{8}$,求A, B, C至少一个发生的概率.

1. 6. 设 A, B 是两个事件, 已知 $P(A)=0.5,\ P(B)=0.7,\ P(A\cup B)=0.8.$

试求 $P(A-B)$ 与 $P(B-A)$.

1. 7. 一份试卷上有 6 道题, 某位学生在解答时由于粗心随机的犯了 4 处不同的错误, 试求：

(1) 这 4 处错误发生在最后一道题的概率;

(2) 这 4 处错误发生在不同题上的概率;

(3) 至少有 3 道题全对的概率.

1. 8. 已知 $P(\bar{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\bar{B})=0.5,$ 求条件概率 $P(B\mid A\cup\bar{B})$.

1.9. 已知$P(A)=\dfrac{1}{4}, P(B|A)=\dfrac{1}{3}, P(A|B)=\dfrac{1}{2}$,求$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup B)$.

1.10. 已知在10件产品中有2件次品,在其中取两次,每次取一件,作不放回抽样,求下列事件的概率:

(1) 两件都是正品;(2) 两件都是次品;

(3) 一件正品，一件次品;(4)第二次取出的是次品.

1.11. 设甲袋中装有n只白球,m只红球;乙袋中装有N只白球,M只红球.今从甲袋中任意取一球放入乙袋中,再从乙袋中任意取一球,问取到白球的概率是多少?

1.12 某年级有甲,乙,丙三个班级,各班人数分别占年级总人数的$\frac{1}{4}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{5}{12}$.已知甲,乙,丙三个班中集邮人数分别占该班总人数的$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{4}$,$\frac{1}{5}$,试求:

(1) 从该年级中随机选取一人,此人为集邮者的概率;

(2) 从该年级中随机选取一人,发现此人是集邮者,此人属于乙班的概率.

1.13. 一个学生接连参加同一课程的两次考试,第一次及格的概率为p.若第一次及格则第二次及格的概率也是p;若第一次不及格则第二次及格的概率为$p/2$.

(1) 若至少有一次及格则他能取得某种资格,求他取得该资格的概率.

(2) 若已知他第二次已经及格,求他第一次及格的概率.

1.14. 一个盒子装有6只乒乓球,其中4只是新球.第一次比赛时随机从盒子里取出2只球,使用后放回盒子里.第二次比赛时又随机从盒子里取出2只球.

(1) 试求第二次取出的球全是新球的概率;

(2) 已知第二次取出的球全是新球,试求第一次比赛时取的球恰含一个新球的概率.

1.15. 袋子中装有m枚正品硬币,n枚次品硬币（次品硬币的两面均印有国徽）.在袋子中任取一枚,将它投掷r次,已知每次都得到国徽.问这枚硬币是正品的概率为多少?

1.16. 设甲,乙,丙三人同时独立的向同一目标各射击一次,命中率分别是$\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3}$,现已知目标被击中,求它被乙击中的概率是多少?

1.17. 设根据以往记录的数据分析, 某船只运输的某种物品损坏情况共有三种: 损坏 2% （记为事件 A_1）, 损坏 10% （记为事件 A_2）, 损坏 90% （记为事件 A_3）. 现从已被运输的物品中随机抽取损坏 3 件，发现这三件都是好的（事件 B）(这里假设物品件数很多，取出一件后不影响取后一件的好坏的概率). 在如下两种情况下，求 $P(A_1|B), P(A_2|B), P(A_3|B)$.

(1) $P(A_1)=0.8, P(A_2)=0.15, P(A_3)=0.05$.

(2) $P(A_1)=0.7, P(A_2)=0.15, P(A_3)=0.05$.

1.18. 设 A,B 是两个事件, 已知 $P(A)=0.3, P(B)=0.6,$ 试在下列两种情况下分别求出 $P(A|B), P(\bar{A}|\bar{B}), P(\bar{A}\cup B)$

(1) 事件 A,B 互不相容; (2) 事件 A,B 有包含关系; (3) 事件 A,B 相互独立.

1.19. 设情报员能破译一份密码的概率为0.6. 试问，至少要使用多少名情报员才能使破译一份密码的概率大于0.95？（假定各情报员能否破译密码是相互独立的）

1.20. 某厂生产的钢琴中有 70%可以直接出厂, 剩下的钢琴经过调试后, 其中 80%可以出厂, 20%被定为不合格品. 现该厂生产了 $n(\geq 2)$ 架钢琴, 假定各钢琴质量相互独立. 试求:

（1）所有钢琴能出厂的概率;

（2）恰好有两架钢琴不能出厂的概率.

第二章 随机变量及其分布

2.1 袋子中有 4 只黑球, 2 只白球, 每次取一个, 不放回, 直到取到黑球为止, 令 X 为“取到的白球个数”, 求 X 的分布律.

2.2.（1） 给出随机变量 X 的取值及其对应的概率为 $P(X=k)=\frac{1}{3^k}, k=1,2,\ldots$, 判断它是否为随机变量的分布律.

（2） 设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\frac{a}{N}, k=1,2,\ldots N$, 试确定常数 a.

2.3. 若有彼此独立工作的同类设备90台, 每台发生故障的概率为0.01. 现配备三个修理工人, 每人分块包修30台, 求设备发生故障而无人修理的概率. 若三人共同负责维修90台, 这时设备发生故障而无人修理的概率是多少?

2.4. 已知随机变量 X 的概率分布为 $P(X=1)=0.2, P(X=2)=0.3, P(X=3)=0.5$ 试写出其分布函数并画出相应的图形.

2.5. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1; \\ 0.4, & -1\le x<1; \\ 0.8, & 1\le x<3; \\ 1, & x\ge 3. \end{cases}$，求 X 的分布律.

2.6. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 0<x<1; \\ \frac{2}{9}, & 3<x<6; \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 若 $P(X>k)=\frac{2}{3}$，求 k 的取值范围.

2.7. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1; \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

以 Y 表示 X 的三次独立重复观察中事件 $\{X<\frac{1}{2}\}$ 出现的次数，求 Y 的分布律.

2. 8. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<1; \\ a\ln x, & 1\le x<e; \\ 1, & x\ge e \end{cases}$

求:(1) 常数 a;

(2) 概率密度 f(x);

(3) $P(X<2), P(0<X\le 3), P(2<X<2.5)$.

2. 9. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \dfrac{1}{4}, & 0\le x<2; \\ \dfrac{a}{x^2}, & x\ge 2. \end{cases}$

求:(1) 常数 a;

(2) 求分布函数.

2.10. 设随机变量 X 服从 $[a,b],(a>0)$ 上的均匀分布，且 $P(0<X<3)=\frac{1}{4}, P(X>4)=\frac{1}{2}$,

求：(1) X 的概率密度;

(2) $P(1<X<5)$.

2.11. 设顾客到银行窗口等待服务的时间 X（单位：分）服从参数为5指数分布. 某顾客在窗口等待服务，如超过10分钟，他就离开，他一个月到银行5次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，求 Y 的分布律，并求 $P(Y\ge 1)$.

2.12. 设 $X \sim N(3,4)$，（1）求 $P(2<X<5), P(-4<X\le 10), P(|X|>2), P(X>3)$；

（2）确定 C，使得 $P(X>C)=P(X<C)$.

2.13. 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率 0.5，

（1）求 μ；

（2）若进一步有 $P(4<X<8)=0.3$，求 $P(X<0)$.

2.14. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{x}e^{\frac{-(\ln x)^2}{2}}, & x>0;\\ 0, & 其它.\end{cases}$$ 其中 $c>0$ 为常数. 则

(1). 求常数 c;

(2). 设 $Y=\ln X$，且 Y 的分布函数为 $G(y)$，求 Y 概率密度函数 $g(y)$;

(3). 求 $G(Y)$ 的概率密度函数.

2.15. 设 X 的分布律为

X	−2	−1	0	1	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

求 Y=X^2 的分布律

2.16. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，求 $Y=2X^2-1$ 及 $Z=\frac{1}{2}|X|$ 的概率密度.

2.17. 设随机变量 X 服从 $[1,2]$ 服从均匀分布，试求随机变量 $Y=e^{2X}$ 的概率密度.

2.18. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi; \\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$ 求 $Y=\sin X$ 的概率密度.

2.19. 在半径为 R，中心在坐标原点的圆周上任意抛掷一个点(即所抛点的极角均匀分布在区间 $(-\pi,\pi)$ 内)，试求连接所抛点与点 $(-R,0)$ 的弦长的分布函数与概率密度.

第三章　多维随机变量及其分布

3.1. 盒子里装有3只红球和2只白球, 在其中任取4只球. 以 X 表示取到的白球数, 以 Y 表示取到的红球数, 写出 X 和 Y 的联合分布律.

3.2. 将一枚硬币抛3次, 以 X 表示3次中出现正面的次数, 以 Y 表示三次中正反面次数之差的绝对值. 写出 X 和 Y 的联合分布律和各自的边缘分布律.

3. 3. 设二维随机变量(X,Y)在以$(-1,0)$，$(0,1)$和$(1,0)$为顶点的三角形区域上服从均匀分布,

求：(1) (X,Y)的联合概率密度函数；

(2) X和Y各自的边缘概率密度.

3. 4. 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases} kxy, 0<x<y<1 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$

求：(1) 常数k；(2) $P\{X+Y>1/2\}$；(3) X和Y各自的边缘概率密度；

(4) 条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$和$f_{Y|X}(y|x)$；

(5) 判断X和Y是否相互独立.

3.5. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},(x,y)\in R^2$,求常数A及条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$.

3.6. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, X 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布, Y 服从参数为 2 的指数分布.

求:(1) (X,Y) 的联合概率密度函数;

(2) 设含有 a 的方程 $a^2+2aX+Y=0$ 有实根的概率.

3.7. 已知(X,Y)的联合分布律为：

X \ Y	1	2	3
0	0.2	0.3	0.1
1	0.1	0	0.3

试 求 分 别 求

$Z_1 = X + Y \quad Z_2 = XY \quad Z_3 = \max\{X,Y\} \quad Z_4 = \min\{X,Y\}$ 的分布律.

3.8. 设随机变量 X 的分布律为：$P(X=0)=\dfrac{1}{3}$，$P(X=1)=\dfrac{2}{3}$，随机变量 Y 的分布律为：$P(Y=-1)=\dfrac{1}{3}, P(Y=0)=\dfrac{1}{3}$，$P(Y=1)=\dfrac{1}{3}$. 若 $P(X^2=Y^2)=1$，

求：(1) (X,Y) 的联合分布律；

(2) $Z = XY$ 的分布律.

3.9. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的泊松分布.

求：(1) $Z = X + Y$ 的分布律；

(2) $P\{X = k \mid Z = m\}$，其中 $k \le m$，m 已知.

3.10. 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}24xy\,, & 0<x<1, 0<y<1-x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$，求 $Z = X + Y$ 的概率密度函数.

3.11. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，X 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布，Y 服从参数为 1 的指数分布.

求：（1） $Z=X+Y$ 的概率密度函数；（2）求 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数.

3.12. 设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{\frac{-1}{2}(\frac{x^2}{\sigma_1^2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2})}, (x,y)\in R^2$,

求 $Z=X-Y$ 的概率密度.

3.13. 设随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 均服从参数为 $\dfrac{1}{\theta}$ 的指数分布.

试求 $Y = \max\limits_{1 \le i \le n}\{X_i\}$ 和 $Z = \min\limits_{1 \le i \le n}\{X_i\}$ 各自的概率密度函数.

第四章 随机变量的数字特征

4. 1. 设 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

求

$E\left(X\right),E\left(X^{2}\right),E\left(2X^{2}+3\right).$

4. 2. 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<\infty$, 求 $E\left(X\right),D\left(X\right)$

4.3. 设随机变量 X 服从几何分布，其分布律为

$$P\left(X=k\right)=p\left(1-p\right)^{k-1}, \quad k=1,2,\cdots,0<p<1 \text{是常数。}$$

求 $E\left(X\right),D\left(X\right)$.

4.4. 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2),Y \sim N(\mu,1)$，且 X,Y 相互独立.

求：（1） $E\left|X-\mu\right|$；（2） $E(e^X)$；（3） $E\left|X-Y\right|$；（4） $D\left|X-Y\right|$

4.5. 设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}12y^2 & 0\le y\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，

求$E(X),E(Y),E(XY),E(X^2+Y^2)$.

4.6. 将n只球(1~n号)随机地放进n只盒子(1~n号)中去. 一只盒子装一只球. 若一只球装入与球同号的盒子中称为一个配对. 记X为总配对数，求$E(X)$.

4.7. 某产品的次品率为 0.1，检测员每天检验 4 次，每次随机地取 10 件产品进行检验，如发现其中的次品数多于 1，就去调整设备，以 X 表示一天中调整设备的次数，求 $E\left(X\right)$.（设各产品是否为次品是相互独立的）

4.8. 一工厂生产的某种设备的寿命 X （以年计）服从指数分布，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

，工厂规定，出售的设备若在出售一年之内可以调换.

若工厂售出一台设备盈利 100 元，调换一台设备厂方需要花费 300 元，试求厂方出售一台设备净盈利的数学期望.

4.9. 设 X 为随机变量，C 是常数，证明：当 $C \neq E(X)$ 时，$D(X) < E\left\{(X-C)^2\right\}$.

4.10. 设随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & |y|<x, 0<x<1 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ 求 $E(X), E(Y), Cov(X,Y)$.

4.11. 设 X,Y 是随机变量，且有 $E(X)=3, E(Y)=1, D(X)=4, D(Y)=9,$ 令 $Z=5X-Y+15$，分别在以下三种情况下求 $E(Z)$ 和 $D(Z)$.

(1) X,Y 相互独立；(2) X,Y 不相关；(3) X 与 Y 的相关系数为 0.25.

4.12. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, 验证 X 与 Y 是不相关的，但 X 与 Y 不是相互独立的.

4.13. 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2), Y \sim N(\mu,\sigma^2)$, 且设 X,Y 相互独立，令 $Z_1 = \alpha X + \beta Y$,

$Z_2 = \alpha X - \beta Y$, 求 Z_1, Z_2 的相关系数 $\rho_{Z_1Z_2}$, 其中 α, β 为常数.

4.14. 设 A 和 B 是试验 E 的两个事件，且 $P(A) > 0$，$P(B) > 0$，并定义随机变量

X,Y 如下：

$$X = \begin{cases} 1, & \text{若}A\text{发生}, \\ 0, & \text{若}A\text{不发生}, \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1, & \text{若}B\text{发生}, \\ 0, & \text{若}B\text{不发生}, \end{cases}$$

证明若 $\rho_{XY} = 0$，则 X 和 Y 必定相互独立.

第五章 大数定律及中心极限定理

5.1. 计算器在进行加法时，将每个加数舍入最靠近它的整数，设所有误差是独立的且在 $(-0.5, 0.5)$ 上服从均匀分布。

(1) 若将 1500 个数相加，问误差总和的绝对值超过 15 的概率是多少？

(2) 最多可有几个数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.9？

5.2. 某单位设置一台电话总机，共有 200 架分机，设每个电话分机是否使用外线通话是相互独立的，设每时刻每个分机有 5%的概率要使用外线通话，问总机需要多少外线才能以不低于 90%的概率保证每个分机要使用外线时可供使用？

5.3. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 相互独立, 且都服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布, 又设 $Y = X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots \cdot X_{100}$, 求 $P(Y < 10^{-40})$ 的近似值.

5.5. 结合习题 3.9.，试用中心极限定理证明：$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n} \to \frac{1}{2}, \quad n \to +\infty$.

第六章 样本及抽样分布

6.1. 设 $X_1, X_2, .., X_n$ 是从 $X \sim N(3.4, 6^2)$ 中抽取容量为 n 的样本.

(1) 求样本均值 $\overline{X}$ 的分布;

(2) 如果要求其样本均值 $\overline{X}$ 位于区间 $(1.4, 5.4)$ 内的概率不小于 0.95，问样本容量 n 至少应取多大?

6.2. 设 $X_1, X_2, .., X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，记 $Y_i = X_i - \overline{X}$，$i = 1,2,\cdots,n$.

求: (1) Y_i 的方差 DY_i，$i = 1,2,\cdots,n$; (2) $D(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2)$;

(3) Y_1 与 Y_n 的协方差 $Cov(Y_1, Y_n)$.

6.3. 设 $X_1, X_2,..,X_n$ 为来自总体 X 的样本， $EX=\mu, DX=\sigma^2$. $\bar{X}, S^2$ 分别表示样本均值与样本方差，求 $E\overline{X}, D\overline{X}, ES^2$.

6.4.(1) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $X \sim N(0,4)$ 的样本. $Y=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$ 服从 χ^2 分布，试求 a,b；并问的自由度为多少？

(2) 设总体 $X \sim N(0,4)$，而 $X_1, X_2, \cdots, X_{15}$ 是来自总体 X 的样本，则随机变量 $Y=\dfrac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}$ 服从何种分布？写出推导过程.

(3) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是取自正态总体的简单随机样本，$Y_1=\dfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} X_i, Y_2=\dfrac{1}{3}\sum_{i=7}^{9} X_i$，$S^2=\dfrac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2$，若统计量 $Z=\dfrac{c(Y_1-Y_2)}{S} \sim t(n)$，求 c,n.

6.5. 若随机变量 $X \sim t(n)$ ，则 $Y = X^2$ 服从何种分布？写出推导过程.

6.6. 设 $X_1, X_2, .., X_{16}$ 是从该总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 样本， $\bar{X}, S^2$ 分别表示样本均值与样本方差，求 k 值使得 $P(\overline{X} > \mu + kS) = 0.95$ 成立.

第七章 参数估计

7.1. 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 其中 $\theta>-1$ 为未知参数. $X_1,\cdots,X_n$ 是从该总体中抽取的样本. 试求未知参数 θ 的矩估计量和极大似然估计量.

7.2. 总体 X 服从 $N(1,\sigma^2)$ 分布, σ^2 为未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体的一组样本.

(1)求 σ^2 的矩估计量 $\hat{\sigma}_1^2$;　　(2)求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}_2^2$;

(3) $\hat{\sigma}_1^2$ 和 $\hat{\sigma}_2^2$ 是否为参数 σ^2 的无偏估计?为什么?

7. 3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_5$ 是来自总体 $X \sim \pi(\lambda)$ 的样本，且样本观测值为 $1,2,3,3,1$.

（1）求 λ 最大似然估计值;　(2) 求 $P(X=0)$ 的最大似然估计值.

7. 4. 设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{(\mu-\ln x)^2}{2}}, & x>0;\\ 0, & 其它.\end{cases}$ 其中 μ 是未知参数. $X_1, X_2, .., X_n$ 是从该总体中抽取的一个简单随机样本.

(1) 求总体 X 的期望 $\mathrm{E}X$；　　(2) 求未知参数 μ 的矩估计量 $\hat{\mu}$；

(3) 求未知参数 μ 的最大似然估计量 $\overline{\mu}$；(4) 验证 $\overline{\mu}$ 为 μ 的无偏估计.

7.5. 设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x) & 0<x<\theta \\ 0 & 其它\end{cases}$ ，其中 $\theta>0$ 是未知参数，$X_1,X_2,..,X_n$ 是从该总体中抽取的一个样本．

(1) 求未知参数 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$；　　(2) 求 $D\hat{\theta}$．

7.6. 设总体X的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta} & x\geq\mu, \\ 0, & 其他.\end{cases}$ 其中 θ>0，θ，μ 为未知参数， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自 X 的样本. 试求 θ，μ 的矩估计与极大似然估计量.

7.7. 设总体 X 的分布律为：$P\{X=1\}=\theta^2, P\{X=2\}=2\theta(1-\theta), P\{X=3\}=(1-\theta)^2$,

其中 $0\le\theta\le1$ 为未知参数. $X_1,\dots,X_4$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 若样本观察值为 $1,1,3,3$, 试求参数 θ 的矩估计值和最大似然估计值;

(2) 以 $N_i(i=1,2,3)$ 分别表示 $X_1,\dots,X_4$ 中等于 i 的个数. 试求 a_1,a_2,a_3，使得

$N=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量.

7.8. 设总体 X 服从 $[\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2}]$ 上的均匀分布，其中 $\theta>0$ 是未知参数，$X_1,X_2,\dots,X_n$ 是从该总体中抽取的一个样本. 试求 θ 矩估计与极大似然估量.

7.9. 设 $X_1, X_2, .., X_n$ 是从该总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 样本, 其中 μ 已知.

(1) 证明: $\overline{\sigma} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} |\mathrm{X}_1 - \mu|$ 是 σ 的无偏估计;

(2) 试求 k 使得 $\hat{\sigma} = k \sum_{i=1}^{n} | X_i - \mu |$ 是 σ 的无偏估计, 并比较 $\hat{\sigma}, \overline{\sigma}$ 的有效性.

7.10. 从一批钉子中随机抽取 16 枚, 测得其长度(单位:cm)为

2.14,	2.10,	2.13,	2.15,	2.13,	2.12,	2.13,	2.10
2.15,	2.12,	2.14,	2.10,	2.13,	2.11,	2.14,	2.11

假设钉子的长度 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 在下列两种情况下分别求总体均值 μ 的置信度为90%的置信区间。

(1)已知 σ =0.01;　　　(2) σ 未知.

7. 11. 已知一种元件的使用寿命服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 未知. 从中随机抽取25件, 测得其寿命的平均值为1003小时, 标准差为10小时．求总体方差 σ^2 的置信水平为0.95的置信区间.

7. 12. 设 $X_1,X_2,..,X_n$ 是从该总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 样本, 其中 μ 已知, σ 未知. 验证 $Y=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$. 利用这一结果构造 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

第八章 假设检验

8.1. (1)对于某正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，作假设检验 $H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$. 若选择显著性水平$\alpha=0.05$时接受H_0，则对于显著性水平$\alpha=0.01$，结论是接受H_0还是拒绝H_0?为什么?

(2)设总体X的分布律为$P\{X=1\}=\theta,\ P\{X=2\}=2\theta,\quad P\{X=3\}=1-3\theta$，作检验 $H_0:\theta=0.1$ $H_1:\theta=0.2$. 现抽取容量为3的样本X_1,X_2,X_3，若拒绝域为$\{X_1=1,X_2=2,X_3=3\}$，则犯第一类错误及第二类错误的概率是多少?

8.2. 假设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,1), X_1, X_2, \cdots X_{10}$ 是来自 X 的一组样本，

要检验 $H_0:\mu=0, H_1:\mu\neq 0$.

(1) 若取显著性水平 $\alpha=0.05$, 拒绝域为 $W=\{|\overline{X}|\geq C\}$, 求 C 的值；

(2) 如果以 $R=\{|\overline{X}|\geq 1.05\}$ 作为该检验的拒绝域，试求检验的显著性水平 α.

8.3. 某正态总体有一容量为 100 的样本, 其观测值给出, 可以算得 $\overline{x}=2.81$,

$\sum_{i=1}^{100}(x_i-\overline{x})^2=225$, 试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设

(1) $H_0:\mu=2.5 \quad H_1:\mu\neq 2.5$

(2) $H_0^{'}:\sigma^2=2.35 \quad H_1^{'}:\sigma^2\neq 2.35$ [要求在(1)的基础上检验]

8.4. 要求一种元件使用寿命不得低于 1000 小时. 今从一批这种元件中随机抽取 25 件, 测得其寿命的平均值为 950 小时, 已知该种元件寿命服从标准差为 $\sigma=100$ 小时的正态分布. 试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下确定这批元件是否合格?

8.5. 某种导线要求其电阻的标准差不得超过 0.005 欧. 今在生产的一批导线中取样品 9 根, 测得 $s=0.007$ 欧, 设总体为正态分布, 问在水平 $\alpha=0.05$ 下能否认为这批导线的标准差显著偏大?

8.6. 某种灯泡的寿命要求不小于 2000 小时.已知某厂生产的灯泡寿命服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布， μ,σ^2 均未知.现从该厂生产的产品中随机地抽取 20 只进行测试,测得它们的平均寿命 $\bar{x}=2050$ 小时,样本标准差 $s=490$ 小时,试问:在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下,能否认为这批灯泡的平均寿命不小于 2000 小时?

8.7.某厂使用新旧两种技术生产同一类型产品,各在一周的产品中抽样进行比较.取使用旧生产的样品 220 件,测得平均重量为 2.46 公斤,样本标准差为 0.57 公斤.取使用新技术生产的样品 205 件,测得平均重量为 2.55 公斤,样本标准差为 0.48 公斤.设这两组样本独立,问在水平 0.05 下能否认为使用新技术的产品平均重量较使用旧技术的显著偏大?(设两总体都服从正态分布,且方差相同.)

8.8. 有甲乙两台机器生产金属部件. 分别在两台机器所生产的部件中各取容量 $n_1 = 60, n_2 = 40$ 的样本, 测得部件重量的样本方差分别为 $s_1^2 = 15.46, s_2^2 = 9.66$. 设两组样本相互独立, 两总体分别服从 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 分布. 试问在水平 $\alpha = 0.05$ 下能否认为甲机器生产的部件重量的方差比乙机器生产的部件重量的方差显著偏大?