南 京 航 空 航 天 大 学

二〇二〇 ～ 二〇二一 学年 第 1 学期

课程名称：《结构动力学基础》试卷参考答案及评分标准

命题教师： 试卷类型：A 试卷代号：

本题分数	10
得 分	

一、判断题（每小题 1 分，总分 10 分。对的打 √，错的打×）

1、已知系统外载荷和响应,求系统的模型是动力学的第一类逆问题。（ √ ）

2、振动系统的固有频率与初始条件和外力等外界因素有关。（× ）

3、一个振动系统当未受到外力的持续激励时，不会发生振动。（ × ）

4、自由振动是初始激励引起的振动，因此，对于一个单自由度线性系统，初始条件不同，自由振动的振幅、相位、频率均不同。（× ）

5、阻尼在共振区，对减小振幅有显著作用；在远离共振区，阻尼对减小振幅的作用不大。（ √ ）

6、单自由度系统中当阻尼比大于等于 1 时，系统从任意初始条件下开始的运动至多越过平衡位置一次，没有震荡特性。（ √ ）

7、频响函数与系统本身特性有关还与初始条件有关。（× ）

8、有阻尼单自由度系统，位移振幅放大因子在固有频率处取得最大值。（× ）

9、多自由度比例阻尼系统的固有振型关于质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵加权正交。（ √ ）

10、有阻尼单自由度系统，当频率比等于 1 时，系统的位移、速度和加速度振幅放大系数均相等。（ √ ）

本题分数	30
得 分	

二、填空题（第 1 至第 5 题每题 4 分，第 6 题 10 分。总分 30 分）

1、 共振时惯性力与__弹性__力相平衡，系统的响应由__阻尼__力与激振力间的平衡关系确定。

每空 2 分。

2、某发动机的工作转速为 1200～1800rpm，要隔离发动机引起的电子设备 90%以上的振动，在不计隔振器阻尼的情况下，隔振器在设备自重下的静变 δ_s 形应满足的条件是：$\underline{\delta_s \geq 7mm}$（精确到

mm）。

3、单自由度受迫振动试验中用简谐激振力作为激励信号，测得系统速度振幅放大系数在 $\omega=\omega_n$ 时取得最大值为 Q；半功率点处的频率为 ω_a 和 ω_b（$\omega_a<\omega_b$），半功率点处的速度振幅放大系数为：$\underline{Q/\sqrt{2}}$；由半功率法测得的系统阻尼比为：$\underline{\dfrac{\omega_b-\omega_a}{2\omega_n}}$。

每空 2 分。

4、如图 1 所示有阻尼单自由度系统，m=1kg，在重量作用下弹簧静变形 δ_s=1mm，自由振动 10 个循环后，振幅从 0.4×10^{-3}mm 降至 0.2×10^{-3}mm，按小阻尼比和 g=10 m/s² 计算，则系统的固有频率为 <u>100</u> rad/s，阻尼比 ζ= <u>0.011</u>（精确到小数点后第三位），阻尼 c= <u>2.2</u> $\mathrm{N\cdot s/m}$。

阻尼比 2 分，其余每空 1 分。

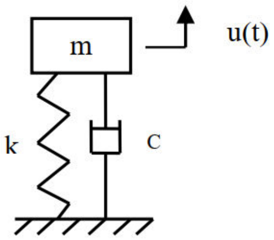


图 1

5、已知某个多自由度线性振动系统，在第 j 个自由度上施加幅值为 a 频率为 f_0（单位为 Hz）的正弦激励，在第 i 个自由度上的稳态位移响应幅值为 b。则在第在第 i 个自由度上施加幅值为 m 频率为 f_0 的正弦激励，在第 j 个自由度上的稳态位移响应幅值为 $\underline{\dfrac{b}{a}\mathrm{m}}$，在第 j 个自由度上的稳态加速度响应幅值为 $\underline{(2\pi f_0)^2\dfrac{b}{a}\mathrm{m}}$。

每空 2 分。

6、图 2 所示等截面均质直杆的长度为 L，弹性模量为 E，密度为 ρ，杆的纵向振动固有振型函数 $U(x)=a_1\cos\dfrac{\omega}{c}x+a_2\sin\dfrac{\omega}{c}x$，其中 $c=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$。按题给条件，$x=0$ 时的边界条件为<u>位移为 0 或</u>$\underline{U(0)=0}$<u>或</u>$\underline{u(0,t)=0}$；$x=\mathrm{L}$ 时的边界条件为<u>轴向力为 0 或</u>$\underline{U'(\mathrm{L})=0}$<u>或</u>$\underline{u'(L,t)=0}$；第 r 阶固有频率 $\omega_r=\underline{\dfrac{(2r\text{-}1)\pi}{2L}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}}$（r=1,2,3,⋯）；第 r 阶固有振型函数 $U_r(x)=\underline{\sin\dfrac{(2r\text{-}1)\pi}{2L}x}$（r=1,2,3,⋯）。

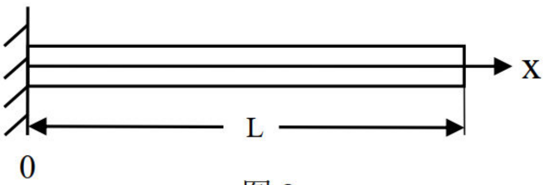


图 2

每空 2 分。

本题分数	20
得　分	

三、图 3 所示系统，基础运动加速度如图 4 所示。（1）写出相对位移 $u_r(t)=u(t)-y(t)$ 满足的运动微分方程（7 分）；（2）求系统在零初始条件下的相对位移响应（13 分）。

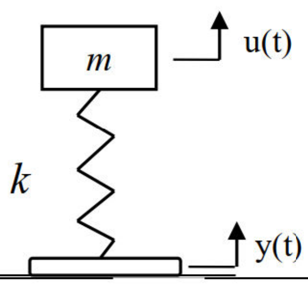


图 3

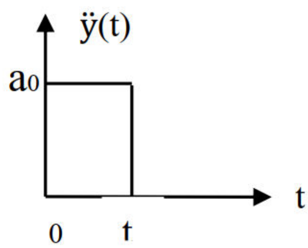


图 4

解：依题意，有

$$m\ddot{u}(t) = -k(u(t) - y(t)) \tag{1}$$

（5 分）

将相对位移表达式 $u_r(t) = u(t) - y(t)$ 代入（1）式得

$$m\ddot{u}_r(t) + ku_r(t) = -m\ddot{y}(t)$$

（2 分）

该系统固有频率为：

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

（1 分）

该系统单位脉冲响应函数为

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t, t \ge 0$$

（2 分）

当 $0 \le t \le t_0$ 时，由杜哈梅积分，得

$$\begin{aligned}
u_r(t) &= \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau \\
&= \int_0^t \frac{-ma_0}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau \\
&= \frac{-a_0}{\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t) \\
&= \frac{a_0 m}{k}(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t - 1)
\end{aligned}$$

（5 分）

当 $t > t_0$ 时，由杜哈梅积分，得

$$\begin{aligned}
u_r(t) &= \int_0^{t_0} h(t-\tau)f(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t h(t-\tau)\bullet 0 d\tau \\
&= \int_0^{t_0} \frac{-ma_0}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau \\
&= \frac{-a_0}{\omega_n^2}(\cos\omega_n(t-t_0) - \cos\omega_n t) \\
&= \frac{a_0 m}{k}(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0))
\end{aligned}$$

（5 分）

本题分数	15
得　分	

四、如图 5 所示等截面均质刚杆质量为 m，长度为 L，$k_1 = 4k$，$k_2 = 16k$，G 为刚杆质心。以图示坐标 u(t)和 θ(t)，并在微振动情况下，（1）建立系统运动微分方程（10 分）；（2）给出系统频响函数矩阵（5 分）。说明：u(t)和 θ(t)分别为质心垂直方向位移和刚杆绕质心转角。

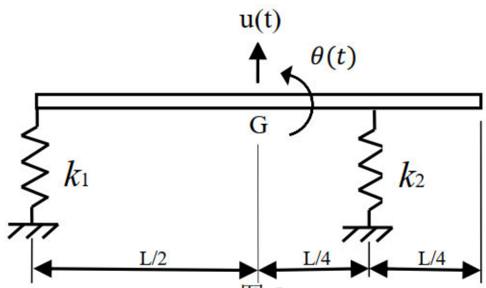


图 5

解：

由牛顿第二定律和动量矩定理，得

$$m\ddot{u}(t) = -k_1(u(t) - \frac{L}{2}\theta(t)) - k_2(u(t) + \frac{L}{4}\theta(t))$$
$$= -4k(u(t) - \frac{L}{2}\theta(t)) - 16k(u(t) + \frac{L}{4}\theta(t))$$

$$\frac{1}{12}mL^2\ddot{\theta}(t) = k_1(u(t) - \frac{L}{2}\theta(t))\frac{L}{2} - k_2(u(t) + \frac{L}{4}\theta(t))\frac{L}{4}$$
$$= 4k(u(t) - \frac{L}{2}\theta(t))\frac{L}{2} - 16k(u(t) + \frac{L}{4}\theta(t))\frac{L}{4}$$

（8 分）

写出矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}mL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20k & 2kL \\ 2kL & 2kL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ （2 分）

系统动刚度矩阵为：

$$Z(\omega) = K - \omega^2 M = \begin{bmatrix} 20k - m\omega^2 & 2kL \\ 2kL & 2kL^2 - \frac{1}{12}mL^2\omega^2 \end{bmatrix}$$

系统频响函数矩阵为：

$$H(\omega) = Z^{-1}(\omega) = \frac{1}{\det Z(\omega)}\begin{bmatrix} 2kL^2 - \frac{1}{12}mL^2\omega^2 & -2kL \\ -2kL & 20k - m\omega^2 \end{bmatrix}, \omega \neq \omega_r, r = 1,2$$ （5 分）

其中：

$$\det Z(\omega) = (20k - m\omega^2)(2kL^2 - \frac{1}{12}mL^2\omega^2) - 4k^2L^2$$

$$\omega_1 = \sqrt{(22 - \sqrt{52})\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{(22 + \sqrt{52})\frac{k}{m}}$$

说明：此题用其他方法建立运动微分方程评分标准类似。

本题分数	25
得　　分	

五、图 6 所示系统，$m_1 = m_2 = 1$ kg，$k_1 = 3$ N/m，$k_2 = 2$ N/m，$c_1 = 0.3$ N·s/m，$c_2 = 0.2$ N·s/m，$f_1(t) = \bar{f}_1 \sin(\omega t)$，$f_2(t) = \bar{f}_2 \sin(\omega t)$。（1）建立系统运动微分方程（5 分）；（2）求系统的固有频率和固有振型，作出固有振型图，写出系统第二阶固有振动表达式（10 分）；（3）当 $\bar{f}_1 =$ 0.01 N 时，试用模态叠加法求使系统稳态响应恰为系统第二阶固有振动时的激振频率 ω 和激振力幅值 $\bar{f}_2$，并给出这种状态下系统稳态响应的表达式（10 分）。

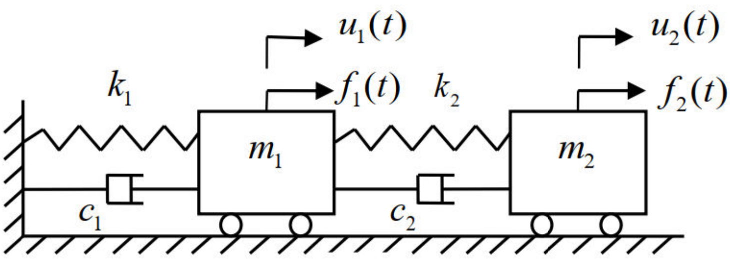


图 6

解：系统运动微分方程为：

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{bmatrix} \sin \omega t \qquad (1) \qquad (4\text{ 分})$$

代入数值后，有

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & -0.2 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{bmatrix} \sin \omega t \qquad (2) \qquad (1\text{ 分})$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.2 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

显然 $C = 0.1K$，所以该系统为比例阻尼系统。(或在解耦后说明为比例阻尼系统)　（1 分）

为求系统固有频率和固有振型，有

$(K - \omega^2 M)\ \varphi = 0$

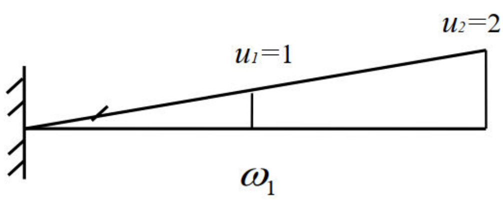
即：

$$\begin{bmatrix} 5-\omega^2 & -2 \\ -2 & 2-\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2\text{ 分})$$

解得两阶固有频率为：

$\omega_1 = 1 \text{rad/s}$　　（1 分）

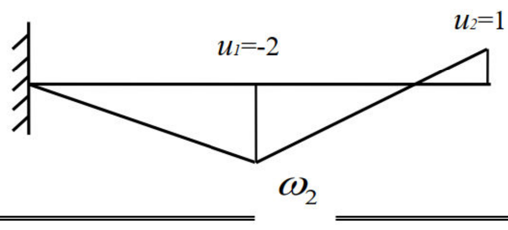
$\omega_2 = \sqrt{6} \text{rad/s}$　　（1 分）



第 1 阶模态振型图

两阶固有振型为：

$$\begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (1\text{ 分})$$



$$\begin{bmatrix}\varphi_{12}\\ \varphi_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$$ （1 分）

固有振型只要比例关系对均算正确。

第 2 阶模态振型图

两阶振型图如右图所示。 （每个振型图 1 分）

系统第二阶固有振动表达式为：

$$\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}\sin\sqrt{6}t,\alpha\neq 0$$ （1 分）

固有振型矩阵为：

$$\Phi=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$ (1 分)

依题意，作坐标变换：

$$\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix}=\Phi\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{bmatrix}$$ (1 分)

代入方程（2）,并左乘 Φ^T 得解耦后的方程为：

$$5\ddot{q}_1(t)+0.5\dot{q}_1(t)+5q_1(t)=(\bar{f}_1+2\bar{f}_2)\sin\omega t$$
$$5\ddot{q}_2(t)+3\dot{q}_2(t)+30q_2(t)=(-2\bar{f}_1+\bar{f}_2)\sin\omega t$$ (2 分)

要使系统稳态响应恰为第二阶固有振动，需有 $q_1(t)=0$ 和 $\omega=\omega_2$

即：

$(\bar{f}_1+2\bar{f}_2)=0$

所以

$\bar{f}_2=-\frac{1}{2}\bar{f}_1=-0.005\text{N}$ （2 分）

激振频率 $\omega=\omega_2=\sqrt{6}\text{rad}/s$ （1 分）

此时有：

$$5\ddot{q}_2(t)+3\dot{q}_2(t)+30q_2(t)=(-2\bar{f}_1+\bar{f}_2)\sin\omega_2 t=-0.025\sin\sqrt{6}t$$ （1 分）

设稳态响应 $q_2(t)=A\sin(\omega_2 t+\psi)$

激振频率等于固有频率时，

$$A=\frac{-0.025}{3\sqrt{6}}=\frac{-0.025\sqrt{6}}{18}$$

$$\psi=-\frac{\pi}{2}$$

$$q_2(t)=\frac{-0.025\sqrt{6}}{18}\sin(\sqrt{6}t-\frac{\pi}{2})$$

$$\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix}=\Phi\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ q_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}q_2(t)=\frac{-0.025\sqrt{6}}{18}\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}\sin(\sqrt{6}t-\frac{\pi}{2})$$ （单位：m）

（2 分）

南 京 航 空 航 天 大 学

二〇二〇 ～ 二〇二一 学年 第 1 学期

课程名称：《结构动力学基础》试卷参考答案及评分标准

命题教师： 试卷类型：B 试卷代号：

本题分数	10
得 分	

一、判断题（每小题 1 分，总分 10 分。对的打 √，错的打×）

1、已知系统模型和响应,求外载荷是动力学的第一类逆问题。（× ）

2、振动系统的固有频率与初始条件和外力等外界因素无关。（ √ ）

3、两个频率不同的简谐振动合成后的振动一定为周期振动。（× ）

4、多自由度无阻尼系统的自由振动是各阶固有振动的线性叠加。但在特定初始条件下，系统自由振动可以为某一阶固有振动。（√ ）

5、当频率比大于零时，阻尼比越大，则力传递率越小。（× ）

6、在固有振型矩阵变换下可对角化的阻尼矩阵称作比例阻尼。（√ ）

7、有阻尼单自由度系统，速度振幅放大因子在固有频率处取得最大值。（√ ）

8、多自由度系统自由振动的频率、振幅和相位取决于系统的初始条件。（× ）

9、单自由度系统中当阻尼比大于等于 1 时，系统从初始条件下开始的运动可以多次越过平衡位置，具有震荡特性。（× ）

10、连续系统又称为无限自由度系统，连续系统有无限多个固有频率和固有振型。（ √ ）

本题分数	30
得 分	

二、填空题（第 1 至第 5 题每题 4 分，第 6 题 10 分。总分 30 分）

1、 共振时弹性力与<u>惯性</u>力相平衡，系统的响应由<u>阻尼</u>力与激振力间的平衡关系确定。

每空 2 分。

2、某发动机的工作转速为 1800～2400rpm，要隔离发动机引起的电子设备 90%以上的振动，在不计隔振器阻尼的情况下，隔振器在设备自重下的静变 δ_s 形应满足的条件是：$\delta_s \geq 3mm$（精确到 mm）。

3、单自由度受迫振动试验中用简谐激振力作为激励信号，测得系统速度振幅放大系数在 f=f_n 时取得最大值为 Q；半功率点处的频率为 f_a 和 f_b（ $f_a < f_b$），半功率点处的速度振幅放大系数为：$\underline{Q/\sqrt{2}}$；由半功率法测得的系统阻尼比为：$\underline{\dfrac{f_b - f_a}{2f_n}}$。

每空 2 分。

4、如图 1 所示有阻尼单自由度系统，m=10kg，在重量作用下弹簧静变形 δ_s=1mm，自由振动 10 个循环后，振幅从 0.6×10^{-3}mm 降至 0.3×10^{-3}mm，按小阻尼比和 g=10 m/s^2 计算，则系统的固有频率为 <u>100</u> rad/s，阻尼比 ζ= <u>0.011</u>（精确到小数点后第三位），阻尼 c= <u>22</u> N·s/m 。

阻尼比 2 分，其余每空 1 分。

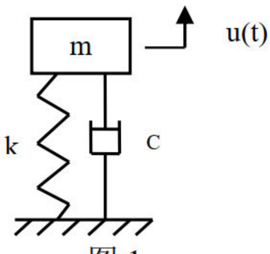


图 1

5、已知某个多自由度线性振动系统，在第 j 个自由度上施加幅值为 a 频率为 f_0（单位为 Hz）的正弦激励，在第 i 个自由度上的稳态位移响应幅值为 b。则在第在第 i 个自由度上施加幅值为 n 频率为 f_0 的正弦激励，在第 j 个自由度上的稳态位移响应幅值为 $\underline{\dfrac{b}{a}\text{n}}$，在第 j 个自由度上的稳态速度响应幅值为 $\underline{2\pi f_0 \dfrac{b}{a}\text{n}}$。

每空 2 分。

6、图 2 所示等截面均质直杆的长度为 L，弹性模量为 E，密度为 ρ，杆的纵向振动固有振型函数 $U(x)=a_1\cos\dfrac{\omega}{c}x+a_2\sin\dfrac{\omega}{c}x$，其中 $c=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$。按题给条件，$x=0$ 时的边界条件为<u>位移为 0 或</u>$\underline{U(0)=0}$<u>或</u>$\underline{u(0,t)=0}$；$x=\text{L}$ 时的边界条件为<u>位移为 0 或</u>$\underline{U(\text{L})=0}$<u>或</u>$\underline{u(L,t)=0}$；第 r 阶固有频率 $\omega_r=\underline{\dfrac{r\pi}{L}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}}$；（r=1,2,3,…）；第 r 阶固有振型函数 $U_r(x)=\underline{\sin\dfrac{r\pi}{L}x}$（r=1,2,3,…）。

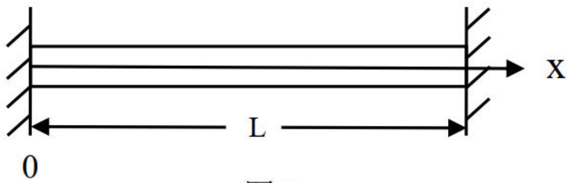


图 2

每空 2 分。

本题分数	20
得　分	

三、图 3 所示刚性杆质量不计，（1）在微振动假设前提下建立系统运动微分方程（7 分）；（2）在不计阻尼（C=0）和零初始条件下，求质量 m 在图 4 所示激振力作用下的线性位移响应（10 分）。

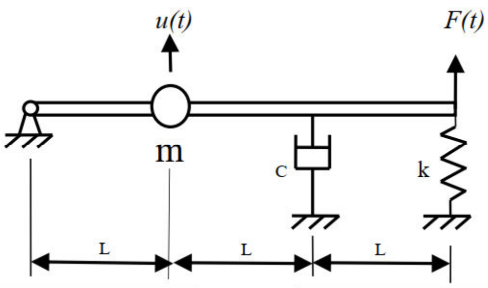


图 3

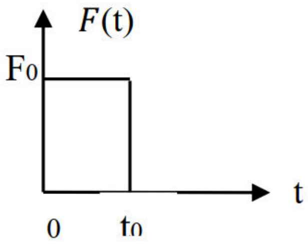


图 4

解：依题意，有

$$mL^2\frac{\ddot{u}(t)}{L}=F(t)\bullet 3L-k\bullet 3u(t)\bullet 3L-c\bullet 2\dot{u}(t)\bullet 2L$$

（6 分）

整理后，得：

$$m\ddot{u}(t)+4c\dot{u}(t)+9ku(t)=3F(t)$$

（1 分）

系统固有频率为：

$$\omega_n=\sqrt{\frac{9k}{m}}=3\sqrt{\frac{k}{m}}$$ （1 分）

不计阻尼（C=0）的情况下，该系统单位脉冲响应函数为：

$$h(t)=\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t, t\geq 0$$ （2 分）

当 $0\leq t\leq t_0$ 时，由杜哈梅积分，得：

$$\begin{aligned}u(t)&=\int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau\\&=\int_0^t\frac{3F_0}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau\\&=\frac{3F_0}{m\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t)\\&=\frac{F_0}{3k}(1-\cos 3\sqrt{\frac{k}{m}}t)\end{aligned}$$

（5 分）

当 $t>t_0$ 时，由杜哈梅积分，得

$$\begin{aligned}u(t)&=\int_0^{t_0} h(t-\tau)f(\tau)d\tau+\int_{t_0}^t h(t-\tau)\bullet 0d\tau\\&=\int_0^{t_0}\frac{3F_0}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau\\&=\frac{3F_0}{m\omega_n^2}(\cos\omega_n(t-t_0)-\cos\omega_n t)\\&=\frac{F_0}{3k}(\cos 3\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0)-\cos 3\sqrt{\frac{k}{m}}t)\end{aligned}$$

（5 分）

本题分数	15
得　分	

四、如图 5 所示等截面均质刚杆质量为 m，长度为 L，$k_1=4k$，$k_2=9k$，C 为刚杆质心。以图示坐标 u(t)和 θ(t)，并在微振动情况下，（1）建立系统运动微分方程（10 分）；（2）给出系统频响函数矩阵（5 分）。说明：u(t)和 θ(t)分别为刚杆质心垂直方向位移和刚杆绕质心转角。

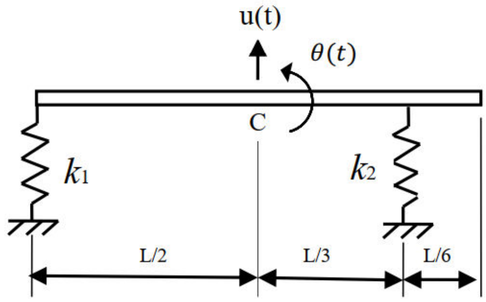


图 5

解：

由牛顿第二定律和动量矩定理，得

$$m\ddot{u}(t)=-k_1(u(t)-\frac{L}{2}\theta(t))-k_2(u(t)+\frac{L}{3}\theta(t))$$
$$=-4k(u(t)-\frac{L}{2}\theta(t))-9k(u(t)+\frac{L}{3}\theta(t))$$
$$\frac{1}{12}mL^2\ddot{\theta}(t)=k_1(u(t)-\frac{L}{2}\theta(t))\frac{L}{2}-k_2(u(t)+\frac{L}{3}\theta(t))\frac{L}{3}$$
$$=4k(u(t)-\frac{L}{2}\theta(t))\frac{L}{2}-9k(u(t)+\frac{L}{3}\theta(t))\frac{L}{3}$$

（8 分）

写出矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}mL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 13k & kL \\ kL & 2kL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

（2 分）

系统动刚度矩阵为：

$$Z(\omega)=K-\omega^2M=\begin{bmatrix} 13k-m\omega^2 & kL \\ kL & 2kL^2-\frac{1}{12}mL^2\omega^2 \end{bmatrix}$$

系统频响函数矩阵为：

$$H(\omega)=Z^{-1}(\omega)=\frac{1}{\det Z(\omega)}\begin{bmatrix} 2kL^2-\frac{1}{12}mL^2\omega^2 & -kL \\ -kL & 13k-m\omega^2 \end{bmatrix},\omega\neq\omega_r,r=1,2$$

（5 分）

其中：

$$\det Z(\omega)=(13k-m\omega^2)(2kL^2-\frac{1}{12}mL^2\omega^2)-k^2L^2$$

$$\omega_1=2\sqrt{3\frac{k}{m}}，\quad \omega_2=5\sqrt{\frac{k}{m}}$$

说明：此题用其他方法建立运动微分方程评分标准类似。

本题分数	25
得　　分	

五、图 6 所示系统，$m_1=m_2=1$ kg，$k_1=3$ N/m，$k_2=2$ N/m，$c_1=0.6$ N·s/m，$c_2=0.4$ N·s/m，$f_1(t)=\bar{f}_1\sin(\omega t)$，$f_2(t)=\bar{f}_2\sin(\omega t)$。（1）建立系统运动微分方程（5 分）；（2）求系统的固有频率和固有振型，作出固有振型图，写出系统第一阶固有振动表达式（10 分）；（3）当 $\bar{f}_1=$ 0.01 N 时，试用模态叠加法求使系统稳态响应恰为系统第一阶固有振动时的激振频率 ω 和激振力幅值 $\bar{f}_2$，并给出这种状态下系统稳态响应的表达式（10 分）。

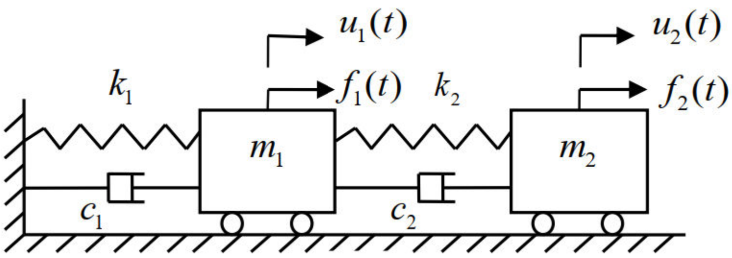


图 6

解：系统运动微分方程为：

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{bmatrix}\sin\omega t \qquad (1) \qquad （4 分）$$

代入数值后，有

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1.0 & -0.4 \\ -0.4 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{bmatrix}\sin\omega t \qquad (2) \qquad （1 分）$$

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 1.0 & -0.4 \\ -0.4 & 0.4 \end{bmatrix}, K=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

显然 $C=0.2K$，所以该系统为比例阻尼系统。(或在解耦后说明为比例阻尼系统)　（1 分）

为求系统固有频率和固有振型，有

$$(K-\omega^2 M)\ \varphi=0$$

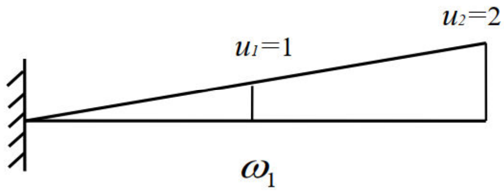
即：

$$\begin{bmatrix} 5-\omega^2 & -2 \\ -2 & 2-\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad （2 分）$$

解得两阶固有频率为：

$$\omega_1=1\text{rad/s} \qquad （1 分）$$

$$\omega_2=\sqrt{6}\text{rad/s} \qquad （1 分）$$



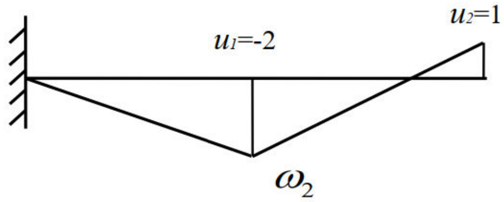
第一阶模态振型图

两阶固有振型为：

$$\begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad （1 分）$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad （1 分）$$

固有振型只要比例关系对均算正确。



第二阶模态振型图

两阶振型图如右图所示。（每个振型图 1 分）

系统第一阶固有振动为：

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \sin t, \alpha \neq 0$$ （1 分）

固有振型矩阵为：

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$ (1 分)

依题意，作坐标变换：

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$ (1 分)

代入方程（2）,并左乘 Φ^T 得解耦后的方程为：

$$5\ddot{q}_1(t) + \dot{q}_1(t) + 5q_1(t) = (\bar{f}_1 + 2\bar{f}_2)\sin \omega t$$
$$5\ddot{q}_2(t) + 6\dot{q}_2(t) + 30q_2(t) = (-2\bar{f}_1 + \bar{f}_2)\sin \omega t$$ (2 分)

要使系统稳态响应恰为第一阶固有振动，需有 $q_2(t) = 0$ 和 $\omega = \omega_1$

即：

$(-2\bar{f}_1 + \bar{f}_2) = 0$

所以

$\bar{f}_2 = 2\bar{f}_1 = 0.02\text{N}$ (2 分)

激振频率 $\omega = \omega_1 = 1\text{rad}/s$ (1 分)

此时有：

$5\ddot{q}_1(t) + \dot{q}_1(t) + 5q_1(t) = (\bar{f}_1 + 2\bar{f}_2)\sin \omega_1 t = 0.05\sin t$ (1 分)

设稳态响应 $q_1(t) = A\sin(\omega_1 t + \psi)$

激振频率等于固有频率时，

$$A = \frac{0.05}{1 \times 1} = 0.05$$

$$\psi = -\frac{\pi}{2}$$

$$q_1(t) = 0.05\sin(t - \frac{\pi}{2})$$

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} q_1(t) = 0.05 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \sin(t - \frac{\pi}{2})$$ （单位：m）

(2 分)