二〇二〇~二〇二一学年 第二学期《线性代数》考试试题

考试日期：2021年07月04日　　试卷类型：A卷　　试卷代号：080027

班号　　学号 [redacted]　　姓名 [redacted]

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

本题分数	20分
得　分	

一、填空题（每空2分）

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(6,\ a+1,\ 3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(a,\ 2,\ -2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,\ 1,\ 0)^T$，当 a 满足条件：____________时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

2. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的长度分别为 **2** 和 **3**，则向量 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 的内积 $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=$____________.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则 $P^{10}AP^{11}=$____________.

4. 已知 A 是三阶方阵，且 $|A|=2$，则 $\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-\frac{1}{2}A^*\right|=$____________.

5. 设三阶矩阵 A 满足 $|A+E|=|2A+E|=|3A+E|=0$，则 A 的所有特征值是____________，$|4A+E|=$____________.

6. 已知三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ 的系数矩阵 A 的特征值为 $\mathbf{1,\ -3,\ -2}$，则该二次型的规范形为____________，且当 t 满足____________时，矩阵 $A-tE$ 是正定矩阵，其中 E 是单位矩阵.

7. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$____________，将 A^{-1} 表示成初等矩阵的乘积：________________________.

本题分数	9分
得　分	

二、选择题（每题3分）

1. 下面叙述中，有几个是正确的结论？（　　）

(1) $A^2=O$ 可以推出 $|A|=0$　　(2) $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$

(3) $A^2 - E^2 = (A-E)(A+E)$

(4) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2. 下面叙述中，哪个是正确的结论？（　　）

A. 一个可逆矩阵经过任何的初等变换后得到的仍然是可逆矩阵.

B. 一个不可逆矩阵有可能等价于单位矩阵.

C. 一个不可逆矩阵经过适当的初等变换可以变成可逆矩阵.

D. 一个可逆矩阵经过适当的初等变换可以变成不可逆矩阵.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 是非齐次线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的两个不同解向量，则正确的是：（　　）

A. $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 是 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的一个解向量.

B. $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 是 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一个解向量.

C. $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}$ $(k+l=1)$是 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一个解向量.

D. $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}$ $(k+l=1)$是 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的一个解向量.

本题分数	32 分
得　分	

三、计算题（每题 8 分）（要求写出计算过程）

1. 求行列式$|A|=\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}$的值.

设三阶矩阵A，B满足$AB=A+B$，且$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&5\\0&1&4\end{pmatrix}$，求$A+B$.

3. 在向量空间 R^3 中，已知两组基：$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)^T$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)^T$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,0,1)^T$ 及 $\boldsymbol{\eta}_1=(2,0,-1)^T$，$\boldsymbol{\eta}_2=(1,2,-2)^T$，$\boldsymbol{\eta}_3=(2,1,1)^T$.

(1) 求由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵.

(2) 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 下的坐标为 $(1,1,-1)^T$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的坐标

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$，则当 k 取何值时，A 可对角化？

题分数	13 分
分	

四、已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda, \end{cases}$$

足什么条件时，方程组无解、有唯一解和无穷解？在有无穷解时，求

14 分

五、已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3.$$

（1）求出该二次型的系数矩阵 A；

换法将其化为标准形，并求出所用的正交变换及二次型的标准形

六、证明题

1.（5分）若A是对称矩阵，B是反对称矩阵，问$AB-BA$是否为对称矩阵？给出证明过程.

2. (7 分)已知 $a^2+b^2+c^2=1$，且 a，b，c 都是实数，证明：

矩阵 $A=\begin{bmatrix}1-a^2 & -ab & -ac\\ -ab & 1-b^2 & -bc\\ -ac & -bc & 1-c^2\end{bmatrix}$ 的秩为 2．（提示：可设 $\boldsymbol{\alpha}=(a,b,c)^T$，则 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=1$.）

1. $a \neq \frac{3}{2}$ 且 $a \neq 4$

2. -1

3. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

4. 4.

5. $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$. -1.

6. $f(y_1,y_2,y_3)= y_1^2-y_2^2-y_3^2$, $t<-3$

7. $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1. B　2. A　3. C

三 1. $|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & a^2-1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & a^2-1 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix}$

$$= -a \begin{vmatrix} 0 & a^2-2 & 2 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -a \cdot (-1)^{2+1} \cdot a \begin{vmatrix} a^2-2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \cdot (a^2-2-2)$$

$$= a^2(a^2-4).$$

$AB=A+B$

$(A-E)B=A$

$B=(A-E)^{-1}A.$

$|A-E|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&5\\0&0&3\end{vmatrix}=6.$

$\therefore A-E$ 可逆.

$(A-E)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{5}{6}\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6&0&0\\0&3&-5\\0&0&2\end{bmatrix}$

$B=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6&0&0\\0&3&-5\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&5\\0&1&4\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}12&0&0\\0&4&-5\\0&2&8\end{bmatrix}$

$A+B=\begin{bmatrix}4&0&0\\\frac{1}{6}&\frac{8}{3}&\frac{25}{6}\\0&\frac{4}{3}&\frac{16}{3}\end{bmatrix}$

3. 在向量空间中……

(1) 由已知，$\begin{cases} \eta_1 = 3\varepsilon_1 - \varepsilon_3 \\ \eta_2 = 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 \\ \eta_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \end{cases}$

∴ 过渡矩阵为 $C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(2) 因基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基 η_1, η_2, η_3 的坐标变换公式为 $X = CY$

有 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

即 α 在基……下坐标为 $(5, 1, -4)^T$

三、4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} & & \end{bmatrix}$，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 1\\ -2 & \lambda-4 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-k\end{vmatrix}=(\lambda-k)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

$\therefore k,2,3$ 是 A 的3个特征值.

当 $k\neq2$，且 $k\neq3$ 时，A 有3个不同的特征值，可相似对角化.

若 $k=2$，$r(2E-A)=r\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=2$，此时，$n-r(2E-A)=1$，不能对角化.

若 $k=3$，$r(3E-A)=r\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=1$，此时，$n-r(3E-A)=2$，有2个无关的特征向量，

$\therefore$ 可对角化.

综上，$k\neq2$ 时.

四. $[A \vdots b] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & \vdots & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \vdots & \lambda \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & \vdots & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda-5 \end{bmatrix} \to$

当$\lambda \neq 5$时，无解、

当$\lambda = 5$时，$r(A) = r(A \vdots b) < 4$，有无穷解.

此时 $A \vdots b \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \vdots & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \vdots & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

通解为 $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0\right)^T + k_1\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, 0\right)^T + k_2\left(-\frac{6}{5}, \frac{7}{5}, 0, 1\right)^T$.

（k_1, k_2为任意常数）

五.(1) $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$

(2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$

$\therefore$ 1, 1, 4是A的3个特征值.

解$(E-A)x=0$，即$\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，得基础解系$\alpha_1=(-1,1,0)^T$，$\alpha_2=(-1,0,1)^T$.

解$(4E-A)x=0$，即$\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$，得基础解系为$\alpha_3=(1,1,1)^T$.

当$\lambda=1$时，α_1，α_2不正交，令$\beta_1=(-1,1,0)^T$.

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

再对β_1，β_2，α_3单位化，

得$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\gamma_3=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

则经正交变换$x=[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]y$，有$x^TAx=y^T\Lambda y=y_1^2+y_2^2+4y_3^2$

六、由题，$A^T=A$，$B^T=-B$，

$$(AB-BA)^T=(AB)^T-(BA)^T$$
$$=B^TA^T-A^TB^T$$
$$=-BA-A(-B)$$
$$=AB-BA$$

∴是对称矩阵.