南京航空航天大学

二〇二〇～二〇二一学年第 1 学期

《高等数学 I（1）》期末考试试题

一、填空（每空格 3 分）

1. 设曲线 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\int_0^u e^{-t^2}dt \\ y=\int_0^u \sin(u-t)dt \end{cases}$ 确定，则 $y'(0)=$____.

2. 曲线 $y=\ln\left(1-x^2\right)$ 上相应于 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 的一段弧长为__________.

3. 半球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 和旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 所围闭曲面在 xoy 面上投影部分的面积为________.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{\frac{1}{n}}e^{\frac{2}{n}}\cdots e^{\frac{n}{n}}}=$__________.

5. 已知三点 $A(1,0,1), B(2,1,1), C(1,1,1)$，则 ΔABC 底边 AC 上高为_____.

6. 设有二阶连续导数的函数 $y=f(x)>0, f(2)=\dfrac{1}{2}, f'(2)=0$，且 $\int_0^1 x^2 f''(2x)dx=0$，则 $y=f(x)$ 与 $x=0$，$x=2$ 所围平面图形的面积 $S=$_______.

7. 已知 $f(x)$ 有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right]=2$，则 $f(0)=$_____，$f'(0)=$_____.

二、选择题（每题 3 分）

1. 当 $x \to 0$ 时，$bx - \sin x$ 与 $\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt$ 是等价无穷小，则( )

$A.a=4,b=1$ $B.a=1,b=4$ $C.a=-4,b=1$ $D.a=4,b=-1$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，则下列说法正确的是( )

①若 $f''(x)>0$，则 $\int_0^1 f(x)dx > f\left(\frac{1}{2}\right)$；

②若 $f''(x)>0$，则 $\int_0^1 f(x)dx < f\left(\frac{1}{2}\right)$；

③若 $f''(x)<0$，则 $\int_0^1 f(x)dx > f\left(\frac{1}{2}\right)$；

②若 $f''(x)<0$，则 $\int_0^1 f(x)dx < f\left(\frac{1}{2}\right)$；

A. ①④ B. ②③ C. ②④ D. ①③

3. 下列反常积分收敛的是( )

A. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+2x}}dx$ B. $\int_0^1 \frac{\sqrt{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[3]{x}}dx$

C. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x}dx$ D. $\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^3}dx$

三、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)\ln(3+t^2)dt}{\sin^2 x}$.

四、计算题（每题 5 分）

1. $\int \frac{1}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} dx$

2. $\int x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx$

3. $\int \frac{x}{x^2+4x+5} dx$

4. 若函数 $f(x) = xe^x + \frac{x\left(e^x + e^{-x}\right)}{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\int_{-1}^{1} f(x)dx$，求

$\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$

五、已知一直线通过$x+y-z-8=0$与直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$的交点，且与$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$垂直相交，求该直线的方程.

六、曲线$y=\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$绕x轴旋转一周所得的旋转体，将它在$x=0, x=\xi(\xi>0)$之间部分的体积记为$V(\xi)$，且$V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)(0<a<\xi)$，求$a$为多少？

七、设 $x\in R$, 求 $f(x)=\int_0^1|2x-t|dt$ 及 $f(x)$ 的极值.

八、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且

$f(0)=f(1)=\int_0^1 f(x)dx$. 证明：

(1) 方程 $f(x)=\int_0^1 f(x)dx$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根；

(2) 存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

（注：本章试卷由学支教员李融冰整理，答案仅供参考，如遇答案有误，请和学支教员部成员联系，学支会及时进行订正。感谢您的使用）

一. 填空

1. $\frac{1}{e}-1$

解析：$x=\int_1^{x+y}e^{t^2}dt$，$e^{(x+y)^2}\cdot(1+y')-1=0$．$y(0)=1$

$e(1+y')-1=0$，$y'(0)=\frac{1}{e}-1$

3. 3π.

解析：半球面以$(0,2)$为球心，取上半球，

$x^2+y^2+(z-2)^2=4$，$z\geq 2$

$$\begin{cases} z=2+\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases} \Rightarrow 2+\sqrt{4-r^2}=\sqrt{3r^2}$$

得：$r^2=3$

即投影部分为：$x^2+y^2=3$

$S=3\pi$

5. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

解析：$\frac{1}{2}AC\cdot AB\cdot\sin A=\frac{1}{2}AC\cdot h$

$h=AB\cdot\sin A$.

$\because AB=AC=BC=\sqrt{2}$

$\therefore \triangle ABC$ 等边$\triangle$

$\therefore h=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

6. 2

7. $-1, 2$

二. 选择

1. D

3. A

三. 解：令$x^2-t^2=u$.

$$F(x)=\int_{x^2}^{0}\sqrt{x^2-u}\cdot f(u)\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x^2-u}}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)du$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x^2)\cdot 2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{4x^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0}=\frac{1}{4}$$

四. 1. 解：令$\sqrt{x}=t$

$$\text{原式}=\int\arctan t\,dt^2$$

$$=t^2\arctan t-\int t^2\cdot\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=t^2\arctan t-\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$=t^2\arctan t-t+\arctan t+C$$

$$=x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+C$$

2. 解：令 $\sqrt{e^x-1}=t$，$x=\ln(t^2+1)$，$dx=\frac{2t}{t^2+1}dt$

则：$I=\int \frac{\ln(1+t^2)\cdot 1+t^2}{t}\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt$

$=2\int \ln(1+t^2)dt$

$=2\left[t\ln(1+t^2)-\int t\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt\right]$

$=2t\ln(1+t^2)-4\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$

$=2t\ln(1+t^2)-4t+4\arctan t+C$

$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$

3. 解：$I=\int\frac{x+1}{\sqrt{4-4(x-\frac{1}{2})^2}}dx$

$=\int\left[\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{4-4(x-\frac{1}{2})^2}}+\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{4-4(x-\frac{1}{2})^2}}\right]dx$

$=-\frac{1}{4}\sqrt{4-4(x-\frac{1}{2})^2}+\frac{3}{4}\arcsin(x-\frac{1}{2})+C$

$=\frac{3}{4}\arcsin(x-\frac{1}{2})-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+C$

4. 解：$I=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}dx$

令 $x=1+\sin t$，$dx=\cos t\,dt$

则 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cdot\cos t\cdot\cos t\,dt$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$

$=2\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{\pi}{2}$

5. 解：令 $x=\frac{\pi}{2}-t$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$

$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,dx}{\sin x+\cos x}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t\,dt}{\sin t+\cos t}\right)$

$=\frac{\pi}{4}$

五. 解：L的方向向量为：$(3,2,-1)$

过中心与L垂直的平面方程为：

$\begin{cases}3(x-2)+2(y-1)-8(z-3)\\ \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}\end{cases}$

交点：$\begin{cases}x=2\\ y=3\\ z=-1\end{cases}$ $(2,3,-1)$

∴所求直线过 $P(2,3,-1)$ 和 $Q(2,1,3)$，$\overrightarrow{PQ}=(0,-2,4)$

∴由两点式：$x=2$，$\frac{y-3}{1-3}=\frac{z+1}{3+1}$ 即 $\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{4}$

∴所求直线方程为：$\begin{cases}x=2\\ 2y+z-5=0\end{cases}$

六. 解：由题意：$\int_0^1 (ax^2+2x)dx=2$

$\Rightarrow \frac{a}{3}+1=2 \quad \Rightarrow a=3$

$\therefore V=2\pi\int_0^1 x(3x^2+2x)dx$

$=2\pi\cdot\left[\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^1$

$=2\pi\times\frac{17}{12}$

$=\frac{17}{6}\pi$

七. 解：$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时.

$f(x)=\int_x^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt$

$=2-\sin x-\cos x$

$x\in(\frac{\pi}{2},\pi]$ 时.

$f(x)=-\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt$

$=\sin x-\cos x$

当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时. $f'(x)=\sin x-\cos x$

令 $f'(x)=0$. $x=\frac{\pi}{4}$ 为极小值点

当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi]$ 时. $f'(x)=\cos x+\sin x$

令 $f'(x)=0$，$x=\frac{3}{4}\pi$ 为极大值点.

$\because f(0)=1$，$f(\frac{\pi}{4})=2-\sqrt{2}$，$f(\frac{\pi}{2})=1$

$f(\frac{3}{4}\pi)=\sqrt{2}$，$f(\pi)=1$

$\therefore$ 最小值为 $2-\sqrt{2}$，最大值为 $\sqrt{2}$.

八. 解：(1) 令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

$P(x)=\int_a^x F(t)dt$

$\because F(a)=0$

$F(b)=\int_a^b f(t)dt=0$

$\therefore F(a)=F(b)=0$

又 $\because \int_a^b xf(x)dx=\int_a^b x\,d(F(x))$

$=xF(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)dx$

$=bF(b)-aF(a)-[P(b)-P(a)]$

$=P(b)-P(a)$

$=0$

$\therefore P(a)=P(b)$

由罗尔定理：$\exists\,\xi\in(a,b)$，使得 $P'(\xi)=0$ 即 $F(\xi)=0$.

即 $\int_a^{\xi} f(t)dt=0$

(2) $\because F(a)=F(b)=F(c)=0$

由罗尔定理：$\exists\,\xi_1,\xi_2$，使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$

即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$