南京航空航天大学

二〇二〇 ~ 二〇二一学年 第一学期 《概率论与数理统计 II》考试试题

考试日期：20年11月28日 试卷类型：A 试卷代[redacted]

[redacted]

题号	一	二	三	四	[redacted]		总分
得分							

本题分数	21
得　分	

一、填空题（每题 3 分）

1. 设 A,B,C 为三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$，则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为________.

2. 从1,2,3,4,5 五个数中任取 3 个不同的数排成三位数，则所得三位数为偶数的概率为________.

3. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.3, & 1\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$，则 $P\{X=3\}=$ ________.

4. 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=$________.

5. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta\\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\le x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，其中参数 $\theta(0<\theta<1)$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=$________.

6. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $b(n,p)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差．若 $\bar{X}-kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量，则 $k=$________.

7. 设总体 $X\sim N(\mu,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 是来自总体 X 的一组简单随机样本．若在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验 $H_0:\mu=0$，$H_1:\mu\neq 0$，得到拒绝域为 $W=\{|\bar{X}|\ge C\}$，则 $C=$________.

本题分数	21
得　分	

二、单项选择题（每题 3 分）

1. 设 A,B 为随机事件，则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是________.

(A) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；　　(B) $P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)$；

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$；　　(D) $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$.

2. 设随机变量 X 服从方差为 4 的泊松分布，则 $P\{X\geq 1\}=$________.

(A) $1-e^{-2}$；　　(B) $1-e^{-4}$；　　(C) $1-2e^{-2}$；　　(D) $1-4e^{-4}$.

3. 设随机变量 X,Y 独立同分布，X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数为________.

(A) $F(x)F(y)$；　　(B) $F^2(x)$；

(C) $1-[1-F(x)][1-F(y)]$；　　(D) $1-[1-F(x)]^2$.

4. 设随机变量 X 与 Y 的相关系数为 0.25，且 $DX=4,DY=9$，则 $D(5X-Y+15)=$________

(A) 94；　　(B) 101.5；　　(C) 106；　　(D) 106.5.

5. 设随机变量 X 与 Y 均服从标准正态分布，则________.

(A) $X+Y$ 必服从正态分布；　　(B) X^2+Y^2 必服从 χ^2 分布；

(C) X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布；　　(D) 以上结论都正确.

6. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中参数 μ,σ^2 未知，则总体方差 σ^2 的双侧置信区间长度 L 与置信度 $1-\alpha$ 的关系是________.

(A) 当 $1-\alpha$ 变大时，L 增大；　　(B) 当 $1-\alpha$ 变大时，L 减小；

(C) 当 $1-\alpha$ 变大时，L 不变；　　(D) 当 $1-\alpha$ 变大时，L 变化情况未定.

7. 设总体 X 的分布律为 $P\{X=1\}=\theta$，$P\{X=2\}=2\theta$，$P\{X=3\}=1-3\theta$，现检验 $H_0:\theta=0.1$，$H_1:\theta=0.2$．已知 X_1,X_2,X_3 是来自总体的简单随机样本，且拒绝域为 $\{X_1=1,X_2=1,X_3=3\}$，则犯第二类错误的概率为________.

(A) 0.007；　　(B) 0.016；　　(C) 0.984；　　(D) 0.968.

本题分数	30
得　分	

三、计算（每题6分）

1. 设甲、乙、丙三人同时独立的向同一目标各射击一次，命中率分别是$\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3}$，现已知目标被击中，求它是被乙击中的概率.

2. 设随机变量X的分布律为$P\{X=k\}=\frac{1}{2^k},k=1,2,3,\cdots$，$Y$表示$X$被3除的余数，求$EY$.

本题分数	10
得　分	

六、设总体 X 的概率密度为 $f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\ge\mu\\ 0, & x<\mu\end{cases}$，其中 μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数．$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本．

(1) 求 A；(2) 求 σ^2 的最大似然估计量．

注：可能用到的数据如下，请选择正确的数据．

$\Phi(1.28)=0.9$, $\Phi(1.645)=0.95$, $\Phi(1.96)=0.975$

$t_{0.025}(9)=2.2622$, $t_{0.025}(10)=2.2281$, $t_{0.025}(24)=2.0639$, $t_{0.025}(25)=2.0595$,

本题分数	9
得　分	

四、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}, & 0<x<2 \\ \frac{1}{x^2}, & x\geq 2 \\ 0, & 其它 \end{cases}$.

(1) 求 X 的分布函数 $F(x)$；(2) 求 $Y=F(X)$ 的概率密度.

本题分数	9
得　分	

五、设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} 8xy, & 0<x<y<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$,

求：(1) $P\{X+Y>1\}$；(2) X 的边缘概率密度 $f_X(x)$；

(3) 条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

3. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} 6y, & 0<x<1,\ 0<y<1-x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

4. 某单位设置一台电话总机，共有 200 个分机. 设每个电话分机是否使用外线通话是相互独立的，且每时刻一个分机有 5% 的概率要使用外线通话. 问总机至少需要多少条外线才能以不低于 90% 的概率保证每个分机要使用外线时可供使用？

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{25}$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差. 若已知 $P\{\overline{X}>\mu+kS\}=0.95$，求 k 的值.

一、1. $\frac{5}{12}$ 2. $\frac{2}{5}$ 3. 0.7 4. $\frac{1}{2}$ 5. $2X-\frac{1}{2}$ 6. 1 7. $\frac{Z_{0.025}}{\sqrt{10}}$

二、1. B 2. B 3. D 4. A 5. C 6. A 7. C

三、1.

解：令A表示"目标被击中"，B_i（i=甲，乙，丙）表示"[illegible]人击中目标"：

$$P(B_乙|A)=\frac{P(B_乙A)}{P(A)}=\frac{P(A|B_乙)P(B_乙)}{P(B_甲)+P(B_乙)+P(B_丙)-P(B_甲)P(B_乙)-P(B_甲)P(B_丙)-P(B_乙)P(B_丙)+P(B_甲)P(B_乙)P(B_丙)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}=\frac{9}{16}.$$

$= \frac{1}{3}$

2. $P\{Y=0\} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \cdots + \frac{1}{2^{3k}} = \frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2^3}} = \frac{1}{7}$

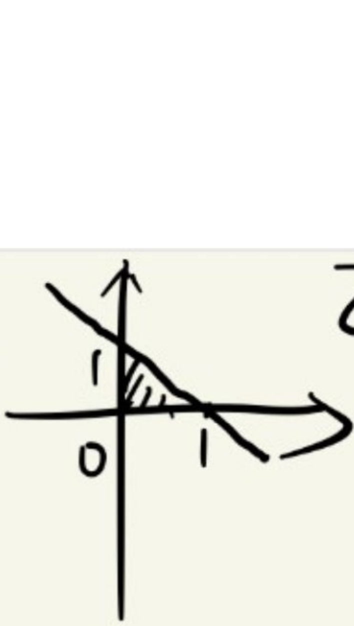
$P\{Y=1\} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{3k-2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^3}} = \frac{4}{7}$

$P\{Y=2\} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^{3k-1}} = \frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^3}} = \frac{2}{7}$

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

$EY = 1\times\frac{4}{7} + 2\times\frac{2}{7} = \frac{8}{7}$

3.



Z的分布函数 $F(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$.

当 $z<0$, $F(z)=0$

当 $z\ge 1$, $F(z)=1$

当 $0\le z<1$, $F(z)=\int_0^z dy\int_0^{z-y}6y\,dx$

$=\int_0^z 6y(z-y)\,dy$

$=z^3$.

$$f_Z(z)=\begin{cases}3z^2, & 0\le z<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

2.【学解】 $X_i=\begin{cases}1,第i个分机使用外线通话\\0,第i个分机不使用外线通话\end{cases}$

4.

$\therefore X_i\sim b(1,0.05)\ \therefore Y=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\xrightarrow{d}N(0,1)$

$\therefore P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\leqslant M\right)=P\left(Y\leqslant\dfrac{M-200*0.05}{\sqrt{200*0.05*0.95}}\right)\geqslant 0.9$

$\therefore \dfrac{M-200*0.05}{\sqrt{200*0.05*0.95}}\geqslant z_{0.1}=\dfrac{1.28+1.29}{2}=1.285\ \therefore M\geqslant 13.96\ \therefore M\geqslant 14$

故至少准备 14 根外线。

5. $P\left\{ \frac{\bar{X}-\mu}{S} \cdot \sqrt{25} > \sqrt{25}\,k \right\} = 0.95$

$$\sqrt{25}\,k = t_{0.05}(24)$$

$$k = \frac{t_{0.05}(24)}{5}$$

四. (1). $F(x)=P\{X\le x\}$.

当 $x<0$, $F(x)=0$

当 $0\le x<2$, $F(x)=\int_0^x \frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}x$

当 $x\ge 2$, $F(x)=\int_0^2 \frac{1}{4}dx+\int_2^x \frac{1}{x^2}dx=1-\frac{1}{x}$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{4}x, & 0\le x<2\\ 1-\frac{1}{x}, & x\ge 2\end{cases}$$

(2). Y的分布函数 $F(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(x)\le y\}$.

当 $y<0$, $F(y)=0$

当 $y\ge 1$, $F(y)=1$

当 $0\le y<1$ 时, $F(y)=y$.

$$f(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

五. (1) 

$$P\{X+Y>1\}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{1-y}^{y}8xy\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}8y^2-4y\,dy=\frac{5}{6}.$$

(2) $f_X(x)=\int_x^1 8xy\,dy=\begin{cases}4x-4x^3, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

(3) 当 $0<x<1$ 时，$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-x^2}, & 0<x<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

解 (1) 由$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\sigma^2)\mathrm{d}x = 1$，得

$$1 = \int_{\mu}^{+\infty} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = A\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = A \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}A,$$

所以 $A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(2) 记 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的观测值，则似然函数为

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\sigma^2)$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant \mu, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

取对数得

$$\ln L(\sigma^2) = \frac{n}{2}\ln\frac{2}{\pi} - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

$$\frac{\mathrm{d}[\ln L(\sigma^2)]}{\mathrm{d}\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

令$\frac{\mathrm{d}[\ln L(\sigma^2)]}{\mathrm{d}\sigma^2} = 0$，得 σ^2 的最大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，所以 σ^2 的最大似然估计量为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2.$$