一、填空(每空3分)

本题分数	24
得　分	

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=$ ________。

2. 若函数 $f(x,y)=x^2y+e^{xy}$，$M(1,1)$，则 $df|_M=$ ________。

3. 若函数 $f(x,y,z)=xyz$，则 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,f)=$ ________。

4. 设 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，则 $\iint\limits_{\Sigma}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+xyz\right)dS=$ ________。

5. 设 L 为 $x^2+y^2=1$ 正向闭曲线，则曲线积分 $\oint_L\dfrac{ydx+xdy}{x^2+y^2}=$ ________。

6. 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $x=2$ 时收敛，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^na_n$ ________。（填条件收敛、绝对收敛、发散）

7. 微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为 ________。

8. 微分方程 $(1-x^2)y''-xy'=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$ 的特解为 ________。

本题分数	9
得　　分	

二、选择题（每题 3 分）

1. 设 (x_0, y_0) 是函数 $f(x,y)$ 定义域内的一点，则在点 (x_0, y_0) 处，下列命题正确的是（　　）

A. 若函数 $z=f(x,y)$ 作为任一变量 x 或 y 的一元函数都连续，则 $z=f(x,y)$ 必连续.

B. 若函数 $z=f(x,y)$ 不连续，则 $z=f(x,y)$ 偏导数必不存在.

C. 若函数 $z=f(x,y)$ 可微，则 $z=f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 沿任一方向的方向导数存在.

D. 若函数 $z=f(x,y)$ 可微，则必存在一阶的连续偏导数.

2. 若 $\oiint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\oiint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$ 等式成立，则 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是光滑闭曲面 Σ 的（　　）

A. 法向量的方向余弦.　　　　B. 指向外侧的法向量的方向余弦.

C. 指向内侧的法向量的方向余弦.　　　　D. Σ 上曲线切向量的方向余弦.

3. 微分方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的一个特解应具有形式（　　）

A. ax^2+bx.　　　　B. $(ax^2+bx)e^{2x}$.

C. $(ax+b)e^{2x}$.　　　　D. $ax+b$.

三、计算题（每题 8 分）

本题分数	48
得　　分	

1.求函数 $f(x,y)=x^3+2x^2+y^2-2xy$ 的极值。

2． 判断下列级数是收敛还是发散？并说明理由。（每题 4 分）

（1） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$　　（2） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$

3. 判断下列级数是绝对收敛、条件收敛还是发散？并说明理由。（每题 4 分）

（1） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\frac{2}{n})^{n^2}$　　（2） $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln n}$

[redacted]

4. 求$f\left(x\right)=\ln(2+x)$的麦克劳林展开式。

5. 计 算 曲 面 积 分 $\iint\limits_{\Sigma}(z-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2+xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其 中 Σ 为 下 半 球 面 $x^2+y^2+z^2=1(z\leq 0)$，取下侧。

6. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}4n^2x^{2n-1}$的收敛域与和函数。

[redacted]

5.

四、综合应用题（共 19 分）

本题分数	5
得　　分	

1.证明：设函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在单连通域 G 内具有一阶连续偏导数，若在 G 内，$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，即 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$. 则在 G 内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$。

本题分数	6
得　　分	

2. 设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$，点 $M(x,y,z)\in\Sigma$, Π 为 Σ 在点 M 处的切平面，$d(x,y,z)$ 为原点到平面 Π 的距离，求 $\iint\limits_{\Sigma} d(x,y,z)\mathrm{d}S$。

本题分数	8
得　　分	

3. 设曲线积分 $\int_L [4f(x)-(2x+3)\sin x]y\mathrm{d}x-f'(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $f(x)$及其导函数 $f'(x)$过原点，且 $f'(x)$连续，求 $f(x)$。

一、填空.

1、$-\frac{1}{4}$　2、$(2+e)dx+(1+e)dy$

3、0　4、4π

5. 0　6. 绝对收敛

7. $y=(x+C)\cos x$ 其中C为任意常数

8. $y=\arcsin x$

二、选择

1、C 2、A 3.B

三、计算:

1. $f(x,y)=x^3+2x^2+y^2-2xy$

$$\begin{cases} f'_x=3x^2+4x-2y=0 \\ f'_y=2y-2x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''_{xx}=6x+4 \\ f''_{xy}=-2 \\ f''_{yy}=2 \end{cases}$$

① $(0,0)$时 $\Delta=-4<0$

$A=4>0$

为极小值点

② $(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$时 $\Delta=4>0$

不为极值

$\therefore$ $f(x,y)$ 极小值为0 极小值点 $(0,0)$

2、(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n\cdot n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e} < 1$$

级数收敛

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})\right]$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2}(\frac{1}{n})^2 + o\left((\frac{1}{n})^2\right)\right]\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(\frac{1}{n})^2 + o\left((\frac{1}{n})^2\right)$$

原级数与 $\frac{1}{n^2}$ 同阶 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n})^2$ 收敛,原级数收敛

3. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}$

由莱布尼兹定理：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}e^{n^2\cdot\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{2n}\neq 0$$

级数不条件收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}$ 发散 ∴ 级数不绝对收敛

∴ 级数发散

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2n+2}}{e^{2n}}=e^2>1$$

∴ 发散

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln n}$

由莱布尼兹定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$$

$\frac{1}{\ln n}$ 单调递减

∴ 其条件收敛

4. $f(x)=\ln(2+x)$

其中 $\ln(1+x)$ 的麦克劳林展开式：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \quad -1<x<1$$

$$f(x)=\ln(2+x)=\ln\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$-1<\frac{x}{2}<1 \quad -2<x<2$$

∴ 其麦克劳林展开式为：

$$\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^n}{2^n\cdot n} \quad (-2<x<2)$$

5. $\iint\limits_{\Sigma}(z-x)dydz+(y+y^2)dzdx+(z^2+xy^2)dxdy$

补 Σ_1：$z=0$ $x^2+y^2\le 1$ 取上侧

原式 $=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$

其中 $\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}$ 由高斯公式得

$$\iiint\limits_{\Omega}(2y+2z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}2z\,dxdydz$$

$$=\int_{-1}^{0}2z\iint\limits_{0<x^2+y^2\le 1-z^2}dxdy=-\frac{1}{2}\pi$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}=\iint\limits_{\Sigma_1}xy^2dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}xy^2dxdy=0$$

$\therefore$ 原式 $=-\frac{\pi}{2}$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} 4n^2 x^{2n-1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)^2}{4n^2} = 1 \quad R=1$

当 $x=1$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} 4n^2$ 发散

当 $x=-1$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n-1} 4n^2$ 发散

∴ 收敛域 $(-1,1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2n\cdot 2n\cdot x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(2n x^{2n}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(2n+1)x^{2n} - x^{2n}\right]'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{2n+1}\right)'' - \sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{2n}\right)'$$

$$= \left(\frac{x}{1-x^2}\right)'' - \left(\frac{1}{1-x^2}\right)'$$

$$= \frac{2x(1-x^2)^2 + 4x - 4x^3}{(1-x^2)^4} - \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

四, 1, 格林公式中积分与路径无关.

$Pdx+Qdy$ 是 $u(x,y)$ 的全微分

则等价于 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内处处

成立, 得证

2、π 方程为：

$$2x(X-x)+2y(Y-y)-(Z-z)=0$$

则 $d(x,y,z)=\dfrac{|2x^2+2y^2-z|}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}=\dfrac{z}{\sqrt{1+4z}}$

$$\iint_{\Sigma}\frac{z}{\sqrt{1+4z}}dS$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+4z}}\cdot\sqrt{1+4z}\,dxdy$$

$$=\int_0^1 dr\int_0^{2\pi} r^2\cdot r\,d\theta$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}$$

3、$\frac{\partial(-f'(x))}{\partial x} = -f''(x)$

$$\frac{\partial[(4f(x)-(2x+3)\sin x)y]}{\partial y} = 4f(x)-(2x+3)\sin x$$

$f''(x)+4f(x) = (2x+3)\sin x$

即：$y''+4y = (2x+3)\sin x$

特征方程：$\lambda^2+4=0$

$\lambda_1 = 2i \quad \lambda_2 = -2i$

$y^* = e^{0x}\cdot(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$

$= C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

特解：设 $y = (Ax+B)\cdot\sin x + (Ax+B)\cos x$

$y' = A\sin x + (Ax+B)\cos x + A\cos x + (Ax+B)\cdot(-\sin x)$

$y'' = A\cos x + A\cos x - (Ax+B)\sin x$

$- A\sin x - A\sin x - \cos x\cdot(Ax+B)$

$\Rightarrow A = \frac{2}{3}$ $\quad$ $\therefore f(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

$B = \frac{13}{15}$ $\quad$ $+(\frac{2}{3}x+\frac{13}{15})\sin x + (\frac{2}{3}x+\frac{13}{15})\cos x$

$$C_1 = -\frac{13}{15} \qquad C_2 = \frac{23}{30}$$

$$\therefore f(x) = -\frac{13}{15}\cos 2x + \frac{23}{30}\sin 2x$$

$$+\left(\frac{2}{3}x + \frac{13}{15}\right)\sin x + \left(\frac{2}{3}x + \frac{13}{15}\right)\cos x$$