得分								

一、填空题 （每题 3 分）

1.$P(\bar{A})=0.3$、$P(B)=0.4$，$P(A\bar{B})=0.5$，则

$P(B|A\cup\bar{B})=$__________.

2. 设随机变量 $X\sim U(0,5)$，则关于 t 的方程 $4t^2+4Xt+X+2=0$ 有实根的概率为__________.

3.设随机变量 $(X,Y)\sim N(2,2,1,4,0)$，则 $D(|X-Y|)=$__________.

4.已知随机变量 X 服从期望为 4 的泊松分布，Y 服从期望为 3 的指数分布，X,Y 的相关系数为 0.5，则 $D(2X-3Y+1)=$__________.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是取自正态总体的简单随机样本，$Y_1=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}X_i, Y_2=\frac{1}{3}\sum_{i=7}^{9}X_i$，$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2$，若 $Z=\frac{c(Y_1-Y_2)}{S}$ 服从 t 分布，则 $c=$__________.

. 设总体 X 的分布律为：$P\{X=1\}=\theta, P\{X=2\}=2\theta, P\{X=3\}=1-3\theta$，其中 θ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，对于假设检验问题，$H_0:\theta=0.1$，$H_1:\theta=0.2$，若拒绝域为 $C=\{X_1=1,X_2=2,X_3=3\}$，则该检验犯第二类错误的概率 $\beta=$__________.

设总体 X 服从参数为 θ 的指数分布，X_1,X_2,X_3 为来自总体的简单随机样本，若 $\hat{\theta}=k\min\limits_{1\le i\le 3}\{X_i\}$ 为 θ 的无偏估计量，则 $k=$__________.

本题分数	9
得　分	

二、选择题(每题3分)

1. 设 $0<P(A)<1, P(B)>0, P(B|A)=P(B|\bar{A})$，则必有(　　)

(A) $P(A|B)=P(\bar{A}|B)$　　(B) $P(A|B)\neq P(\bar{A}|B)$

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$

2. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，检验 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$，若在 $\alpha=0.01$ 下拒绝 H_0，则在 $\alpha=0.05$ 下，有(　　)

(A)接受 H_0　(B)拒绝 H_0　(C)可能接受，也可能拒绝 H_0　(D)无法判断

3. 设随机变量 X,Y 相互独立，联合分布函数为 $F(x,y)$，设 $A=\{X\leq x\}$，$B=\{Y>y\}$ 则下列命题正确的是(　　)

(A) $F(x,y)=P(A)P(B)$　　(B) $F(x,y)=P(A)-P(B)$

(C) $F(x,y)=P(A)-P(A)P(B)$　　(D) $F(x,y)=P(B)-P(A)P(B)$

本题分数	30
得　分	

三、计算题(每题6分)

1. 袋子中有 m 枚正品硬币，n 枚次品硬币(次品两面均为国徽)。在袋子中任取一枚，将它投掷 r 次，已知每次都是国徽，求这枚硬币是次品的概率。

2. 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k(x+y)e^{-(x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

，求k的值及$Z=X+Y$的概率密度。

略微模糊的可以参考后面答案反推题干信息

3.某人进行独立投篮，投中的概率为 1/8，如果投中一次就停止，以 X 表示所需投篮的次数，求 X 的分布律及其期望 $E(X)$(要求写出具体计算过程)。

4.一船舶在某海区航行，每遭受一次波浪冲击纵摇角大于 3 度的概率为 1/3，若船舶遭受了 90000 次波浪冲击，问其中有 29500~30500 次纵摇角大于 3 度的概率是多少？(结果用 Φ 函数表示)

5.设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N(1,4)$ 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，随机变量 Y 服从期望为 4 的指数分布，Z 服从区间(-8,8)上的均匀分布，且 Y、Z 相互独立，求 $P\{\min(Y,Z)<D(\sum_{i=1}^{4}(X_i-\overline{X})^2)\}$。

本题分数	10
得 分	

四、设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{x}, 1\le x<e\\ 0, 其他\end{cases};$$

(1)求 k 的值；(2)求 X 的分布函数 $F(x)$；(2)求 $Y=F(X)$ 的概率密度。

本题分数	8
得　分	

五. 某元件寿命服从正态分布，要求其使用寿命均值大于 225 小时，随机抽取 16 只，测得样本均值为 241.5 小时，样本标准差为 98.7 小时。

(1) 问对于显著性水平 $\alpha = 0.05$，能否认为这批灯泡合格？

(2) 求总体方差的置信水平为 0.95 的置信区间.（写出具体推导过程）

本题分数	8
得　分	

六. 设总体 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{(x-\mu)}{2}}, & x \geq \mu \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

其中 μ 为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自 X 的样本，求 μ 的矩估计量和最大似然估计量.

本题分数	14
得　分	

七．设随机变量(X,Y)在抛物线$y^2=x$和$x^2=8y$所围的区域上的均匀分布。(1)求联合概率密度$f(x,y)$；(2)求Y的边缘概率密度$f_Y(y)$；(3)求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$；(4)X,Y是否相互独立？为什么？(5)通过计算说明X,Y是否不相关？(6)求$P\{Y\le\frac{X}{2}\}$。

1. $\underline{\frac{1}{4}}$ 2. $\underline{\frac{3}{5}}$ 3. $\underline{5-\frac{10}{\lambda}}$ 4. $\underline{61}$ 5. $\underline{4}$ 6. ______ 7. $\underline{3}$

1~3 D C C

三 1. 令事件A为硬币是次品

$$P(A)=\frac{\frac{1}{2^r}\times\frac{m}{m+n}}{\frac{1}{2^r}\times\frac{m}{m+n}+\frac{n}{m+n}}=\frac{m}{m+2^r n}$$

三 2. $\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} k(x+y)e^{-(x+y)} dy = \int_0^{+\infty} -k(x+y+1)e^{-(x+y)}\Big|_0^{+\infty} dx$

$$= \int_0^{+\infty} k(x+1)e^{-x} dx$$

$$= -k(x+2)e^{-x}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= 2k = 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$$

$$= \begin{cases} \int_0^z f(x, z-x) dx & , z>0 \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_0^z \frac{1}{2}(x+z-x)e^{-(x+z-x)} & , z>0 \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}z^2e^{-z} & , z>0 \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$$

三、3. $P(X=k)=\left(\frac{7}{8}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{8}\quad(k=1,2,\cdots\cdots)$

$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{7}{8}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{8}$

令 $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k\,x^{k-1}=\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k}\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$

则 $E(X)=\frac{1}{8}S\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{7}{8}\right)^2}=8$

解 我们将船舶每遭受一次波浪冲击看作是一次试验，并假定各次试验是独立的.在 90 000 次波浪冲击中纵摇角度大于 3°的次数记为 X，则 X 是一个随机变量，且有 $X\sim b(90\ 000,1/3)$.其分布律为

$$P\{X=k\}=\binom{90\ 000}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{90\ 000-k},k=0,1,\cdots,90\ 000.$$

所求的概率为

$$P\{29\ 500\leqslant X\leqslant 30\ 500\}=\sum_{k=29\ 500}^{30\ 500}\binom{90\ 000}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{90\ 000-k}$$

要直接计算是麻烦的，我们利用棣莫弗－拉普拉斯定理来求它的近似值.即有

4

$$\begin{aligned}
&P\{29\ 500\leqslant X\leqslant 30\ 500\}\\
&=P\left\{\frac{29\ 500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant\frac{30\ 500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}\\
&\approx\int_{\frac{29\ 500-np}{\sqrt{np(1-p)}}}^{\frac{30\ 500-np}{\sqrt{np(1-p)}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t=\Phi\left(\frac{30\ 500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{29\ 500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),
\end{aligned}$$

其中 $n=90\ 000,p=1/3$.即有

$$P\{29\ 500\leqslant X\leqslant 30\ 500\}\approx\Phi\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)-\Phi\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)=0.999\ 5.$$

三5. $\bar{X}=1$

$X_i-\bar{X}\sim N(0,4)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{2}\right)^2\sim\chi^2(4)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(16)$

$D\left(\sum_{i=1}^{4}(X_i-\bar{X})^2\right)=32$

又$\because$ $-8<Z<8$, $Z<32$

$\therefore P\left(\min(Y,Z)<D\left(\sum_{i=1}^{4}(X_i-\bar{X})^2\right)\right)=P(\min(Y,Z)<32)$

$=P(Z<32)$

$=1$

四 (1) $\int_1^e \frac{k}{x}dx = k\ln x\Big|_1^e = k = 1$

$\therefore k = 1$

(2) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0, & x<1 \\ \ln x, & 1\le x\le e \\ 1, & x>1 \end{cases}$

(2) $F_Y(y) = P(\ln x < y)$

$= P(x < e^y)$

$= \int_1^{e^y} \frac{1}{x}dx$

$= \ln x\Big|_1^{e^y}$

$= y$

$\therefore F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y\le 0 \\ y, & 0<y<1 \\ 1, & y\ge 1 \end{cases}$

$\therefore f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

五(1) $H_0: \mu > 225$. $H_1: \mu \le 225$

σ^2已知. 取 $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

由题 $\sigma = 98.7$、$\bar{X} = 241.5$. $n = 16$、

$Z_{0.05} = 1.645$

$Z = \frac{241.5 - 225}{98.7/\sqrt{16}} = 0.669 > -1.645 = -Z_{0.05}$

∴这批电灯泡不合格

(2) 置信区间 $(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}})$

代入值有 $(200.9, 282.1)$

六、$E(X)=\int_{\mu}^{+\infty}\frac{1}{2}xe^{-\frac{x-\mu}{2}}dx=-(x+2)e^{-\frac{x-\mu}{2}}\Big|_{\mu}^{+\infty}=\mu+2$

由 $E(X)=\bar{X}$ 有

矩估计 $\hat{\mu}=\bar{X}-2$

$\therefore L(\mu)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\mu)=\frac{1}{2^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{2}}$

$LnL(\mu)=-n\ln 2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{1}{2}n\mu$

$\frac{dLnL(\mu)}{d\mu}=\frac{1}{2}n=0$

可知 μ 不能由似然方程解出

但当 $x_i>\mu$，$LnL\uparrow$

$\therefore$ 最大似然估计 $\hat{\mu}=\min(X_1,X_2\cdots,X_n)$

七、(1) $\because S=\int_0^4\left(\sqrt{x}-\frac{x^2}{8}\right)dx$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{24}x^3\right]_0^4$$

$$=\frac{16}{3}-\frac{8}{3}$$

$$=\frac{8}{3}$$

$$\therefore f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{8}, & 0<x<4,\ \frac{x^2}{8}<y<\sqrt{x}\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(2) $f_Y(y)=\begin{cases}\int_{y^2}^{2\sqrt{2y}}\frac{3}{8}dx, & 0<y<2\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{4}\sqrt{2y}-\frac{3}{8}y^2, & 0<y<2\\ 0, & 其他\end{cases}$

(3) $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{3}{6\sqrt{2y}-3y^2}, & y^2<x<2\sqrt{2y}\\ 0, & 其他\end{cases}$