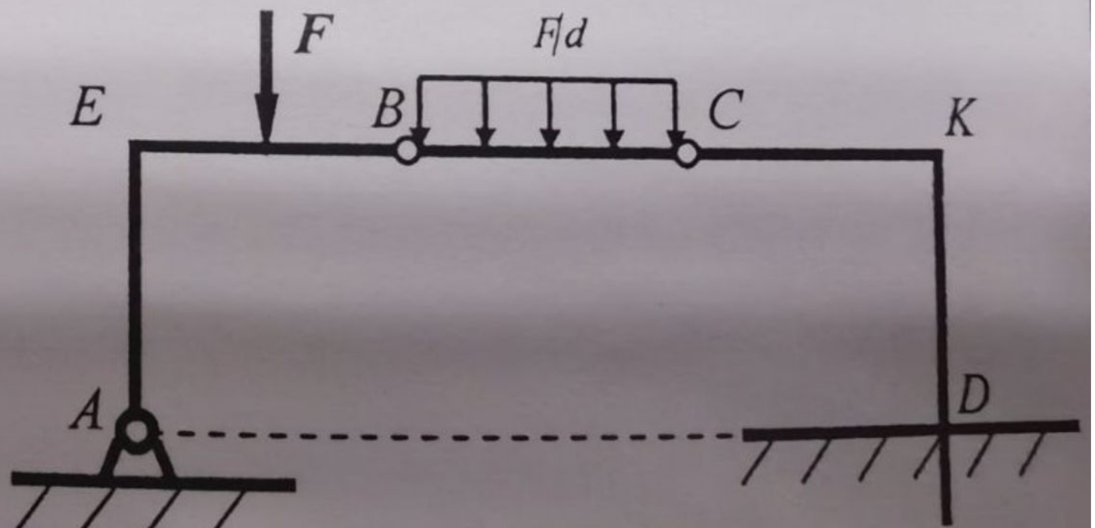
题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

本题分数	15
得　　分	

一、计算题

如图所示，结构由 AEB、BC、CKD 三部分杆件组成，其中 $AE = EB = BC = CK = KD = 2d$，在 EB 中点作用一个大小为 F 的铅垂向下的力，BC 杆上作用载荷集度为 F/d 的均布力，忽略杆重，试求 A、B、C、D 处的约束力。

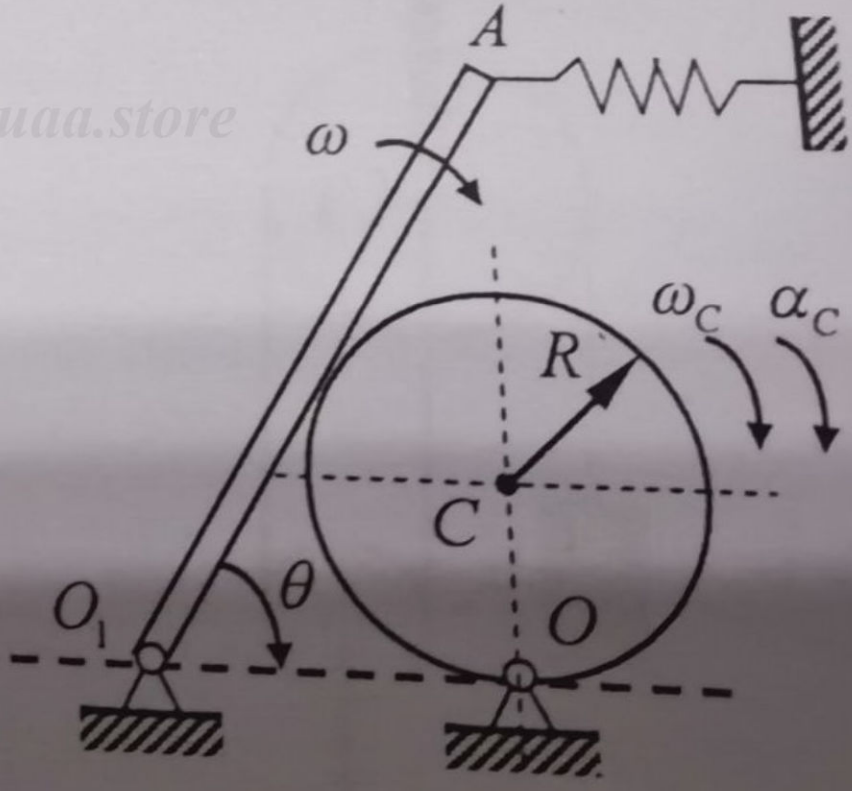
解.



本题分数	15
得　分	

二、计算题

图示偏心轮摇杆机构，摇杆 O_1A 借助弹簧压在半径为 R 的偏心轮 C 上。摇杆绕 O_1 轴摆动，从而带动偏心轮 C 绕 O 轴摆动。设 $OC \perp OO_1$ 时，摇杆 O_1A 的角速度为ω，角加速度为 0，$\theta = 60^\circ$，试用**点的复合运动方法**求此时偏心轮 C 的角速度 ω_C 和角加速度 α_C。

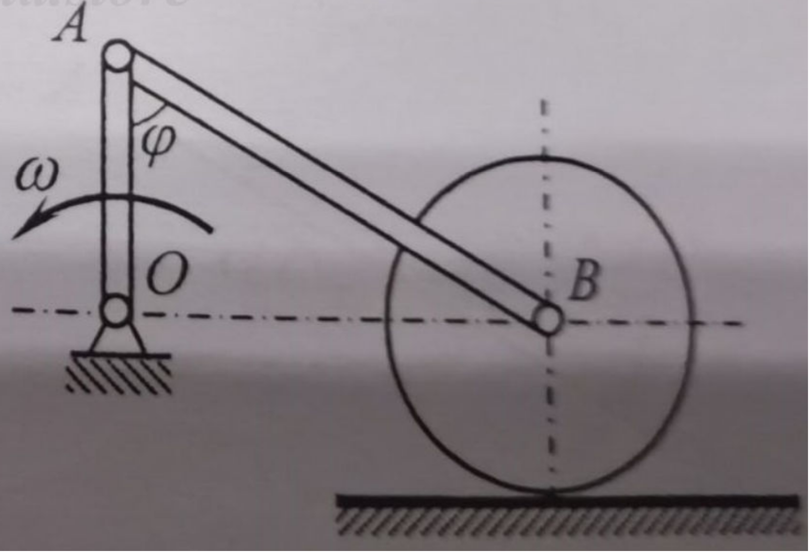


本题分数	15
得　　分	

三、计算题

曲柄滚轮机构，滚轮 B 的半径为 R，杆 OA 长为 $OA = 1.5R$。OA 以匀角速度 ω 逆时针转动，滚轮 B 作纯滚动。求：当时 $\varphi=60^\circ$ ($OA \perp OB$)时，滚轮 B 的角速度 ω_B 和角加速度 α_B。

解：



本题分数	15
得　　分	

四、计算题

图示系统，重物 A 和 B 的质量分别为 m_1、m_2 且 $m_2 > m_1$，动滑轮的半径为 r，定滑轮的半径为 $2r$。滑轮质量不计。求：

(1) 重物 A 的加速度；

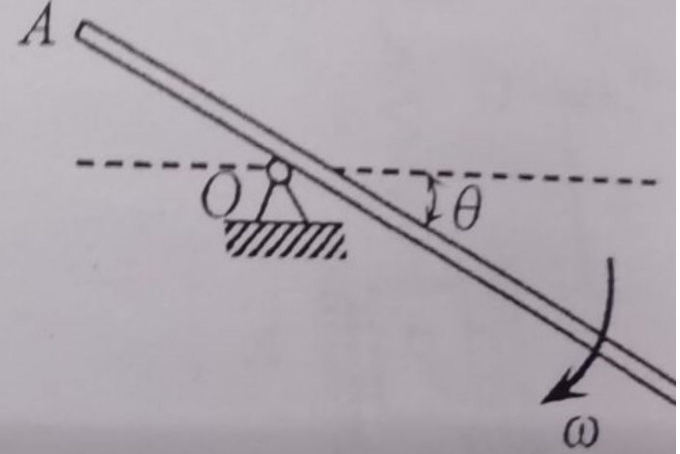
(2) 支座 O 的约束力。

本题分数	15
得　　分	

五、计算题

质量为m，长度为L 的均质杆AB 可绕轴O转动，且$OA=L/3$。若在图示位置时$\theta=30°$，杆AB的角速度为ω。

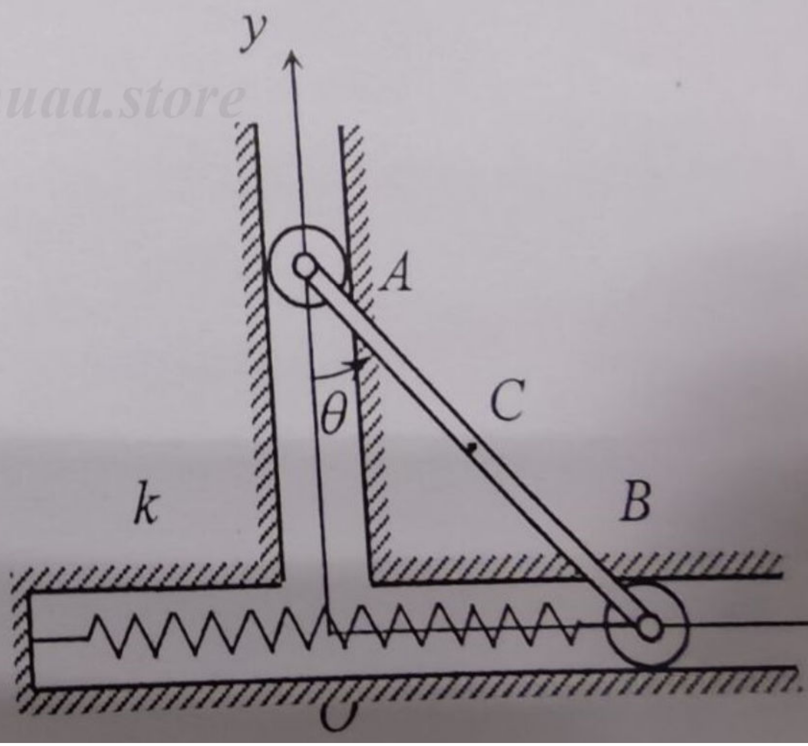
试用达朗贝尔原理求该瞬时：（1）杆AB 的角加速度；（2）O处的约束力。



本题分数	15
得　　分	

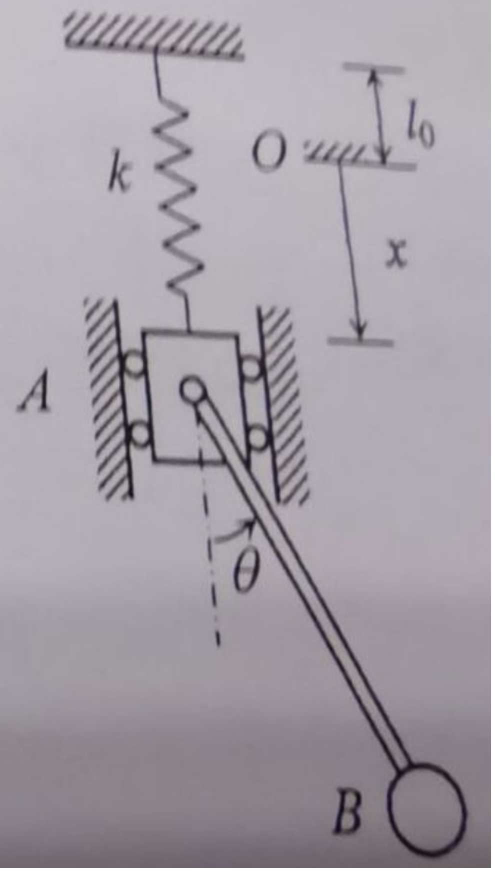
六、计算题

如图所示，质量为 m、长为 l 的均质杆 AB 在铅垂平面内运动，其两端分别在铅垂和水平槽中运动，且 B 端连接一刚度系数为 k 的水平弹簧，当杆处于铅垂位置时，弹簧无变形，两滑轮的质量及各处摩擦均不计。试用虚位移原理求平衡时 θ 角的值。

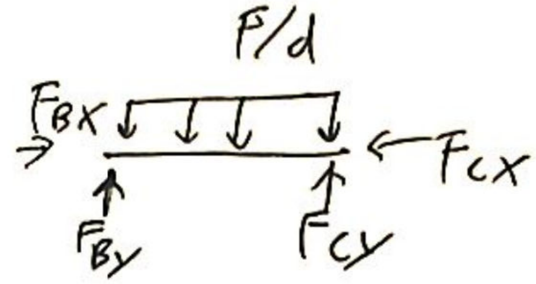


本题分数	10
得　　分	

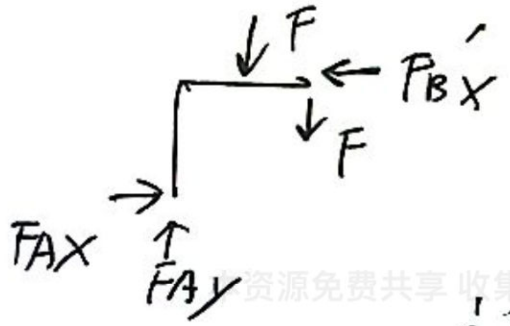
质量为 m_1 的滑块 A 悬挂在刚度系数为 k 的铅垂弹簧下，并可沿铅垂滑道上下运动，在滑块上又连接一长为 l 质量为 m_2 的单摆（摆杆质量不计），如图所示。试以 x 和 θ 为广义坐标，用拉格朗日第二类方程建立系统的运动微分方程（其中 x 的坐标原点为弹簧的原长处）。



一、



$F_{By} = F_{Cy} = \frac{F}{d} \times 2d \times \frac{1}{2} = F\ (\uparrow)$



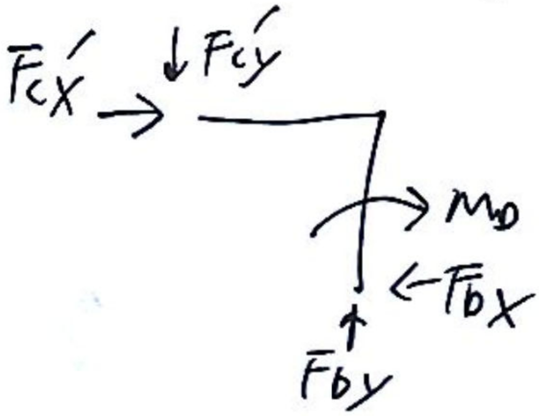
$\Sigma M_A(F_i) = -Fd - F \cdot 2d + 2d \cdot F_{BX}' = 0$

$\therefore F_{BX}' = \frac{3F}{2}\ (\leftarrow)$

$\therefore F_{CX} = F_{BX} = \frac{3F}{2}$

$\Sigma F_X = F_{AX} - \frac{3F}{2} = 0 \quad \therefore F_{AX} = \frac{3F}{2}\ (\rightarrow)$

$\Sigma F_Y = F_{AY} - F - F = 0 \quad \therefore F_{AY} = 2F\ (\uparrow)$



$\Sigma F_X = \frac{3}{2}F - F_{DX} = 0$

$\therefore F_{DX} = \frac{3}{2}F\ (\leftarrow)$

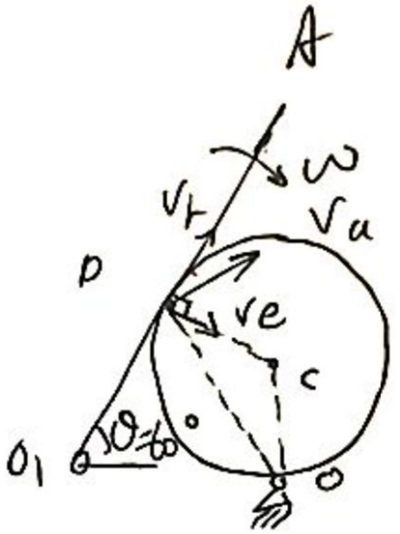
$\Sigma F_Y = F_{DY} - F = 0$

$\therefore F_{DY} = F\ (\uparrow).$

$\Sigma M_D(F_i) = -M_D + F \cdot 2d - \frac{3}{2}F \times 2d = 0$

$\therefore M_D = -Fd\ (\circlearrowleft)$

二



① D为动点　O_1A为动系.

$\vec{v_a} = \vec{v_e} + \vec{v_r}$

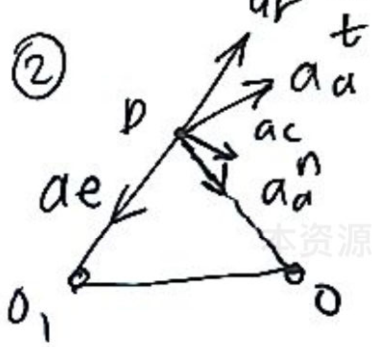
$O_1D = \sqrt{3}R.$

$v_e = O_1D \cdot \omega = \sqrt{3}R\omega$

由几何关系

$v_a = 2v_e = 2\sqrt{3}R\omega$

$\therefore \omega_c = \dfrac{v_a}{OD} = 2\omega \cdot (\curvearrowright)$

② 

$\vec{a_a^t} + \vec{a_a^n} = \vec{a_e} + \vec{a_r} + \vec{a_c}$

向a_c投影:

$\frac{1}{2}a_a^t + \frac{\sqrt{3}}{2}a_a^n = a_c.$

$\therefore a_a^t = 2a_c - \sqrt{3}a_a^n$

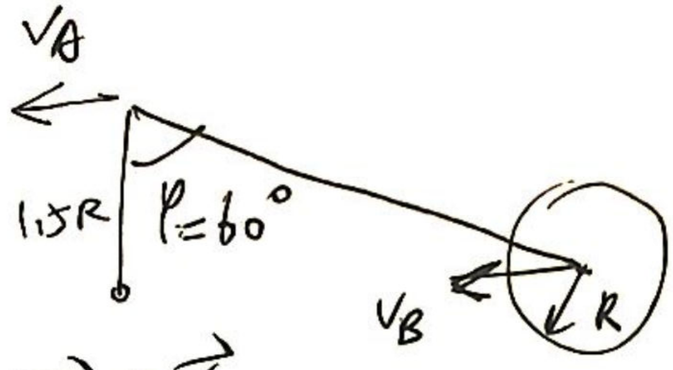
$= 2\times 2 v_r \omega_e - \sqrt{3}a_a^n$

$= 2\times 2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}R\omega^2 - \sqrt{3}\times\sqrt{3}R\cdot 4\omega^2$

$= 12R\omega^2 - 12R\omega^2 = 0$

$\therefore \alpha_c = 0$

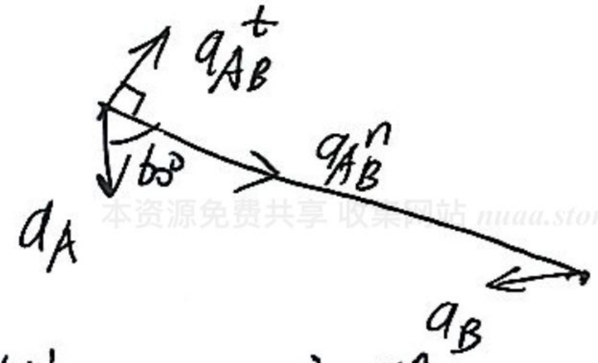
三



$\vec{v}_B // \vec{v}_A$

$v_B = v_A = OA\omega = 1.5R\omega$

$\therefore \omega_B = \frac{v_B}{R} = 1.5\omega$



$\omega_{AB} = 0 \quad \therefore a_{AB}^n = 0$

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^t$

向 a_{AB}^n 投影：

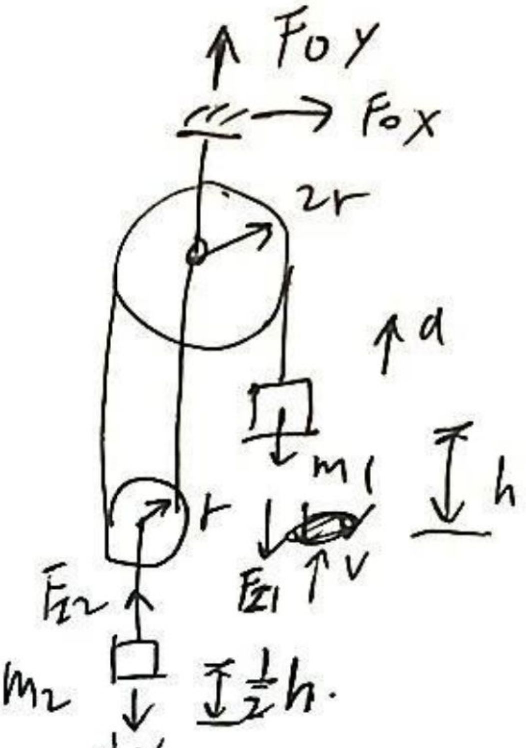
$\frac{1}{2} a_A = 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} a_B$

$\therefore a_B = -\frac{1}{\sqrt{3}} a_A = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times 1.5R\omega^2$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} R\omega^2$

$\therefore \alpha_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} \omega^2$

四



(1)

$W = -m_1gh + m_2g\cdot\frac{1}{2}h = T_2 - T_1$

$T_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{1}{2}v\right)^2$ 代入

$\frac{1}{2}m_2gh - m_1gh = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{8}m_2v^2.$

对 t 求导：

$\left(\frac{1}{2}m_2g - m_1g\right)v = m_1va + \frac{1}{4}m_2va$

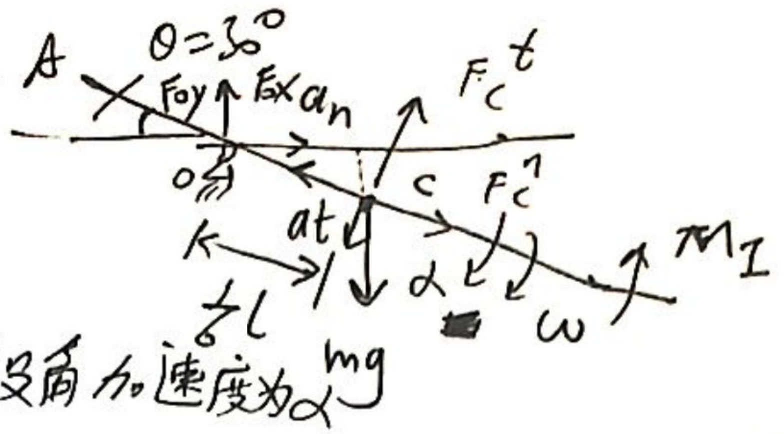
$\therefore a = \dfrac{\left(\frac{1}{2}m_2 - m_1\right)g}{m_1 + \frac{1}{4}m_2} = \dfrac{(2m_2 - 4m_1)g}{4m_1 + m_2}$

(2) $F_{Ox} = 0$

$\Sigma F_y = F_{Oy} - m_1g - m_2g - F_{I1} + F_{I2} = 0$

$\therefore F_{Oy} = m_1g + m_2g + m_1a - \frac{1}{2}m_2a$

五



(1)

设角加速度为α

$$M_I = J_O\alpha = \left[\frac{1}{12}ml^2 + m\cdot\left(\frac{l}{6}\right)^2\right]\alpha$$

$$= \frac{1}{9}ml^2\alpha$$

$$\sum M_O(F_i) = M_I - mg\times\frac{l}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\therefore\ \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{12}mgl}{\frac{1}{9}ml^2} = \frac{3\sqrt{3}g}{4l}$$

(2) $a_n = \frac{1}{6}l\omega^2 \quad \therefore F_c^n = \frac{1}{6}ml\omega^2$

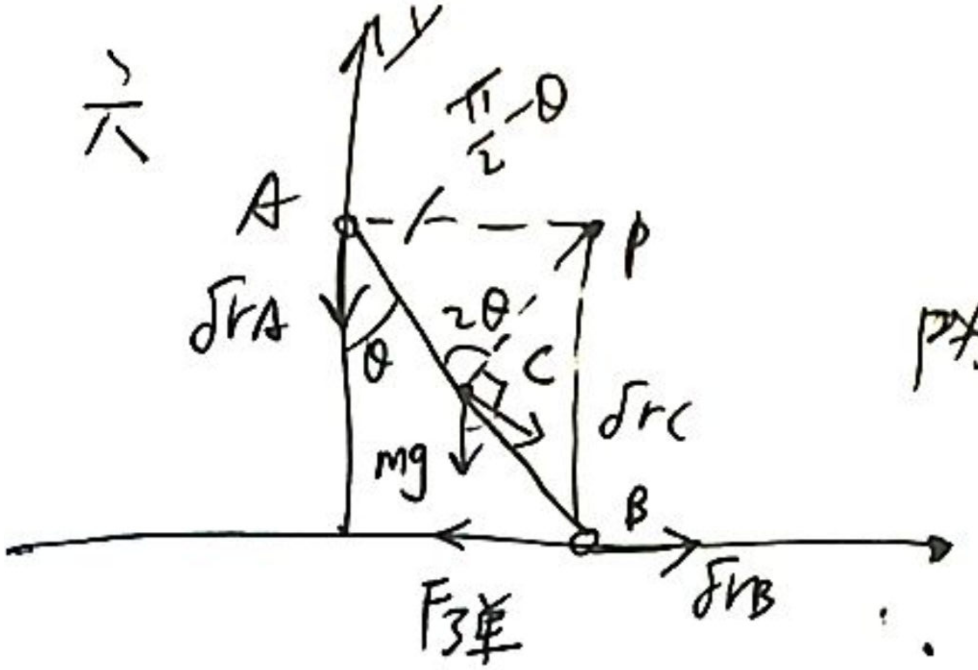
$$a_t = \frac{1}{6}l\alpha = \frac{\sqrt{3}g}{8} \quad \therefore F_c^t = \frac{\sqrt{3}}{8}mg$$

$$\begin{cases} \sum F_x = F_{Ox} + \frac{1}{2}F_c^t + \frac{\sqrt{3}}{2}F_c^n = 0 \\ \sum F_y = F_{Oy} - mg + \frac{\sqrt{3}}{2}F_c^t - \frac{1}{2}F_c^n = 0 \end{cases}$$

$$\therefore F_{Ox} = -\frac{\sqrt{3}}{16}mg - \frac{\sqrt{3}}{12}ml\omega^2 \quad (\leftarrow)$$

$$F_{Oy} = mg + \frac{1}{12}ml\omega^2 - \frac{3}{16}mg \quad (\uparrow)$$

六、



P为AB 瞬心

$F_{弹} = l\sin\theta\, K$

$W = -F_{弹}|\delta r_B| + mg\cdot|\delta r_C|\cdot\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = 0.$

$\therefore -l\sin\theta K\,|\delta r_B| + mg|\delta r_C|\sin\theta = 0.$

又$\because \frac{|\delta r_B|}{|\delta r_C|} = \frac{PB}{PC} = 2\cos\theta.$

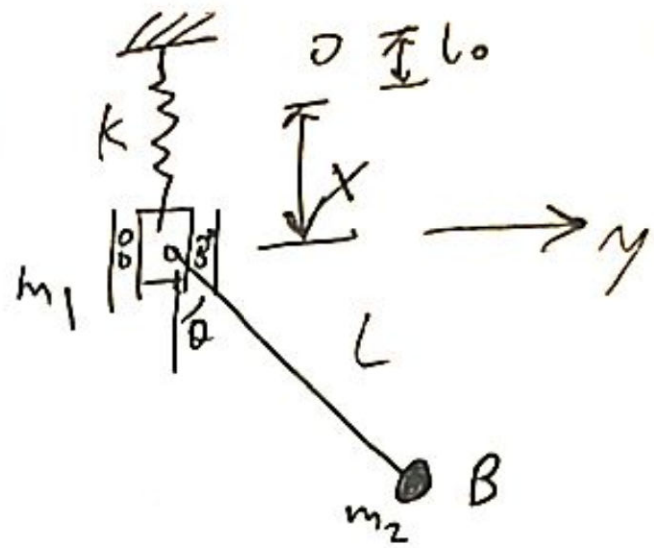
代入

$-l\sin\theta K\cdot 2\cos\theta|\delta r_C| + mg|\delta r_C|\sin\theta = 0.$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{mg}{2lK}$

$\therefore \theta = \arccos\left(\frac{mg}{2lK}\right)$

七



$y_B = l\sin\theta$, $x_B = x + l\cos\theta$

$\therefore v_{Bx} = \dot{x} - l\sin\theta\cdot\dot{\theta}$

$v_{By} = l\cos\theta\,\dot{\theta}$

拉格朗日 $L = T - V$

方程：

$$V = -m_1 g x - m_2 g(x + l\cos\theta)$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(v_{Bx}^2 + v_{By}^2).$$

$$= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 - 2\dot{x}l\sin\theta\cdot\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2).$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 - m_2\dot{x}l\sin\theta\,\dot{\theta} + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left((m_1+m_2)\dot{x} - m_2 l\sin\theta\,\dot{\theta}\right).$$

$$- \quad = 0$$

$$\text{即}\ (m_1+m_2)\ddot{x} - m_2 l\cos\theta\,\dot{\theta} = 0.$$