南京航空航天大学

二〇二二～二〇二三 学年 第一学期《结构动力学基础》考试试题

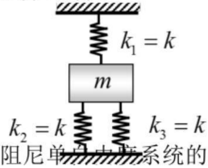
考试日期： 2022年 月 日 试卷类型： A 试卷代号：

班号 学号 姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

本题分数	20
得 分	

一、单项选择题（每小题2分，总分20分）



1. 图示单自由度系统的等效刚度为（ ）

A k B $2k$

C $3k$ D $4k$

2. 初始位移为x_0，初始速度为0，固有频率为ω_n的无阻尼单自由度系统的振幅为（ ）

A x_0 B $2x_0$

C x_0/ω_n D $x_0\omega_n$

3. 关于单自由度有阻尼系统的自由振动，下列描述正确的是（ ）

A 对于临界阻尼系统，其响应具有往复振荡特点。

B 对于欠阻尼系统，其响应是周期振动。

C 对于欠阻尼系统，其响应具有等时性。

D 对于过阻尼系统，其响应不可能通过平衡点位置。

4. 关于简谐激励下单自由度有阻尼系统的受迫振动，下列描述正确的是（ ）

A 在低频区，系统主要呈现阻尼特性。

B 在共振区，系统主要呈现阻尼特性。

C 在高频区，系统主要呈现弹性特性。

D 在低频区，系统主要呈现惯性特性。

5. 单自由度欠阻尼系统的单位脉冲响应函数为（ ）。

A $\delta(t)$　　　　B $h(t)=\dfrac{1}{m\omega_{\mathrm{d}}}e^{-\zeta\omega_{\mathrm{n}}t}\sin\omega_{\mathrm{d}}t$

C $h(t)=\dfrac{1}{m}e^{-\zeta\omega_{\mathrm{n}}t}\cos\omega_{\mathrm{d}}t$　　　　D $H(\omega)=\dfrac{1}{k+j\omega c-m\omega^2}$

6. 关于线性多自由度无阻尼系统的自由振动，下列说法正确的是（　）

A 一定是简谐振动。
B 其频率、振幅和相位取决于系统的初始条件。
C 一定是周期振动。
D 包含若干阶固有振动的线性叠加。

7. 关于多自由度系统的固有振型向量，下列说法正确的是（　　）

A 具有唯一性。
B 对质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵均具有加权正交性。
C 线性无关。
D 以上均不对。

8. 对于具有刚体模态的多自由度振动系统，下列说法正确的是（　　）

A 具有零固有频率，对应的振型向量为零向量。
B 其柔度矩阵不可逆。
C 刚体模态对应的弹性势能为零。
D 不存在刚度矩阵。

9. 对于等截面均质直杆的纵向振动问题，确定其固有振动所需要的边界条件的个数是（　　）

A 1　　　　B 2
C 3　　　　D 4

10. 对于连续系统，下列说法**错误**的是（　　）

A 具有无限多个自由度。
B 其动力学方程是偏微分方程。
C 若仅考虑线性振动，其自由响应可表示为若干阶甚至无穷阶

固有振动的线性叠加。

D 模态叠加法、模态截断等方法不能适用。

本题分数	20
得　分	

二、填空题（总分 20 分）

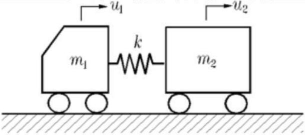
1. 单自由度有阻尼系统，在频率为 $10\text{rad}/\text{s}$ 的简谐激励和频率为 $8\text{rad}/\text{s}$ 的简谐激励的共同作用下，其稳态响应的周期为__________。

2. 某质量为 50kg 的机器置于刚度为 $5\times10^5\text{N}/\text{m}$ 的隔振器上，该机器受到频率为 20Hz 的简谐激励力作用，该系统的力传递率为______________（精确到小数点后第三位），

_____（有/无） 隔振效果。

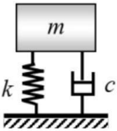
3. 已知某个多自由度线性振动系统，在第 j 个自由度上施加幅值为 A 频率为 ω_0（单位： rad/s）的正弦激励，在第 i 个自由度上的稳态位移响应幅值为 B。则在第 i 个自由度上施加幅值为 W 频率为 ω_0 的正弦激励，在第 j 个自由度上的稳态位移响应幅值为____________，在第 j 个自由度上的稳态加速度响应幅值为____________。

4. 对于图示卡车-拖车系统，卡车质量为 m_1，拖车质量为 m_2，连接弹簧的刚度为 k，其第一阶固有频率为___________，第一阶固有振型为___________。



5. 图示有阻尼单自由度系统，$m=5\text{kg}$，在重量作用下弹簧静变形δ_s=1mm，自由振动10个循环后，振幅减少为原来的一半，按小阻尼比和g=10m/s^{2}计算，则系统的固有圆频率为_________，阻尼比ζ为________（精确到小数点后第三位），阻尼系数c为

。



本题分数	20
得　分	

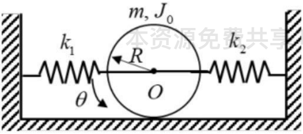
三、计算题（20分）

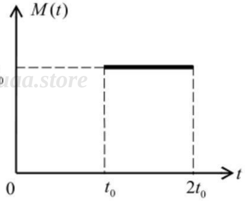
图示单自由度振动系统由圆盘和弹簧组成，圆盘在地面上作纯滚动，其质量为m，半径为R，关于轮心O的转动惯量为J_O，两个弹簧的刚度分别为k_1和k_2，弹簧连接于轮心O处。（$J_O=mR^2/2$）

试求：（1）以转角θ为广义坐标，列出此系统的自由振动微分方程；

（2）确定此系统的固有频率；

（3） 若在圆盘作用逆时针转向力偶M，在$0\le t<t_0$时，力偶矩为0, 在$t_0\le t\le 2t_0$时，力偶矩为M_0, 在$t>2t_0$时，力偶矩为0, 求零初始条件下，该力偶作用下系统的位移响应。

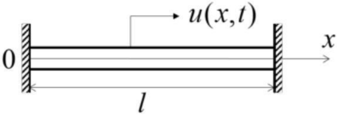




本题分数	10
得　　分	

四、计算题（10 分）

图示两端固定的均匀等截面直杆，杆长为 l，截面积为 A，弹性模量为 E，密度为 ρ。试证明其固有振型函数满足正交性条件，并确定其第一阶模态质量和第二阶模态刚度的表达式。



本题分数	30
得　分	

五、计算题（30 分）

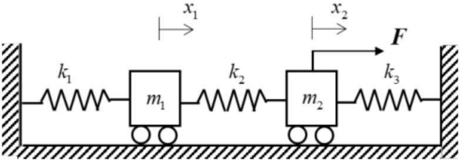
图示二自由度质量弹簧系统，$m_1=m_2=m$，$k_1=3k$，$k_2=k$，$k_3=k$，在 m_2 作用外部干扰力 $\boldsymbol{F}$。试求：

（1）建立振动系统的运动微分方程；

（2）求系统的固有频率以及固有振型（用 m 和 k 表示）；

（3）若外部干扰为简谐力，$F=F_0\sin\omega t$，求 m_2 稳态振幅最小的激励频率以及此时 m_1 的振幅；

（4）若外部干扰为冲击力，$F=I_0\delta(t)$，求零初始条件下系统的位移响应。

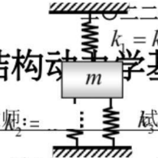


南京航空航天大学

二〇二二～ 二〇二三 学年　第一学期

《结构动力学基础》参考答案及评分标准

命题教师：　　　　　试卷类型：A卷　　　　试卷代号：



一、单项选择题（每小题2分，总分20分）

1. 图示单自由度系统的等效刚度为（　C　）

A k　　　　B $2k$

C $3k$　　　　D $4k$

2. 初始位移为x_0，初始速度为0，固有频率为ω_n的无阻尼单自由度系统的振幅为（　A　）

A x_0　　　　B $2x_0$

C x_0/ω_n　　　　D $x_0\omega_n$

3. 关于单自由度有阻尼系统的自由振动，下列描述正确的是（　C　）

A 对于临界阻尼系统，其响应具有往复振荡特点。

B 对于欠阻尼系统，其响应是周期振动。

C 对于欠阻尼系统，其响应具有等时性。

D 对于过阻尼系统，其响应不可能通过平衡点位置。

4. 关于简谐激励下单自由度有阻尼系统的受迫振动，下列描述正确的是（　B　）

A 在低频区，系统主要呈现阻尼特性。

B 在共振区，系统主要呈现阻尼特性。

C 在高频区，系统主要呈现弹性特性。

D 在低频区，系统主要呈现惯性特性。

5. 单自由度欠阻尼系统的单位脉冲响应函数为（　B　）。

A $\delta(t)$　　　　B $h(t) = \dfrac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\omega_d t$

C $h(t) = \dfrac{1}{m} e^{-\zeta\omega_n t} \cos\omega_d t$　　　　D $H(\omega) = \dfrac{1}{k + j\omega c - m\omega^2}$

6. 关于线性多自由度无阻尼系统的自由振动，下列说法正确的是（　D　）

A 一定是简谐振动。
B 其频率、振幅和相位取决于系统的初始条件。

C 一定是周期振动。
D 包含若干阶固有振动的线性叠加。

7. 关于多自由度系统的固有振型向量，下列说法正确的是（ C ）

A 具有唯一性。
B 对质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵均具有加权正交性。
C 线性无关。
D 以上均不对。

8. 对于具有刚体模态的多自由度振动系统，下列说法正确的是（ C ）

A 具有零固有频率，对应的振型向量为零向量。
B 其柔度矩阵不可逆。
C 刚体模态对应的弹性势能为零。
D 不存在刚度矩阵。

9. 对于等截面均质直杆的纵向振动问题，确定其固有振动所需要的边界条件的个数是（ B ）

A 1　　B 2
C 3　　D 4

10. 对于连续系统，下列说法**错误**的是（ D ）

A 具有无限多个自由度。
B 其动力学方程是偏微分方程。
C 若仅考虑线性振动，其自由响应可表示为若干阶甚至无穷阶固有振动的线性叠加。
D 模态叠加法、模态截断等方法不能适用。

二、填空题（每空2分，总分20分）

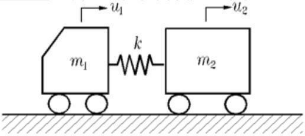
1. 单自由度有阻尼系统，在频率为$10\mathrm{rad}/\mathrm{s}$的简谐激励和频率为$8\mathrm{rad}/\mathrm{s}$的简谐激励

的共同作用下，其稳态响应的周期为π s 。

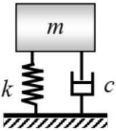
2. 某质量为50kg的机器置于刚度为$5\times10^5\,\mathrm{N/m}$的隔振器上，该机器受到频率为20Hz的简谐激励作用，该系统的力传递率为 1.727 （精确到小数点后第三位），无 （有/无） 隔振效果。

3. 已知某个多自由度线性振动系统，在第j个自由度上施加幅值为A频率为ω_0（单位：rad/s）的正弦激励，在第i个自由度上的稳态位移响应幅值为B。则在第在第i个自由度上施加幅值为W频率为ω_0的正弦激励，在第j个自由度上的稳态位移响应幅值为$\frac{B}{A}W$，在第j个自由度上的稳态加速度响应幅值为$\omega_0^2\frac{B}{A}W$ 。

4. 对于图示卡车-拖车系统，卡车质量为m_1，拖车质量为m_2，连接弹簧的刚度为k，其第一阶固有频率为 0 rad/s ，第一阶固有振型为$[1,1]^T$。



5. 图示有阻尼单自由度系统，$m=5\mathrm{kg}$，在重量作用下弹簧静变形δ_s=1mm，自由振动10个循环后，振幅减少为原来的一半，按小阻尼比和g=10m/s^{2}计算，则系统的固有圆频率为100 rad/s，阻尼比ζ为 0.011 （精确到小数点后第三位），阻尼系数c为11N·s/m 。



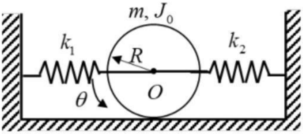
三、计算题（20分）

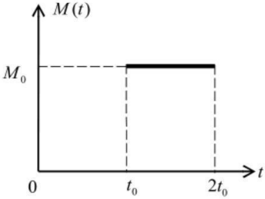
图示单自由度振动系统由圆盘和弹簧组成，圆盘在地面上作纯滚动，其质量为m，半径为R，关于轮心o的转动惯量为J_O，两个弹簧的刚度分别为k_1和k_2，弹簧连接于轮心o处。（$J_O=\frac{1}{2}mR^2$）

试求：（1）以转角θ为广义坐标，列出此系统的自由振动微分方程；

（2）确定此系统的固有频率；

（3）若在圆盘作用逆时针转向力偶M，在$0 \le t < t_0$时，力偶矩为0，在$t_0 \le t \le 2t_0$时，力偶矩为M_0，在$t > 2t_0$时，力偶矩为0，求零初始条件下，该力偶作用下系统的位移响应。





解：

1. 振动微分方程

$$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}+(k_1+k_2)R^2\theta=0$$

（5分）

2. 固有频率

$$\omega_n=\sqrt{\frac{2(k_1+k_2)}{3m}}$$

（5分）

3. 当 $0\le t<t_0$ 时， $\theta(t)=0$

当 $t_0\le t\le 2t_0$ 时，

$$\theta(t)=\int_0^{t_0}0d\tau+\int_{t_0}^{t}h(t-\tau)M_0d\tau=\frac{2M_0}{3mR^2\omega_n^{\ 2}}(1-\cos\omega_n(t-t_0))$$

（5分）

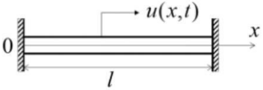
当 $t>2t_0$ 时，

$$\theta(t)=\int_0^{t_0}0d\tau+\int_{t_0}^{2t_0}h(t-\tau)M_0d\tau=\frac{2M_0}{3mR^2\omega_n^{\ 2}}(\cos\omega_n(t-2t_0)-\cos\omega_n(t-t_0))$$

（5分）

四、计算题（10分）

图示两端固定的均匀等截面直杆，杆长为 l，截面积为 A，弹性模量为 E，密度为 ρ 试证明其固有振型函数满足正交性条件，并确定其第一阶模态质量和第二阶模态刚度的表达式。



解：振型函数 $U\left(x\right)=a_1\cos\dfrac{\omega}{c}x+a_2\sin\dfrac{\omega}{c}x$

根据边界条件 $U\left(0\right)=U\left(l\right)=0$ （2 分）

可得，杆的固有频率为 $\omega_n=\dfrac{n\pi c}{l}=\dfrac{n\pi}{l}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

杆纵向振动的固有振型为 $U_n\left(x\right)=\sin\dfrac{n\pi}{l}x,\quad n=1,2,\ldots\ldots$ （2 分）

对于第 n 阶固有振型，满足 $U_n''+\left(\dfrac{\omega_n}{c}\right)^2U_n=0$

乘以另一阶振型函数 $U_m(x)$，并沿杆长积分，可得

$$(\frac{\omega_n}{c})^2\int_0^l U_m(x)U_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^l U_n'(x)U_m'(x)\mathrm{d}x$$

同理可得：

$$(\frac{\omega_m}{c})^2\int_0^l U_m(x)U_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^l U_m'(x)U_n'(x)\mathrm{d}x$$

上面两式相减，可得：

$$\frac{\omega_n^2-\omega_m^2}{c^2}\int_0^l U_nU_m\mathrm{d}x=0$$

当 $n\neq m$ 时，杆的固有频率互异，从而可得杆固有振型函数的正交关系：

$$\int_0^l U_m(x)U_n(x)\mathrm{d}x=0,\quad \left(n\neq m\right)$$

$$\int_0^l U_n'(x)U_m'(x)\mathrm{d}x=0,\quad \left(n\neq m\right)$$

（4 分）

第一阶模态质量 $M_1=\int_0^l\rho AU_1^2dx=\dfrac{1}{2}\rho Al$ （1 分）

第二阶模态刚度 $K_2=\int_0^l EAU_2'^2dx=\dfrac{2EA\pi^2}{l}$ （1 分）

五、计算题（30分）

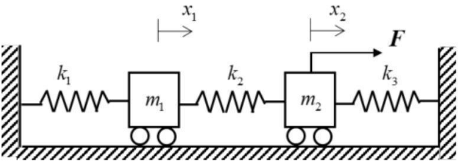
图示二自由度弹簧质量系统，$m_1=m_2=m$，$k_1=3k$，$k_2=k$，$k_3=k$，在m_2作用外部干扰力$\boldsymbol{F}$。试求：

（1）建立振动系统的运动微分方程；

（2）求系统的固有频率以及固有振型（用m和k表示）；

（3）若外部干扰为简谐力，$F=F_0\sin\omega t$，求m_2稳态振幅最小的激励频率以及此时m_1的振幅；

（4）若外部干扰为冲击力，$F=I_0\delta(t)$，求零初始条件下系统的位移响应。



解：（1）运动微分方程：

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_1+4kx_1-kx_2&=0\\
m\ddot{x}_2-kx_1+2kx_2&=F
\end{aligned}
$$

（5分）

（2）根据

$$
\begin{bmatrix}4k-m\omega^2 & -k\\ -k & 2k-m\omega^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}=0
$$

解得固有频率为：$\omega_1=\sqrt{3-\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，$\omega_2=\sqrt{3+\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

固有振型为：$\begin{bmatrix}\varphi_{11}\\ \varphi_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1+\sqrt{2}\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}\varphi_{12}\\ \varphi_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1-\sqrt{2}\end{bmatrix}$ （5 分）

（3）系统频响函数矩阵为：

$$H(\omega)=Z^{-1}(\omega)=\frac{1}{\det Z(\omega)}\begin{bmatrix}2k-m\omega^2 & k\\ k & 4k-m\omega^2\end{bmatrix}$$ （5 分）

系统稳态响应为：

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\det Z(\omega)}\begin{bmatrix}F_0k\\ F_0(4k-m\omega^2)\end{bmatrix}\sin\omega t$$ （2 分）

当 $\omega=\sqrt{\dfrac{4k}{m}}$ 时，稳态振幅最小，此时 m_1 的振幅为 $\bar{x}_1=\dfrac{F_0}{k}$。 （3 分）

（4）根据模态坐标变换，可得

$$\begin{bmatrix}(4+2\sqrt{2})m & 0\\ 0 & (4-2\sqrt{2})m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(8+2\sqrt{2})k & 0\\ 0 & (8-2\sqrt{2})k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\ 1-\sqrt{2}\end{bmatrix}I_0\delta(t)$$

即：

$$\ddot{q}_1+\omega_1^2q_1=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{I_0}{m}\delta(t)$$

$$\ddot{q}_2+\omega_2^2q_2=-\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{I_0}{m}\delta(t)$$ （6 分）

$$q_1=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{I_0}{m\omega_1}\sin\omega_1t,\ q_2=-\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{I_0}{m\omega_2}\sin\omega_2t$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{I_0}{m\omega_1}\begin{bmatrix}1\\ 1+\sqrt{2}\end{bmatrix}\sin\omega_1t-\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{I_0}{m\omega_2}\begin{bmatrix}1\\ 1-\sqrt{2}\end{bmatrix}\sin\omega_2t$$ （4 分）

南京航空航天大学

二〇二二～ 二〇二三 学年 第一学期 《结构动力学基础》考试试题

考试日期： 2022 年 月 日 试卷类型： B 试卷代号：

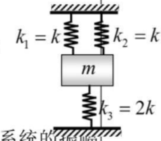
班号 学号 姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

本题分数	20
得 分	

一、单项选择题（每小题 2 分，总分 20 分）

1. 图示单自由度系统的等效刚度为（ ）



A k　　B $2k$
C $3k$　　D $4k$

2. 初始位移为 0，初始速度为 $\dot{x}_0$，固有频率为 ω_n 的无阻尼单自由度系统的振幅为（ ）

A $\dot{x}_0$　　B $2\dot{x}_0\omega_n$
C $\dot{x}_0/\omega_n$　　D $\dot{x}_0\omega_n$

3. 关于单自由度有阻尼系统的自由振动，下列描述**错误**的是（ ）

A 对于临界阻尼系统，其响应不具有往复振荡特点。
B 对于欠阻尼系统，其响应不是周期振动。

C 对于欠阻尼系统，其响应具有等时性。

D 对于过阻尼系统，其响应不可能通过平衡点位置。

4. 关于简谐激励下单自由度有阻尼系统的受迫振动，下列描述正确的是（ ）

A 在低频区，系统主要呈现弹性特性。
B 在共振区，系统主要呈现惯性特性。

C 在高频区，系统主要呈现弹性特性。

D 在共振区，系统主要呈现惯性特性。

5. 单自由度无阻尼系统的单位脉冲响应函数为（ ）

A $h(t)=\dfrac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t$　　B $\delta(t)$

C $h(t)=\frac{1}{m}e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t$　　D $H(\omega)=\frac{1}{k+j\omega c-m\omega^2}$

6. 关于多自由度无阻尼系统的自由振动，下列说法**错误**的是（　　）

A 不一定是简谐振动。
B 其频率、振幅和相位取决于系统的初始条件。
C 不一定是周期振动。
D 包含若干阶固有振动的线性叠加。

7. 关于多自由度系统的固有振型向量，下列说法正确的是（　　）

A 具有唯一性。
B 对质量矩阵和刚度矩阵均具有加权正交性。
C 对阻尼矩阵均具有加权正交性。
D 可能线性相关。

8. 对于具有刚体模态的多自由度振动系统，下列说法**错误**的是（　　）

A 具有零固有频率，对应的振型向量为零向量。
B 其刚度矩阵不可逆。
C 其刚度矩阵为半正定矩阵。
D 不存在柔度矩阵。

9. 对于两端固定的等截面均质直杆的纵向振动问题，确定其固有振动所需要的边界条件的个数是（　　）

A 1　　B 2
C 3　　D 4

10. 对于连续系统，下列说法正确的是（　　）

A 具有有限个固有频率。
B 其动力学方程是常微分方程。
C 若仅考虑线性振动，其自由响应可表示为若干阶甚至无穷阶固有振动的线性叠加。
D 模态叠加法、模态截断等方法不能适用。

本题分数	20
得　分	

二、填空题（总分 20 分）

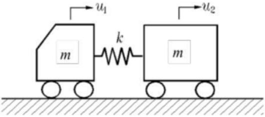
1. 单自由度有阻尼系统，受频率为 $50\text{rad}/\text{s}$ 的简谐激励和频率为 $40\text{rad}/\text{s}$ 的简谐激励的共同作用，其稳态响应的周期为____________。

2. 某质量为10kg的机器置于刚度为$1\times10^5\text{N}/\text{m}$的隔振器上，该机器受到频率为$25\text{Hz}$的简谐激励力作用，该系统的力传递率为\______________（精确到小数点后第三位），

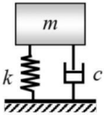
_____（有/无） 隔振效果。

3. 已知某个多自由度线性振动系统，在第j个自由度上施加幅值为A频率为ω_0（单位：rad/s）的正弦激励，在第i个自由度上的稳态位移响应幅值为B。则在第i个自由度上施加幅值为W频率为ω_0的正弦激励，在第j个自由度上的稳态位移响应幅值为___________，在第j个自由度上的稳态速度响应幅值为___________。

4. 对于图示卡车-拖车系统，卡车质量为m，拖车质量为m，连接弹簧的刚度为k，其第二阶固有频率为___________，第二阶固有振型为___________。



5. 图示有阻尼单自由度系统，$m=100\text{kg}$，在重量作用下弹簧静变形δ_s=25mm，自由振动10个循环后，振幅减少为原来的一半，按小阻尼比和g=10m/s^{2}计算，则系统的固有圆频率为______，系统的阻尼比ζ为______（精确到小数点后第三位），阻尼系数c为______。



本题分数	20
得　分	

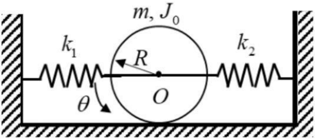
三、计算题（20分）

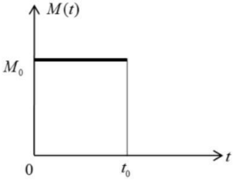
图示单自由度振动系统由圆盘和弹簧组成，圆盘在地面上作纯滚动，其质量为m，半径为R，关于轮心O的转动惯量为J_O，两个弹簧的刚度分别为k_1和k_2，弹簧连接于轮心O处。（$J_O = mR^2/2$）

试求：（1）以转角θ为广义坐标，列出此系统的自由振动微分方程；

（2）确定此系统的固有频率；

（3）若在圆盘作用逆时针转向力偶M，在$0 \le t \le t_0$时，力偶矩为M_0，在$t > t_0$时，力偶矩为0，求零初始条件下，该力偶作用下系统的位移响应。

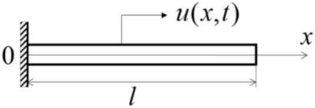




本题分数	10
得　分	

四、计算题（10分）

图示一端固定，一端自由的等截面均质直杆，杆长为l，截面积为A，弹性模量为E，密度为ρ。试证明其固有振型函数满足正交性条件，并确定其第一阶主质量和第三阶主刚度的表达式。



本题分数	30
得　分	

五、计算题（30分）

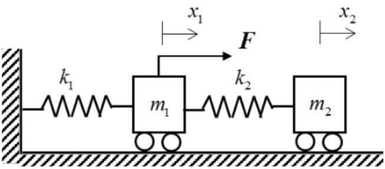
图示二自由度质量弹簧系统，$m_1 = m_2 = m$，$k_1 = 2k$，$k_2 = k$，在m_1作用外部干扰力$\boldsymbol{F}$。试求：

（1）建立振动系统的运动微分方程；

（2）求系统的固有频率以及固有振型（用m和k表示）；

（3）若外部干扰为简谐力，$F = F_0 \sin \omega t$，求m_1稳态振幅最小的激励频率以及此时m_2的振幅；

（4）若外部干扰为冲击力，$F = I_0 \delta(t)$，求零初始条件下系统的位移。



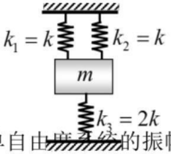
南京航空航天大学

二〇二二～ 二〇二三 学年　第一学期

《结构动力学基础》参考答案及评分标准

命题教师：　　　　　　试卷类型：B卷　　　　试卷代号：

一、单项选择题（每小题2分，总分20分）



1. 图示单自由度系统的等效刚度为（　D　）

A k　　　　B $2k$

C $3k$　　　　D $4k$

2. 初始位移为0，初始速度为$\dot{x}_0$，固有频率为ω_n的无阻尼单自由度系统的振幅为（　C　）

A $\dot{x}_0$　　　　B $2\dot{x}_0\omega_n$

C $\dot{x}_0/\omega_n$　　　　D $\dot{x}_0\omega_n$

3. 关于单自由度有阻尼系统的自由振动，下列描述错误的是（　D　）

A 对于临界阻尼系统，其响应不具有往复振荡特点。

B 对于欠阻尼系统，其响应不是周期振动。

C 对于欠阻尼系统，其响应具有等时性。

D 对于过阻尼系统，其响应不可能通过平衡点位置。

4. 关于简谐激励下单自由度有阻尼系统的受迫振动，下列描述正确的是（　A　）

A 在低频区，系统主要呈现弹性特性。

B 在共振区，系统主要呈现惯性特性。

C 在高频区，系统主要呈现弹性特性。

D 在共振区，系统主要呈现惯性特性。

5. 单自由度无阻尼系统的单位脉冲响应函数为（　A　）。

A $h(t) = \dfrac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t$　　　　B $\delta(t)$

C $h(t) = \dfrac{1}{m}e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t$　　　　D $H(\omega) = \dfrac{1}{k + j\omega c - m\omega^2}$

6. 关于多自由度无阻尼系统的自由振动，下列说法**错误**的是（　B　）

A 不一定是简谐振动。

B 其频率、振幅和相位取决于系统的初始条件。

C 不一定是周期振动。

D 包含若干阶固有振动的线性叠加。

7. 关于多自由度系统的固有振型向量，下列说法正确的是（ B ）

A 具有唯一性。
B 对质量矩阵和刚度矩阵均具有加权正交性。

C 对阻尼矩阵均具有加权正交性。

D 可能线性相关。

8. 对于具有刚体模态的多自由度振动系统，下列说法**错误**的是（ A ）

A 具有零固有频率，对应的振型向量为零向量。
B 其刚度矩阵不可逆。

C 其刚度矩阵为半正定矩阵。

D 不存在柔度矩阵。

9. 对于两端固定的等截面均质直杆的纵向振动问题，确定其固有振动所需要的边界条件的个数是（ B ）

A 1　　B 2
C 3　　D 4

10. 对于连续系统，下列说法正确的是（ C ）

A 具有有限个固有频率。
B 其动力学方程是常微分方程。

C 若仅考虑线性振动，其自由响应可表示为若干阶甚至无穷阶固有振动的线性叠加。

D 模态叠加法、模态截断等方法不能适用。

二、填空题（每空2分，总分20分）

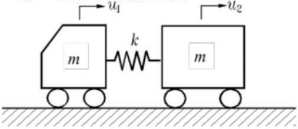
1. 单自由度有阻尼系统，受频率为 $50\mathrm{rad/s}$ 简谐激励和频率为 $40\mathrm{rad/s}$ 的简谐激励的共同作用，其稳态响应的周期为 $\frac{\pi}{5}\ \mathrm{s}$ 。

2. 某质量为10kg的机器置于刚度为$1\times10^5\text{N}/\text{m}$的隔振器上，该机器受到频率为25Hz的简谐激励作用，该系统的力传递率为 0.681 ， 有 （有/无） 隔振效果。

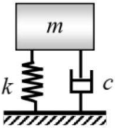
3. 已知某个多自由度线性振动系统，在第j个自由度上施加幅值为A频率为ω_0（单位：rad/s）的正弦激励，在第i个自由度上的稳态位移响应幅值为B。则在第在第i个自由度上施加幅值为W频率为ω_0的正弦激励，在第j个自由度上的稳态位移响应

幅值为$\dfrac{B}{A}W$ ，在第j个自由度上的稳态速度响应幅值为$\omega_0\dfrac{B}{A}W$ 。

4. 对于图示卡车-拖车系统，卡车质量为m，拖车质量为m，连接弹簧的刚度为k，其第二阶固有频率为$\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$，第二阶固有振型为$[1,-1]^T$。



5. 图示有阻尼单自由度系统，$m=100\text{kg}$，在重量作用下弹簧静变形δ_s=25mm，自由振动10个循环后，振幅减少为原来的一半，按小阻尼比和g=10m/s^{2}计算，则系统的固有圆频率为20 rad/s，系统的阻尼比ζ为 0.011 （精确到小数点后第三位），阻尼系数c为$44\text{N}\cdot\text{s/m}$。



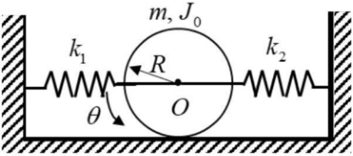
三、计算题（20分）

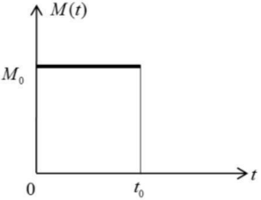
图示单自由度振动系统由圆盘和弹簧组成，圆盘在地面上作纯滚动，其质量为m，半径为R，关于轮心o的转动惯量为J_O，两个弹簧的刚度分别为k_1和k_2，弹簧连接于轮心o处。（$J_O=\frac{1}{2}mR^2$）

试求：（1）以转角θ为广义坐标，列出此系统的自由振动微分方程；

（2）确定此系统的固有频率；

（3）若在圆盘作用逆时针转向力偶M，在$0\le t\le t_0$时，力偶矩为M_0, 在$t>t_0$时，力偶矩为0，求零初始条件下，该力偶作用下系统的位移响应。





解：

1. 振动微分方程

$$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}+(k_1+k_2)R^2\theta=0$$

（5 分）

2. 固有频率

$$\omega_{\mathrm{n}}=\sqrt{\frac{2(k_1+k_2)}{3m}}$$

（5 分）

3. 当 $0\le t\le t_0$ 时，

$$\theta(t)=\int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau=\frac{2M_0}{3mR^2{\omega_{\mathrm{n}}}^2}(1-\cos\omega_{\mathrm{n}}t)$$

（5 分）

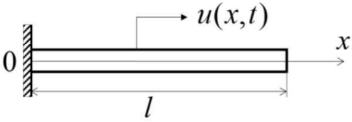
当 $t>t_0$ 时，

$$\theta(t)=\int_0^{t_0} h(t-\tau)f(\tau)d\tau=\frac{2M_0}{3mR^2{\omega_{\mathrm{n}}}^2}(\cos\omega_{\mathrm{n}}(t-t_0)-\cos\omega_{\mathrm{n}}t)$$

（5 分）

四、计算题（10 分）

图示一端固定，一端自由的等截面均质直杆，杆长为 l，截面积为 A，弹性模量为 E，密度为 ρ。试证明其固有振型函数满足正交性条件，并确定其第一阶主质量和第三阶主刚度的表达式。



解：振型函数 $U(x)=a_1\cos\dfrac{\omega}{c}x+a_2\sin\dfrac{\omega}{c}x$

根据边界条件$U(0)=0,U'(l)=0$ （2分）

可得，杆的固有频率为 $\omega_n=(n-\frac{1}{2})\frac{\pi c}{l}$

杆纵向振动的固有振型为 $U_n(x)=\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l},\quad n=1,2,......$ （2分）

对于第n阶固有振型，满足
$$U_n''+\left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2U_n=0$$

乘以另一阶振型函数$U_m(x)$，并沿杆长积分，可得
$$(\frac{\omega_n}{c})^2\int_0^l U_m(x)U_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^l U_n'(x)U_m'(x)\mathrm{d}x$$

同理可得：
$$(\frac{\omega_m}{c})^2\int_0^l U_m(x)U_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^l U_m'(x)U_n'(x)\mathrm{d}x$$

上面两式相减，可得：
$$\frac{\omega_n^2-\omega_m^2}{c^2}\int_0^l U_nU_m\mathrm{d}x=0$$

当$n\neq m$时，杆的固有频率互异，从而可得杆固有振型函数的正交关系：

$$\int_0^l U_m(x)U_n(x)\mathrm{d}x=0,\quad (n\neq m)$$

$$\int_0^l U_n'(x)U_m'(x)\mathrm{d}x=0,\quad (n\neq m)$$

（4分）

第一阶主质量 $M_1=\int_0^l\rho AU_1^2dx=\frac{1}{2}\rho Al$ （1分）

第二阶主刚度 $K_3=\int_0^l EAU_3'^2dx=\frac{25\pi^2EA}{8l}$ （1分）

五、计算题（30 分）

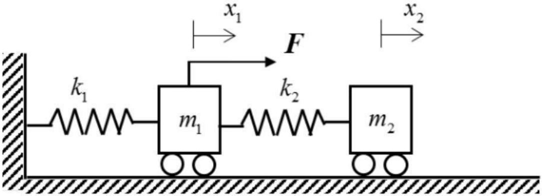
图示二自由度弹簧质量系统，$m_1 = m_2 = m$，$k_1 = 2k$，$k_2 = k$，在 m_1 作用外部干扰力 $\boldsymbol{F}$。试求：

（1）建立振动系统的运动微分方程；

（2）求系统的固有频率以及固有振型（用 m 和 k 表示）；

（3）若外部干扰为简谐力，$F = F_0 \sin \omega t$，求 m_1 稳态振幅最小的激励频率以及此时 m_2 的振幅；

（4）若外部干扰为冲击力，$F = I_0 \delta(t)$，求零初始条件下系统的位移。



解：（1）运动微分方程：

$$m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - kx_2 = F$$
$$m\ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = 0$$

（5 分）

（2）根据

$$\begin{bmatrix} 3k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = 0$$

解得固有频率为：$\omega_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，$\omega_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

固有振型为：$\begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$

（5 分）

（3）系统频响函数矩阵为：

$$H(\omega)=Z^{-1}(\omega)=\frac{1}{\det Z(\omega)}\begin{bmatrix} k-m\omega^2 & k \\ k & 3k-m\omega^2 \end{bmatrix}$$ （5 分）

系统稳态响应为：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{\det Z(\omega)}\begin{bmatrix} F_0(k-m\omega^2) \\ F_0 k \end{bmatrix}\sin\omega t$$ （2 分）

当 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 时，稳态振幅最小，此时 m_2 的振幅为 $\overline{x}_1=\frac{F_0}{k}$。 （3 分）

（4）根据模态坐标变换，可得

$$\begin{bmatrix} (4+2\sqrt{2})m & 0 \\ 0 & (4-2\sqrt{2})m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4k & 0 \\ 0 & 4k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}I_0\delta(t)$$

即：

$$\ddot{q}_1+\omega_1^2 q_1=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\frac{I_0}{m}\delta(t)$$

$$\ddot{q}_2+\omega_2^2 q_2=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\frac{I_0}{m}\delta(t)$$ （6 分）

$$q_1=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\frac{I_0}{m\omega_1}\sin\omega_1 t,\ q_2=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\frac{I_0}{m\omega_2}\sin\omega_2 t$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\frac{I_0}{m\omega_1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}\sin\omega_1 t+\frac{2+\sqrt{2}}{4}\frac{I_0}{m\omega_2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}\sin\omega_2 t$$ （4 分）