南 京 航 空 航 天 大 学

二〇一九 ～ 二〇二〇 学年 第 I 学期《随机信号分析》考试试题

考试日期： 2020 年1月5 日 试卷类型：A 卷 试卷代号：

班号 学号 姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

本题满分	28
得 分	

（试卷最后一页给出了可能用到的傅立叶变换对）

一、填空题（每空 2 分，共 28 分）

1、各态历经过程 $X(t)$ 自相关函数 $R_X(\tau)=\exp(-\tau^2)$，其均方导数为 $Y(t)=X'(t)$，则 $Y(t)$ 的总平均功率为______________，互相关函数 $R_{YX}(\tau)=$________________。

2、随机序列 $\{Y(n)\}$ 处处收敛于随机变量 Y 的定义式为__________________；随机序列 $\{Y(n)\}$ 依概率收敛于随机变量 Y 的定义式为__________________。

3、随机变量 X 服从 $[-2,2]$ 上的均匀分布，随机变量 Y 服从 $[X^2,8]$ 上的均匀分布。则条件数学期望 $E[Y|X]=$___________，X 的特征函数 $Q_X(u)=$______________。

4、随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 联合平稳，且相互独立，均值皆为零，自相关函数分别为 $R_X(\tau)=e^{-|\tau|}$，$R_Y(\tau)=\cos(2\pi\tau)$。定义两个新的随机过程：$W(t)=X(t)+Y(t)$，$V(t)=X(t)-2Y(t)$。则 $R_{WV}(t_1,t_2)=$___________；$D[W(t)+V(t)]=$_____________。

5、设计一个稳定的线性系统，当输入信号的功率谱密度为 $G_X(\omega)=1$ 时，输出信号的功率谱密度为 $G_Y(\omega)=\dfrac{1}{\omega^2+3}$。则此线性系统的传递函数 $H(\omega)=$____________，输出信号 $Y(t)$ 的等效噪声带宽为______________。

6、 随相余弦信号 $s(t)$ 和窄带高斯噪声 $N(t)$ 之和为 $Y(t)=s(t)+N(t)$。则在某固定时刻 t，$N(t)$ 的相位服从____________分布，$Y(t)$ 的包络服从____________分布。

7、 $\exp(j300\pi t)$ 的希尔伯特变换为__________________，

$\dfrac{\sin t}{t}\sin(300\pi t)$ 的希尔伯特变换为__________________。

本题满分	72
得　分	

二、计算题（共 72 分，给出计算过程）

1、随机过程 $X(t)=B^2+\cos t$，其中变量 B 服从 $[0,1]$ 区间的均匀分布。求：① $E[X(t)]$；②在 $t=0$ 时刻，$X(t)$ 的一维概率密度函数 $f(x;0)$；③时间均值 $\overline{X(t)}$。（12 分）

2、随机过程 $X(t)=A\sin t+B$，其中随机变量 A 和 B 互不相关，且均服从期望为 1，方差为 4 的高斯分布。求 $X(t)$：①期望；②方差；③自相关函数；④自协方差函数；⑤画出随机过程 $X(t)$ 的一条样本函数（标明横坐标和纵坐标）（14 分）

3、随机过程 $X(t)=Ae^{jt}$，其中变量 A 服从期望为 1，方差为 2 的高斯分布。定义一个新的过程 $Y(t)=2X(t)$。求：①自相关函数 $R_Y(t_1,t_2)$；②互相关函数 $R_{XY}(t_1,t_2)$；③判断 $Y(t)$ 是否平稳，给出理由；④判断 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 同一时刻是否正交，给出理由。（12 分）

4、窄带平稳随机信号 $X(t)$ 的希尔伯特变换为 $\hat{X}(t)$，已知其解析形式 $\tilde{X}(t)$ 的自相关函数为 $R_{\tilde{X}}(\tau)=\exp\left(j2000\tau-\tau^2\right)$，且 $X(t)$ 的复包络为 $M(t)$，求：① $D[X(t)]$；②希尔伯特变换 $\hat{X}(t)$ 的自相关函数 $R_{\hat{X}}(\tau)$；③ $M(t)$ 的功率谱密度 $G_M(\omega)$。（12 分）

5、 已知齐次马尔可夫链的一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.8\\0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

①求转移概率 $P_{12}(2),P_{22}(3)$？②问此链是否遍历？给出理由。如果遍历，求其极限分布。

（12 分）

6、二维高斯随机矢量 $\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}$ 的均值矢量为 $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，方差阵为 $\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$，且随机矢量

$\begin{cases}Y_1=X_1+2X_2\\Y_2=2X_1-X_2\end{cases}$。求：① Y_1,Y_2 的二维联合概率密度；② Y_1,Y_2 的二维联合特征函数；③判断 Y_1,Y_2 是否独立，给出理由。（10 分）

可能用到的傅立叶变换对

$$e^{-a|t|} \Leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$e^{-at}U(t) \Leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$$

$$te^{-at}U(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

$$\exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right] \Leftrightarrow \sigma\sqrt{2\pi}\,\exp\left[-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right]$$