南京航空航天大学 2013 级硕士研究生

2013 ~ 2014 学年第 1 学期　《矩阵论》　课程考试 A 卷

考试日期：2014 年 1 月 14 日　课程编号：A080001　命题教师：　　阅卷教师：

学院　　　　专业　　　　学号　　　　姓名　　　　成绩

一、(20 分) 设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ -1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1. 求 A 的特征多项式和初等因子；
2. 求 A 的 Jordan 标准形；
3. 问: A 与矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ 是否相似?并说明理由.

答案及评分标准：1.特征多项式为 $f_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$；(4 分)
初等因子为 $\lambda-1, (\lambda+1)^2$.（6 分）

2. A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 或 $J=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.（5 分）

3. 设 $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, 则 B 的初等因子为 $\lambda-1, \lambda+1, \lambda+1$, 与 A 的初等因子不同, 所以 A 与 B 不相似.（5 分）

二、(20 分)设 R^3 的线性变换 σ 将基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 变为向量

$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

1. 求 σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵 A；

2. 求向量 $\xi=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ 及 $\sigma(\xi)$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标;

3. 求线性变换 σ 的值域和核.

答案及评分标准：1. σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.（6 分）

2. 向量 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $x=(10,6,-9)^T$;向量 $\sigma(\xi)$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $y=Ax=(4,0,-3)^T$.（6 分）

3. 线性变换 σ 的值域为 $R(\sigma)=span\{\beta_1,\beta_2\}$,核为 $\ker(\sigma)=span\{-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3\}$ 或 $\ker(\sigma)=span\{(0,1,0)^T\}$ 或 $\ker(\sigma)=\{k(0,1,0)^T\mid k\in R\}$.（8 分）

三、(15 分)设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}$.

1. 计算 A^{+}；
2. 判断方程组 $Ax=b$ 是否相容？如果相容，求方程组的通解；如果不相容，求方程组的极小最小二乘解.

答案及评分标准: 1. A 的一种满秩分解为 $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}\overset{\Delta}{=}BC$；(5 分，注意：满秩分解不唯一，需要检验)

又因为 $B^{+}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$C^{+}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}5&2\\2&2\\-1&2\end{pmatrix}$, 于是

$A^{+}=C^{+}B^{+}=\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix}7&-8&-1\\4&-2&2\\1&4&5\end{pmatrix}$.（5 分，公式写对，计算结果错误可酌情扣分）

2. 不相容. 方程组 $Ax=b$ 的极小最小二乘解为 $x=A^{+}b=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}-23\\-16\\7\end{pmatrix}$.（5 分）

四、(15 分)已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, 且幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}x^k$ 的收敛半径为 2.

1. 求 $\|A\|_1, \|A\|_\infty, \|A\|_2, \|A\|_F$；

2. 证明矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}A^k$ 收敛, 并求其和.

答案及评分标准：1. $\|A\|_1=3, \|A\|_\infty=3, \|A\|_F=\sqrt{7}$. (6 分)

由于 $A^TA=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$, 所以 A^TA 的特征值是 $1, 3, 3$, 从而 $\|A\|_2=\sqrt{3}$. (4 分)

2. 已知幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}x^k$ 的收敛半径为 2, 且 $\rho(A)\le\|A\|_2<2$, 则矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}A^k$ 收敛. 由公式 $\sum_{k=0}^{\infty}B^k=(I-B)^{-1}$, 得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}A^k=(I-\frac{1}{2}A)^{-1}=2\begin{pmatrix}\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}. \text{(5 分)}$$

五、(20 分)设 A 是 n 阶 Hermite 正定矩阵, B 是 n 阶 Hermite 矩阵, 证明:

1. 存在可逆矩阵 P ，使得 $P^H AP=I$, $P^H BP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ ，并且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均为实数;

2. 存在正数 t_0，当 $t>t_0$ 时， $tA+B$ 也是 Hermite 正定矩阵;

3. 若 $A>B\geq 0$ ，则有 $|A-B|\leq|A|$.

证明及评分标准: 1. $A>0\Rightarrow$ 存在可逆矩阵 P_1 , 使得 $P_1{}^H AP_1=I$. 由于 $P_1{}^H BP_1$ 也是 Hermite 矩阵，所以存在酉矩阵 P_2 , 使得

$$P_2{}^H(P_1{}^H BP_1)P_2=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均为实数. 取 $P=P_1P_2$，即为要证的. （8 分）

2. 显然, 对任意实数 t , $tA+B$ 也是 Hermite 矩阵. 对题 1 中的实对角矩阵, 取正数 t_0 , 使得

$$t_0+\lambda_1\geq 0, t_0+\lambda_2\geq 0,\cdots,t_0+\lambda_n\geq 0,$$

则当 $t>t_0$ 时, 有 $diag(t+\lambda_1,t+\lambda_2,\cdots,t+\lambda_n)>0$, 即

$$P^H(tA+B)P=diag(t+\lambda_1,t+\lambda_2,\cdots,t+\lambda_n)>0,$$

于是 $tA+B$ 也是 Hermite 正定矩阵. (6 分)

3. 根据题 1 的结论, 当 $A>B\geq 0$ 时, 有 $0\leq\lambda_i<1,\ i=1,2,\cdots,n$, 于是

$$|A-B|=\frac{1}{|\det P|^2}\left|P^H(A-B)P\right|=|A|(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_n)\leq|A|.\ (6\text{ 分})$$

六、(10 分) 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵, 且 $A\neq 0$.

1. 利用广义逆矩阵证明: 对任意 $b\in R^m$, 方程组 $A^TAx=A^Tb$ 相容;
2. 证明: $\|AA^+\|_2=1$.

证明及评分标准: 1. 由于 $(A^TA)^+=A^+(A^+)^T$, $AA^+=(AA^+)^T$, 所以

$$(A^TA)(A^TA)^+(A^Tb)=A^TAA^+(A^+)^TA^Tb=A^T(AA^+)^T(AA^+)^Tb=A^Tb,$$

因此方程组 $A^TAx=A^Tb$ 相容. (5 分)

2. 由于 $(AA^+)^T(AA^+)=(AA^+)^2=AA^+$, 且 $AA^+\neq 0$, 所以 $\lambda_{\max}[(AA^+)^T(AA^+)]=1$,

从而 $\|AA^+\|_2=1$. (5 分)