南京航空航天大学

二〇二〇 ～ 二〇二一 学年 第 2 学期《数字信号处理》考试试题

考试日期：2021 年 8 月 25 日　　试卷类型：B　　试卷代号：

班号　　学号　　姓名

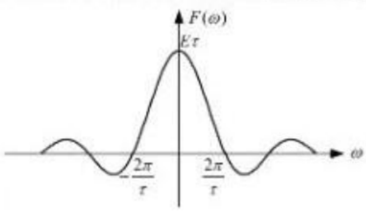
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

本题分数	44
得　分	

一、简答题（注意一题多问）

1. 请说明模拟信号、量化信号、采样信号和数字信号的区别，并请作出数字信号处理系统的框图，结合框图标记出这些信号分别在图中什么位置。（6 分）

2. 已知矩形脉冲的频谱如下图所示，请首先说明该信号实际频谱的取值范围及幅值变化情况。然后分别作两幅图，一幅是由该信号延拓出的周期为 T_1 的周期矩形脉冲信号的频谱图，纵坐标以 F_{pn} 表示；另一幅是此周期矩形脉冲的频谱密度图，纵坐标以 $F_p(\omega)$表示。（注意标注好参数）（8 分）



3. 请比较说明时域采样定理和频域采样定理的异同。包括定理说明、不满足定理带来的效果，并定性说明根据采样值如何恢复原来的信号。据此，说明冲激响应不变法为什么不适合设计高通和带阻滤波器，而频率采样法设计 FIR 滤波器的时候为何会产生逼近误差。（12 分）

4.请从信号及变换的物理意义的角度说明拉氏变换、傅里叶变换、Z 变换、序列的傅里叶变换以及序列的离散傅里叶变换（DFT）之间的关系。（10 分）

5. 请问 ZFFT 是为了减小数字谱分析中的什么误差？并请定性描述 ZFFT 的步骤。（8 分）

本题分数	56
得　分	

二、分析题

1. 请判断如下两个系统是否线性系统？是否移不变系统？请写明判断步骤。（6 分）

（1） $y(n)=nx(n)$　　（2） $y(n)=x(6n+5)$

2. 设序列 $x(n)=\{1,3,2,1\}$，$h(n)=\{1,2,1,2\}$，（10 分）

（1）求两序列的离散卷积；

（2）求两序列的 6 点圆周卷积；

（3）若希望用圆周卷积代替离散卷积，需要如何处理，并请计算验证之。

3. 对模拟信号做数字谱分析，已知信号为 $x(t)=2\sin(4\pi t)+5\cos(8\pi t)$，采样频率为 100$Hz$，拟做 N=45 点的 DFT 是否能分辨出 $x(t)$中不同频率的有用信号？若合适请说明原因；若不合适请给出恰当的 N 值。在使用你所认为的合适的 N 值的前提下，请问 k=10 对应的频率是多少？（6 分）

4. 已知系统函数为$H(z)=5\frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}}$，0<$a$<1，请分析此系统是什么频率特性的系统，并请分析当 a=0.9 和 a=0.5 两种情况下，系统的幅频特性区别在哪里。（6 分）

5. 已知序列 $x(n)$的 DFT 的值为 $X(k)$={1,0,1, 1}，请用共轭法求其 IDFT。

（7 分）

6. 请利用频率采样法设计一个严格线性相位的低通滤波器，要求截止频率$\Omega_c=\pi/2$rad，采样 36 点，给出幅频采样值 $H(k)$及相频响应$\theta(k)$。（9 分）

7. 设系统由下面差分方程描述： （12 分）

$$y(n)=y(n-1)+y(n-2)+x(n-1)$$

（1）请画出系统框图；

（2）求系统函数 $H(z)$；

（3）假设系统稳定，请写出 $H(z)$的收敛域，并求出其单位冲激响应 $h(n)$。

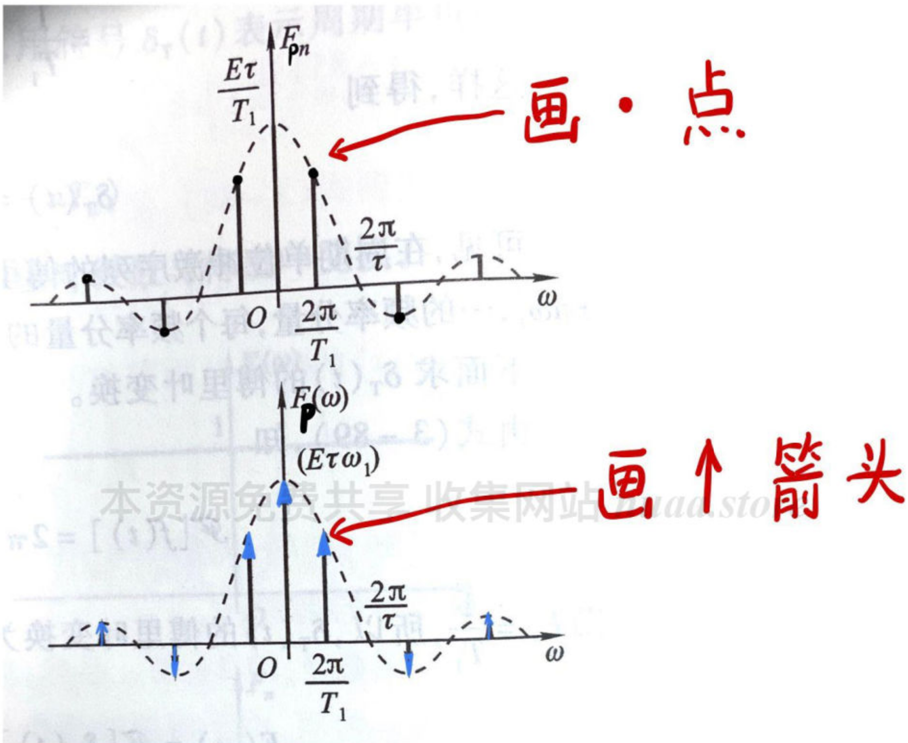
一、1.

模拟信号经过采样得到采样信号，再经过量化得到量化信号。模拟信号经过采样和量化编码形成数字信号。

一. 2.

频带宽度为 $\frac{2\pi}{\tau}$ rad/s

幅频响应随着w的增大而逐渐减小



一、3.

时域采样定理叙述如下：

（1）对连续信号进行等间隔采样形成采样信号，采样信号的频谱是原连续信号的频谱以采样频率 Ω_s 为周期进行周期性的延拓形成的

（2）设连续信号 $x_a(t)$ 属带限信号，最高截止频率为 Ω_c，如果采样角频率 $\Omega_s \geqslant 2\Omega_c$，那么让采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 通过一个增益为 T、截止频率为 $\Omega_s/2=\pi/T$ 的理想低通滤波器，可以唯一地恢复出原连续信号 $x_a(t)$。否则，$\Omega_s < 2\Omega_c$ 会造成采样信号中的频谱混叠现象，不可能无失真地恢复原连续信号。

N 为周期的周期延拓序列的主值序列。综上所述，可以总结出频域采样定理：

如果序列 $x(n)$ 的长度为 M，则只有当频域采样点数 $N \geqslant M$ 时，才有

$$x_N(n) = \mathrm{IDFT}[X(k)] = x(n)$$

即可由频域采样 $X(k)$ 恢复原序列 $x(n)$，否则产生时域混叠现象。

$$x_N(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n+iN) R_N(n)$$

一、3 第三小问的

下面讨论数字滤波器的频响特性与模拟滤波器的频响特性之间的关系。因为 $h(n)=h_a(nT)$，

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_a\left(\mathrm{j}\Omega-\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}k\right) \tag{6.3.8}$$

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_a\left(\mathrm{j}\frac{\omega-2\pi k}{T}\right) \tag{6.3.9}$$

上式说明，$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T})$是 $H_a(\mathrm{j}\Omega)$以 $2\pi/T$ 为周期的周期延拓函数(对数字频率 ω，则是以 2π 为周期)。如果原 $h_a(t)$的频带不是限于$\pm\pi/T$之间，则会在奇数 π/T 附近产生频谱混叠，对应数字频率在 $\omega=\pm\pi$ 附近产生频谱混叠。

响应[illegible]这种频谱混叠现象会使设计出的数字滤波器在 $\omega=\pm\pi$ 附近的频率响应特性程度不同的偏离模拟滤波器在 π/T 附近的频率特性，严重时使数字滤波器不满足给定的技术指标。为此，希望设计的

第四小问的

如果待逼近的滤波器为 $H_d(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，对应的单位脉冲响应为 $h_d(n)$，则由频率域采样定理知道，在频域 0～2π 范围等间隔采样 N 点，利用 IDFT 得到的 $h(n)$应是 $h_d(n)$以 N 为周期的周期延拓的主值区序列，即

$$h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h_d(n+mN)R_N(n)$$

如果 $H_d(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$有间断点，那么相应的单位脉冲响应 $h_d(n)$应是无限长的。这样，由于时域混叠及截断，使 $h(n)$与 $h_d(n)$有偏差。所以，频域的采样点数 N 愈大，时域混叠愈小，设计出的滤波器频响特性愈逼近 $H_d(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$。

一、4. 傅里叶变换是虚轴上的拉氏变换。

$$X(j\Omega) = X(S)\Big|_{S=j\Omega}$$

$$X(e^{jw}) = X(z)\Big|_{z=e^{jw}}$$

DTFT是在单位圆上的 Z 变换

$$X(k) = X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad k=0,\cdots,N-1$$

DFT 是 Z 变换 在单位圆上的 N点等间隔采样

$$X(k) = X(e^{jw})\Big|_{w=\frac{2\pi}{N}k}, \quad k=0,\cdots,N-1$$

DFT是DTFT在频率区间[0,2π]上的

N点等间隔采样

一、5.

为了减小谱分析的量化误差

ZFFT 的算法[1,2]

1) 确定中心频率 f_e、细化倍数 D_1 和分析频带 (f_1 ~ f_2); 2) 构造一个复解析带通滤波器 $h^0(n)$, 半阶数为 M_1, 可加窗; 3) 选抽滤波。选抽比为 D_1, 选抽出 N_1 点; 4) 复调制移频。将细化的起始频率移到零频点; 5) 加窗作 N_1 点 FFT和谱分析。

一.5.

先写 二.1. (1)

$$ax_1(n)+bx_2(n)\rightarrow n[ax_1(n)+bx_2(n)]$$

$$\rightarrow anx_1(n)+bnx_2(n)$$

$$=ay_1(n)+by_2(n)$$

所以线性

$$x(n-n_0)\rightarrow nx(n-n_0)$$

$$\neq y(n-n_0)$$

所以移变

(2)

$$ax_1(n)+bx_2(n)\rightarrow ax_1(6n+5)+bx_2(6n+5)$$

$$=ay_1(n)+by_2(n)$$

所以线性

$$x(n-n_0)\rightarrow x(6n+5-n_0)$$

$$\neq y(n-n_0)$$

所以移变

二. 2. (1)

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & 3 & 2 & 1 \\
\times & & & & 1 & 2 & 1 & 2 \\
\hline
 & & & & 2 & 6 & 4 & 2 \\
 & & & 1 & 3 & 2 & 1 & \\
 & & 2 & 6 & 4 & 2 & & \\
 & 1 & 3 & 2 & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & 5 & 9 & 10 & 10 & 5 & 2
\end{array}
$$

$$x(n) * h(n) = \{1, 5, 9, 10, 10, 5, 2\}$$

(2)

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & 5 & 9 & 10 & 10 & 5 \\
+ & 2 & & & & & \\
\hline
 & 3 & 5 & 9 & 10 & 10 & 5
\end{array}
$$

$$x(n) ⑥ h(n) = \{3, 5, 9, 10, 10, 5\}$$

(3) 圆周卷积长度需要大于等于线性卷积的长度，即

$$N \geq 4+4-1 = 7$$

求两个序列的7点圆周卷积，为

$$x(n) ⑦ h(n) = \{1, 5, 9, 10, 10, 5, 2\}$$

此时圆周卷积等于线性卷积

二. 3.

$x(t)$ 包含两个频率：

$$f_1 = \frac{4\pi}{2\pi} = 2\ Hz$$

$$f_2 = \frac{8\pi}{2\pi} = 4\ Hz$$

频率分辨率为 $4-2 = 2\ Hz$

因为 $2 < \frac{100}{45}$

所以不能分辨。

令 $N=100$，此时 $2 > \frac{100}{100}$，

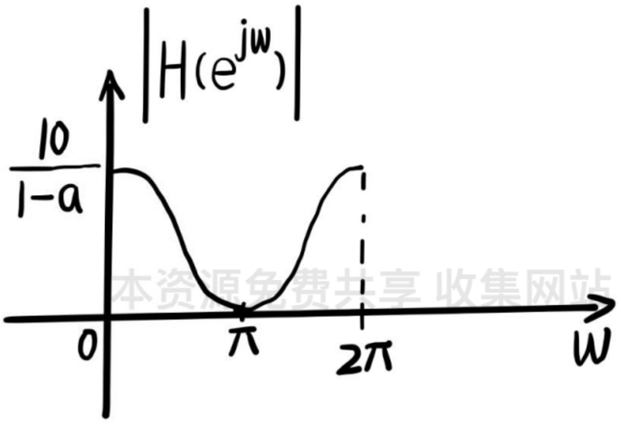
可以分辨。

$$\frac{100}{100} \times 10 = 10\ Hz$$

二. 4.

$$H(e^{jw}) = H(z)\Big|_{z=e^{jw}}$$

$$= 5\,\frac{1+e^{-jw}}{1-ae^{-jw}}$$



极点为 a，极点的位置影响幅频响应的峰值大小。极点越靠近单位圆，峰值越大

$a = 0.9$ 时 极点更靠近单位圆，峰值更大

二. 5.

$$x(n)=\frac{1}{N}\left\{DFT\left[X^*(k)\right]\right\}^*$$

$$X^*(k)=\{1,0,1,1\}$$

$$DFT\left[X^*(k)\right]=\{3,j,1,-j\}$$

$$\left\{DFT\left[X^*(k)\right]\right\}^*=\{3,-j,1,j\}$$

$$x(n)=\frac{1}{4}\left\{DFT\left[X^*(k)\right]\right\}^*$$

$$=\left\{\frac{3}{4},-\frac{j}{4},\frac{1}{4},\frac{j}{4}\right\}$$

二.6.

$N=36$，低通滤波器，只能选第2种类型

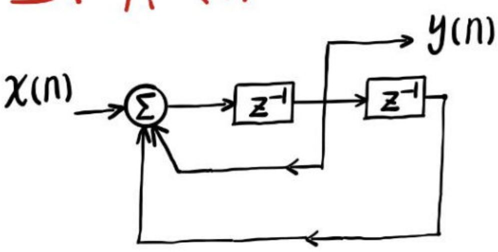
$$h(n)=h(N-1-n)$$

(2) $\frac{2\pi}{36}\times 9=\frac{\pi}{2}$ ，取 $k=9$

$$H(k)=\begin{cases} 1, & k=0,1,\cdots,8,9 \\ -1, & k=28,29,\cdots,35 \\ 0, & 其他k \end{cases}$$

$$\theta(k)=-\frac{N-1}{2}\frac{2\pi}{N}k=-\frac{35\pi}{36}k$$

二、7、(1)



(2)

$$y(n)-y(n-1)-y(n-2)=x(n-1)$$

$$(1-z^{-1}-z^{-2})Y(z)=z^{-1}X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}}$$

(3) 系统稳定，则收敛域包含单位圆，

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<|z|<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$H(z)=\frac{z}{z^2-z-1}$$

$$=\frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}z}{z-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}+\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}z}{z-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$h(n)=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n u(n)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n u(-n-1)$$