《线性代数》速成课

——框框老师

第一讲　行列式的计算（一）

1. 二阶行列式的计算

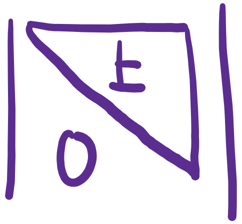
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$ (主－副)

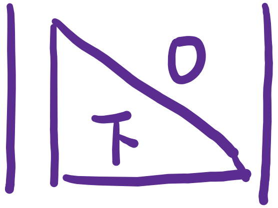
例. 求下列行列式的值：(1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

解: (1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\times1-(-2)\times2=7$

(2) $\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12\times1-(-2)\times1=14$

2. 三角形行列式的计算

(1) $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = a\cdot c - b\cdot 0 = ac \Rightarrow$  $=$ 主对角元素之积

(2) $\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = a\cdot c - 0\cdot b = ac \Rightarrow$  $=$ 主对角元素之积

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3$

(4) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3$

例 求三阶行列式.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

[分析]：①行列式的倍加性质：行列式的某行(或列)的k倍加到另一行(或列)，行列式的值不变.

②行列式中某一行(或列)的所有元素的公因子可以提到行列式外面.

③交换行列式的两行(或列)，行列式的值变号.

解：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & -7 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+3r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & -7 \\ 0 & 10 & -10 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{提因子}]{\text{第三行}} 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3} -10\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-6r_2} -10\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =(-10)\times 1\times 1\times(-1) =10$$

例. 求四阶行列式: $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

[分析] 利用三角形法计算行列式时, 若第1行第1列元素不是1, 可以先通过交换变为1, 再化为三角形.

解: $D \xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[r_4\text{提因子}5]{r_3\text{提因子}2} 10\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+\frac{1}{2}r_3} 10\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 10\times(1\times 2\times 4\times \frac{1}{2}) = 40$

例. 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}$

[分析] 每行元素之和相等 ——把第2,3列均加到第1列,再提公因子.

解: $D \xlongequal{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} x+2a & a & a \\ x+2a & x & a \\ x+2a & a & x \end{vmatrix} \xlongequal[\text{子}(x+2a)]{c_1\text{提因}} (x+2a)\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & x & a \\ 1 & a & x \end{vmatrix}$

$\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} (x+2a)\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x+2a)\cdot 1\cdot (x-a)\cdot (x-a)$

$= (x+2a)(x-a)^2$

3. 范德蒙行列式的计算

(1) $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$

范德蒙行列式

[分析]：特点：1° 第1行(或列)元素全为1；

2° 每1列(或行)元素均为等比数列，且公比元素在第2行(或列)；

3° 其结果为：公比元素作差再相乘。

解：$D \xlongequal[C_3-C_1]{C_2-C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ x_1^2 & x_2^2-x_1^2 & x_3^2-x_1^2 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[C_3\text{提 } x_3-x_1]{C_2\text{提 } x_2-x_1} (x_2-x_1)(x_3-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 1 \\ x_1^2 & x_2+x_1 & x_3+x_1 \end{vmatrix} \xlongequal{C_3-C_2} (x_2-x_1)(x_3-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_1^2 & x_2+x_1 & x_3-x_2 \end{vmatrix}$

$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$

3. 范德蒙行列式的计算

(1) $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$

[分析]：特点：1° 第1行(或列)元素全为1；

2° 每1列(或行)元素均为等比数列，且公比元素在第2行(或列)；

3° 其结果为：公比元素作差再相乘。

范德蒙行列式

(2) $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}=(b-a)\cdot(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$

3. 范德蒙行列式的计算

(1) $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$

范德蒙行列式

[分析]：特点：1° 第1行(或列)元素全为1；

2° 每1列(或行)元素均为等比数列，且公比元素在第2行(或列)；

3° 其结果为：公比元素作差再相乘。

(3) $D=\begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$

4 爪型行列式的计算

(1) 计算: $D=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ (其中 $a_i \neq 0,\ i=1,2,3,4$)

[分析]: "◸" 型行列式的计算方法:

① 首先将主对角线第 $2\sim n$ 个元素化为 1.(提公因子);

② 再将 "$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots \end{vmatrix}$" 化为三角形行列式.

解: $D \xlongequal[\text{子}a_i,\ i=2,3,4]{r_i\text{行提因}} a_2a_3a_4\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{a_2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[j=2,3,4]{r_1-r_j} a_2a_3a_4\begin{vmatrix} a_1-\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$= a_2a_3a_4\cdot\left[a_1-\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right]$$

4 爪型行列式的计算

(2) 计算：$D=\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} & \uparrow 2 & \uparrow 3 & \uparrow 4 \end{array}$

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

（其中 $a_i\neq 0,\ i=1,2,3,4$）

[分析]："⊼"型行列式的计算方法：
① 首先将主对角线第 $2\sim n$ 个元素化为 1，（提公因子）；
② 再将"┌┐"化为三角形行列式.

解：
$$D\xrightarrow[\text{子 }a_i,\ i=2,3,4]{r_i\text{ 行提因}} a_2a_3a_4\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{a_2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[j=2,3,4]{r_1-jr_j} a_2a_3a_4\begin{vmatrix} a_1-\frac{2}{a_2}-\frac{3}{a_3}-\frac{4}{a_4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=a_2a_3a_4\left(a_1-\frac{2}{a_2}-\frac{3}{a_3}-\frac{4}{a_4}\right)$$

第一讲　行列式的计算（续）

5. 余子式、代数余子式

① 余子式：设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则元素 a_{ij} 的余子式为去掉 a_{ij} 所在的行与所在的列所得到的行列式，记为 M_{ij}.

如：$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\quad M_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

② 代数余子式：称 $(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}.

即：$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

如 $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=-M_{12}$ $\quad A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=M_{33}$

③ 行列式的展开定理

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}, \quad i=1,2,3$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}, \quad j=1,2,3$$

行列式=某行(或列)元素乘以相应代数余子式再求和

例 求(1) $D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot A_{21}+0A_{22}+0A_{23} = 2\cdot(-1)^{2+1}M_{21} = 2$

(2) $D_3=\begin{vmatrix} 8 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot A_{12}+0A_{22}+0A_{32} = 3\cdot(-1)^{1+2}M_{12} = -3$

例：设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$，求 $A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$

[分析]：① $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}=aA_{11}+bA_{12}+cA_{13}$

② $k_1A_{11}+k_2A_{12}+k_3A_{13}=\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ （替换法）

解：$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}=-24$

问：若求 $M_{31}+M_{32}+M_{33}+M_{34}$ 呢？

6. 利用拆和的方法计算行列式

例. 若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，$D_1=\begin{vmatrix} -2a_{11} & 2a_{11}-a_{12} & a_{13} \\ -2a_{21} & 2a_{21}-a_{22} & a_{23} \\ -2a_{31} & 2a_{31}-a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 $D_1=$ ____

[分析]：① 当行列式的某一列(或行)的元素为两数之和时，行列式可分解为两个行列式之和.

② 当行列式的某两列(或行)的元素成比例，则此行列式等于0.

解：
$$D_1=\begin{vmatrix} -2a_{11} & 2a_{11}-a_{12} & a_{13} \\ -2a_{21} & 2a_{21}-a_{22} & a_{23} \\ -2a_{31} & 2a_{31}-a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{拆和}{=\!=} \begin{vmatrix} -2a_{11} & 2a_{11} & a_{13} \\ -2a_{21} & 2a_{21} & a_{23} \\ -2a_{31} & 2a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ -2a_{21} & -a_{22} & a_{23} \\ -2a_{31} & -a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=0+(-2)(-1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$$

7. 利用拉普拉斯公式计算行列式

一个常见公式：$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_4 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}$ （拉普拉斯公式）

例. 求 (1) $D_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ (2) $D_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

解：(1) $D_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

$= 1 \times 1 = 1$

(2) $D_2 \xlongequal[c_2 \leftrightarrow c_4]{c_1 \leftrightarrow c_3} (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times 4 = -8$

第二章　矩阵（一）　（三种题型）

1. 矩阵的乘法

设 $A_{2\times2}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2\times2}$，$B_{2\times3}=\begin{pmatrix} e & f & g \\ h & m & n \end{pmatrix}_{2\times3}$

则 $A_{2\times2}\cdot B_{2\times3}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2\times2}\cdot\begin{pmatrix} e & f & g \\ h & m & n \end{pmatrix}_{2\times3}=\begin{pmatrix} ae+bh & af+bm & ag+bn \\ ce+dh & cf+dm & cg+dn \end{pmatrix}_{2\times3}\overset{记}{=}C_{2\times3}$

注：① 矩阵相乘的合法性："内标相等".

② 矩阵相乘的结果："前行后列".

例 设 $A=\begin{pmatrix}4&-1&2&1\\1&1&0&3\\0&3&1&4\end{pmatrix}_{3\times4}$ $B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\3&0\\-1&2\end{pmatrix}_{4\times2}$ 求 AB

解: 记 $C=\underset{3\times4}{A}\cdot\underset{4\times2}{B}$,

则 $C_{3\times2}=\begin{pmatrix}4&-1&2&1\\1&1&0&3\\0&3&1&4\end{pmatrix}_{3\times4}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\3&0\\-1&2\end{pmatrix}_{4\times2}=\begin{pmatrix}4\times1+(-1)\times0+2\times3+1\times(-1) & 4\times2+(-1)\times1+2\times0+1\times2\\1\times1+1\times0+0\times3+3\times(-1) & 1\times2+1\times1+0\times0+3\times2\\0\times1+3\times0+1\times3+4\times(-1) & 0\times2+3\times1+1\times0+4\times2\end{pmatrix}_{3\times2}$

$=\begin{pmatrix}9&9\\-2&9\\-1&11\end{pmatrix}_{3\times2}$

例. 设 $A_{1\times3}=(1,2,3)$ ，$B_{3\times1}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ 求 (1) AB (2) BA

解: (1) $A_{1\times3}\cdot B_{3\times1}=(1,2,3)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=(1\times3+2\times2+3\times1)_{1\times1}=(10)_{1\times1}=10$

(2) $B_{3\times1}\cdot A_{1\times3}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}(1,2,3)=\begin{pmatrix}3\times1 & 3\times2 & 3\times3\\2\times1 & 2\times2 & 2\times3\\1\times1 & 1\times2 & 1\times3\end{pmatrix}_{3\times3}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\2 & 4 & 6\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}_{3\times3}$

注: ①矩阵的乘法不具有交换律: $AB\neq BA$

②矩阵的乘法满足分配律: $A(B+C)=AB+AC$

如: $AB+A=A(B+E)$

2. 抽象矩阵求逆矩阵

例. 设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$，求 $(A+2E)^{-1}$

[分析]：对方阵 A,B，若 $AB=E$（或 $BA=E$）$\Rightarrow$ 则称 A,B 互为逆矩阵，记为

$A^{-1}=B$，$B^{-1}=A$

法1 凑定义法：$(A+2E)\cdot\boxed{?}=E$

由 $A^2-A-2E=0$

$\Rightarrow A^2+2A-3A-2E=0$

$\Rightarrow (A+2E)A-3A-6E+6E-2E=0$

$\Rightarrow (A+2E)A-3(A+2E)+4E=0$

$\Rightarrow (A+2E)(A-3E)=-4E$

$\Rightarrow (A+2E)\cdot\frac{1}{-4}(A-3E)=E \Rightarrow (A+2E)^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3E)$

法2 长除法

$$
\begin{array}{r|l}
 & A-3E \\
\hline
A+2E & A^2-A-2E \\
 & A^2+2A \\
\hline
 & -3A-2E \\
 & -3A-6E \\
\hline
 & 4E
\end{array}
$$

$\therefore A^2-A-2E=(A+2E)(A-3E)+4E=0$

以下同法1

3. 数字型矩阵求逆

例. 求 $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1}.

[分析]: 利用行变换法求 A^{-1}: $(A|E)\xrightarrow{\text{多次行变换}}(E\,|\,A^{-1})$

解: $(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&2&1&1&0&0\\3&1&5&0&1&0\\3&2&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&2&1&1&0&0\\0&-1&4&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_1+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&9&-1&2&0\\0&-1&4&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3\cdot(\frac{1}{2})\\ r_1\cdot(\frac{1}{3})}]{r_2\cdot(-1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&1&-4&1&-1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+4r_3]{r_1-3r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{7}{6}&\frac{2}{3}&-\frac{3}{2}\\0&1&0&-1&-1&2\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$

$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{6}&\frac{2}{3}&-\frac{3}{2}\\-1&-1&2\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ 的 A^{-1}

[分析]：二阶矩阵 A^{-1} 的秒杀法："两调一除"

若 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，且 $|A|\neq 0 \Rightarrow$ 则 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

解：法1：$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}1 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix}=6\neq 0 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

法2：行变换法：

$$(A|E)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 4 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+r_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 6 & 1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-\frac{2}{3}r_2]{\frac{1}{6}r_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{array}\right) \quad \therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

[小结]：方阵 A 可逆 $\Longleftrightarrow |A|\neq 0$

第二章　矩阵（二）　（三种题型）

1. 求解矩阵方程

① 若 $A\cdot X=B \Rightarrow$ 则 $X=A^{-1}B$　② 若 $X\cdot A=B \Rightarrow$ 则 $X=BA^{-1}$

③ 若 $A\cdot X\cdot B=C \Rightarrow$ 则 $X=A^{-1}CB^{-1}$

例：解下列矩阵方程：$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

[分析]：若 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$，两调一除

解：设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，$|A|=1\neq 0 \xrightarrow{\text{"两调一除"}} A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

设 $B=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　由 $A\cdot X=B$ 得：

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

例：解下列方程：

$$X\cdot\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}$$

解：①设 $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$|A|=\begin{vmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{vmatrix}\overset{r_1+r_3}{=\!=}\begin{vmatrix}3&0&0\\2&1&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=3\neq0$

② 初等行变换法求 A^{-1}：

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\1&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_2]{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&0&0&1\\2&1&-1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-2r_1]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&0&0&1\\0&3&-3&1&0&-2\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+3r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&-1&1\\0&3&0&-2&3&-2\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{3}]{r_1+\frac{1}{3}r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\0&1&0&-\frac{2}{3}&1&-\frac{2}{3}\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&1&-\frac{2}{3}\\-1&1&0\end{pmatrix}=A^{-1}$$

例：解下列方程：

$$X\cdot\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}$$

解：① 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$|A|=\begin{vmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{vmatrix}\overset{r_1+r_3}{=}\begin{vmatrix}3&0&0\\2&1&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=3\neq0$

② 初等行变换法求 A^{-1}：

$$(A|E)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\0&1&0&-\frac{2}{3}&1&-\frac{2}{3}\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&1&-\frac{2}{3}\\-1&1&0\end{pmatrix}=A^{-1}$$

再由 $X\cdot A=B\Rightarrow X=BA^{-1}$

故. $X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&1&-\frac{2}{3}\\-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&1\\-\frac{8}{3}&5&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

例. 设矩阵 X 满足：$A^*X = A^{-1}B + 2X$，其中，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

求矩阵 X.

[分析]： A^* 称为 A 的伴随矩阵，且 $AA^* = A^*A = |A|\cdot E$，$A^* = |A|\cdot A^{-1}$

解：① 由方程 $A^*X = A^{-1}B + 2X \xRightarrow{\text{左乘}A} A\cdot A^*\cdot X = AA^{-1}B + 2A\cdot X$

$\Rightarrow |A|\cdot X = B + 2AX$ （其中 $|A| = 4$）

$\Rightarrow (4E-2A)X = B \Rightarrow X = (4E-2A)^{-1}B$

② 其中：$(4E-2A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，利用初等变换法得：

$$(4E-2A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 方阵的行列式

常见公式：$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ ；$|A^T|=|A|$ ；$|kA_{n\times n}|=k^n|A|$ ；$|A^*_{n\times n}|=|A|^{n-1}$

常见错误：$|A+B|\neq|A|+|B|$

例. 设 $A_{3\times3}$，$|A|=\frac{1}{2}$，求 $|(3A)^{-1}-2A^*|$

[分析]：见 A^*，想公式：$A^*=|A|\cdot A^{-1}$

错解：$|(3A)^{-1}-2A^*| \cancel{=} |(3A)^{-1}|+|-2A^*|$

解：由 $A^*=|A|\cdot A^{-1} \Rightarrow A^*=\frac{1}{2}A^{-1} \Rightarrow 2A^*=A^{-1}$

$\Rightarrow |(3A)^{-1}-2A^*| = |\frac{1}{3}A^{-1}-A^{-1}| = |-\frac{2}{3}\underset{3\times3}{A^{-1}}| = (-\frac{2}{3})^3\cdot|A^{-1}| = -\frac{16}{27}$

3. 矩阵的秩

例. 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$，求 $r(A)$

[分析]：① 行阶梯形的特点：矩阵中每一行的首个非0元素所在的列比下一行的首个非0元素所在的列都靠前。

如：$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

② 利用行初等变换法化 A 为阶梯形 B，$r(A)=B$ 中非0行的行数.

3. 矩阵的秩

例. 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$，求 $r(A)$

[分析]：① 行阶梯形的特点：矩阵 A 中每一行的首个非 0 元素所在的列比下一行的首个非 0 元素所在的列都靠前。

② 利用行初等变换法化 A 为阶梯形 B，$r(A)=B$ 中非 0 行的行数.

解：
$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore r(A)=2$

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}$，问 k 为何值时，可使 (1) $r(A)=1$；(2) $r(A)=2$；(3) $r(A)=3$.

解：化 A 为行阶梯形：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-kr_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ 0 & 2(k-1) & 3(k-1) \\ 0 & 2(k-1) & -3(k^2-1) \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ 0 & 2(k-1) & 3(k-1) \\ 0 & 0 & -3(k-1)(k+2) \end{pmatrix}$$

① 若 $r(A)=1 \Rightarrow$ 阶梯形非 0 行数 $=1 \Rightarrow k=1$

② 若 $r(A)=2 \Rightarrow$ 阶梯形非 0 行数 $=2 \Rightarrow k=-2$

③ 若 $r(A)=3 \Rightarrow$ 阶梯形非 0 行数 $=3 \Rightarrow k\neq 1$ 且 $k\neq -2$

第三章　向量组的线性相关性（三种题型）

1. 判别向量组的线性相关性（数字型）

例. 求下列向量组的相关性：

(1) $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$　　(2) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$

[分析]: ① 两个向量 α_1 与 α_2 相关 $\Longleftrightarrow$ α_1 与 α_2 对应成比例 $\overset{\text{方阵}}{\Longleftrightarrow} |\alpha_1,\alpha_2|=0$

② 多个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 相关（无关）$\overset{\text{方阵}}{\Longleftrightarrow} |\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_m|=0\ (\neq 0)$

$\Longleftrightarrow r(\alpha_1\cdots\alpha_m)<m\ (=m)$

解: (1) 法1: $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ 不成比例 $\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2$ 无关

法2: $|\alpha_1\ \alpha_2| = \begin{vmatrix}2&-1\\5&3\end{vmatrix}=11\neq 0 \Rightarrow \alpha_1,\alpha_2$ 无关

法3: $(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix}2&-1\\5&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-\frac{5}{2}r_1}\begin{pmatrix}2&-1\\0&11/2\end{pmatrix}\Rightarrow r(\alpha_1,\alpha_2)=2\Rightarrow$ 无关

1. 判别向量组的线性相关性（数字型）

例. 求下列向量组的相关性：

(1) $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$　　(2) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$

[分析]：① 两个向量 α_1 与 α_2 相关 $\Leftrightarrow$ α_1 与 α_2 对应成比例；

② 多个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 相关（无关）$\overset{\text{方阵}}{\Longleftrightarrow}$ $|\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_m|=0$ $(\neq 0)$

$\Longleftrightarrow r(\alpha_1\cdots\alpha_m)<m$ $(=m)$

(2) 法1：$|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\-2&2&0\\3&-5&2\end{vmatrix}\overset{c_3+c_1}{=\!=}\begin{vmatrix}1&0&0\\-2&2&-2\\3&-5&5\end{vmatrix}=0\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 相关

法2：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&2&0\\3&-5&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&-2\\0&-5&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow r(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=2<3$

$\Rightarrow$ 相关

例 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}6\\a+1\\3\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}a\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}$

(1) 问 $a=?$ 时，α_1,α_2 相关；(2) $a=?$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关。

解：(1) α_1 与 α_2 相关 $\Rightarrow$ α_1 与 α_2 对应成比例 $\Rightarrow \frac{6}{a}=\frac{a+1}{2}=\frac{3}{-2} \Rightarrow a=-4$

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关 $\xRightarrow{\text{方阵}} |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\neq 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}6 & a & a\\ a+1 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 0\end{vmatrix} \overset{r_1-ar_2}{=\!=} \begin{vmatrix}-a^2-a+6 & -a & 0\\ a+1 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 0\end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-a^2-a+6 & -a\\ 3 & -2\end{vmatrix}$$

$$= -(2a-3)(a+4)\neq 0$$

$\therefore a\neq\frac{3}{2}$ 且 $a\neq -4$

2. 判别向量组的线性相关性（抽象型）

例. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，问向量组 $\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_3-2\alpha_1$ 的相关性？

[分析]：① 抽象向量组的表示方法： $(\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = (\alpha_1+3\alpha_2,\ 2\alpha_1+4\alpha_2)$

$\Rightarrow$ 逆向思维： $(\alpha_1+3\alpha_2,\ 2\alpha_1+4\alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 类似 $(\alpha_1-\alpha_2,\ 2\alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$

② 若 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}_{\text{无关}} \cdot C$

且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 无关，则当 $|C|=0\ (\neq 0) \Leftrightarrow \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 相关（无关）

无关组 · 可逆阵 ⇒ 无关

无关组 · 不可逆阵 ⇒ 相关

2. 判别向量组的线性相关性（抽象型）

例 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，问向量组 $\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_3-2\alpha_1$ 的相关性？

[分析]：① 抽象向量组的表示方法：

$\Rightarrow$ 类似 $(\alpha_1-\alpha_2,\ 2\alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$

② 若 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{\text{无关}}\cdot C$

且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关，则当 $|C|=0\ (\neq 0)\Leftrightarrow \beta_1,\beta_2,\beta_3$ 相关（无关）

无关组·可逆阵 $\Rightarrow$ 无关
无关组·不可逆阵 $\Rightarrow$ 相关

解：$(\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_3-2\alpha_1)=\underbrace{(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)}_{\text{无关}}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&-2\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}}_{\text{记}C}$

其中：$|C|=\begin{vmatrix}1&0&-2\\-1&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&1&-2\\0&-1&1\end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow C$ 可逆 $\Rightarrow$ 无关组·可逆阵 $=$ 无关

即 $\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_3-2\alpha_1$ 无关

3. 求向量组的秩与极大无关组.

例. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\\-6\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\\-7\end{pmatrix}$，求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩与一个极大无关组.

[分析]：① $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$ 矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的阶梯形中非0行数.

② $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的极大无关组一般取阶梯形中拐弯处所在的列向量.

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&4&1\\2&-1&-3\\1&-5&-4\\3&-6&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&4&1\\0&-9&-5\\0&-9&-5\\0&-18&-10\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&4&1\\0&-9&-5\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\\alpha_1'\quad\alpha_2'\quad\alpha_3'\end{array}$

$\Rightarrow r(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=2\Rightarrow$ 则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的极大无关组含有两个向量，取 α_1,α_2 即可

第四章 线性方程组（三种题型）

1. 齐次方程组 $A\cdot X=0$ 的求解.

例. 求方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=0 \\ 4x_1-2x_2+6x_3-5x_4+x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-16x_5=0 \end{cases}$ 的基础解系，及通解.

[分析]: ① $A_{m\times n}\cdot X=0$，$\begin{cases} 若\ r(A_{m\times n})=n \iff A\cdot X=0\ 只有零解\ (唯一解) \\ 若\ r(A_{m\times n})<n \iff A\cdot X=0\ 有非零解\ (无穷解) \end{cases}$

② 基础解系：当 $AX=0$ 有无穷解时，解集的极大的无关组称为基础解系。

基础解系所含解向量个数 $=n-r(A)$ 个.

③ 基础解系求法：把系数阵化为行最简形，如 $A\to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 4} \end{array}$

$\Rightarrow$ 基础解系有 $n-r(A)=2$ 个向量，记 $\xi_1=\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 通解 $X=k_1\xi_1+k_2\xi_2$，k_1,k_2 任意常数.

1. 齐次方程组 $A\cdot X=0$ 的求解.

例. 求方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=0 \\ 4x_1-2x_2+6x_3-5x_4+x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-16x_5=0 \end{cases}$ 的基础解系，及通解.

非拐弯处变量作为自由变量

[分析] 基础解系求法：把系数阵化为行最简形，如 $A\to\begin{array}{cccc} & & x_3 & x_4 \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times4}$

$\Rightarrow$ 基础解系有 $n-r(A)=2$ 个向量，记 $\xi_1=\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

解: $A_{4\times5}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -16 \end{pmatrix}_{4\times5} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{array}{ccccc} & & x_3 & & x_5 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times5}$ $\Rightarrow r(A)=3<5 \Rightarrow$ 有无穷解

$\Rightarrow$ 基础解系含 $n-r(A)=2$ 个向量，$\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \boxed{0} \\ 1 \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$, 通解 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2$, k_1,k_2 为任意常数.

2. 非齐次方程组的求解.

例. 求方程组 $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4 \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2 \end{cases}$ 的通解.

[分析]: ① $A_{m\times n}x=b$, $\begin{cases} 若\ r(A)=r(A|b) \begin{cases} <n \Rightarrow Ax=b\ 有无穷解. \\ =n \Rightarrow Ax=b\ 有唯一解. \end{cases} \\ 若\ r(A)\neq r(A|b) \Rightarrow Ax=b\ 无解. \end{cases}$

② 非齐通 = 齐通 + 非齐特

③ 例如 $\underset{2\times 4}{A}X=b$ 的增广阵 $(A|b) \xrightarrow{行最简} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow r(A)=2=r(A|b)<4$

1° $AX=0$ 的基础解系: $\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \Rightarrow$ 齐通 $=k_1\xi_1+k_2\xi_2$.

2° $Ax=b$ 的特解: $\eta=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$, 则 $Ax=b$ 通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta$.

2. 非齐次方程组的求解.

例. 求方程组 $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4 \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2 \end{cases}$ 的通解.

解: 增广阵 $(A_{3\times4}|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行最简形}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/11 & 9/11 & -2/11 \\ 0 & 1 & 5/11 & -1/11 & 10/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$

$\Rightarrow r(A_{3\times4})=2=r(A|b)<4 \Rightarrow Ax=b$ 有无穷解.

1° 齐次方程 $AX=0$ 的基础解系: $\xi_1=\begin{pmatrix} 1/11 \\ -5/11 \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix} -9/11 \\ 1/11 \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$

2° 非齐方程 $AX=b$ 的特解: $\eta=\begin{pmatrix} -2/11 \\ 10/11 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$

故通解: $X=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta$.

其中 k_1, k_2 为任意常数.

3. 带参数方程组的求解

例. 设 $A_{3\times3}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，已知 $Ax=b$ 存在两个不同解. (1) 求 λ, a.

(2) 求 $Ax=b$ 通解

[分析]：$Ax=b$ 有两个不同解 $\alpha_1,\alpha_2 \Rightarrow Ax=b$ 有无穷解

解：由题意：$Ax=b$ 有无穷解 $\Rightarrow r(A_{3\times3})=r(A|b)<3$

① 而增广阵：$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ \lambda & 1 & 1 & a\end{array}\right)\xrightarrow[\text{梯形}]{\text{行阶}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1\end{array}\right)$

要使 $r(A)=r(A|b)<3 \Rightarrow \begin{cases}\lambda-1\neq0\\ 1-\lambda^2=0 \text{ 且 } a-\lambda+1=0\end{cases} \Rightarrow \lambda=-1,\ a=-2$

3. 带参数方程组的求解

例. 设 $A_{3\times3}=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$, 已知 $Ax=b$ 存在两个不同解. (1) 求 λ, a.

(2) 求 $Ax=b$ 通解

[分析]: $Ax=b$ 有两个不同解 $\alpha_1,\alpha_2 \Rightarrow Ax=b$ 有无穷解

解: 由题意: $Ax=b$ 有无穷解 $\Rightarrow r(A_{3\times3})=r(A|b)<3$

① 而增广阵: $(A|b)\xrightarrow[\text{梯形}]{\text{行阶}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\0&0&1-\lambda^2&a-\lambda+1\end{array}\right)$ $\Rightarrow \lambda=-1,\ a=-2$

② $(A|b)\xrightarrow[\text{形}]{\text{阶梯}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-2&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[\text{形}]{\text{最简}}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc|c}&&x_3&\end{array}\\\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&3/2\\0&1&0&-1/2\\0&0&0&0\end{array}\right)\end{array}$ $\Rightarrow r(A)=2=r(A|b)<3$

$\Rightarrow$ 基础解系有 $3-r(A)=1$ 个向量: $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\boxed{1}\end{pmatrix}$, 非齐特 $\eta=\begin{pmatrix}3/2\\-1/2\\\boxed{0}\end{pmatrix}$, 通解 $x=k_1\xi_1+\eta$, k_1为任常.

第五章 矩阵的特征值与特征向量（三种题型）

1. 特征值与特征向量的求法.(数字型)

例. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

[分析]: ① 求A的特征值的方法: 由 $|\lambda E-A|=0$ 解得 λ 即为A的特征值.

② 求A的对应于 λ_0 的特征向量的方法: 方程组 $(\lambda_0 E-A)\cdot x=0$ 的基础解系.

解: 1° 由特征方程 $|\lambda E-A|=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda-1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda-6 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{有公因子}]{\text{消非}\lambda\text{元素}} \begin{vmatrix} \lambda+1 & -\lambda-1 & 0 \\ -2 & \lambda-1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda-6 \end{vmatrix} \xlongequal{C_2+C_1} \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-3 & -3 \\ -3 & -6 & \lambda-6 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -3 \\ -6 & \lambda-6 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-9)\cdot\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=9,\ \lambda_3=0$$

1. 特征值与特征向量的求法.(数字型)

例. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

[分析]: ① 求 A 的特征值的方法: 由 $|\lambda E-A|=0$ 解得 λ 即为 A 的特征值.

② 求 A 的对应于 λ_0 的特征向量的方法: 方程组 $(\lambda_0 E-A)\cdot x=0$ 的基础解系.

解: 1° 由特征方程 $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=9,\ \lambda_3=0$

2°. ① 当 $\lambda_1=-1$ 时, 由齐次方程组 $(\lambda_1 E-A)\cdot X=0$ 得:

$$(\lambda_1 E-A)=(-E-A)=\begin{pmatrix}-2&-2&-3\\-2&-2&-3\\-3&-3&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行简}}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} & x_2 & \end{array}\\ \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\Rightarrow r(\lambda_1 E-A)=2<3$$

$\Rightarrow$ 基础解系有 $3-2=1$ 个向量: $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ \boxed{1}\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ 对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,

$k_1\neq 0$ 常

1. 特征值与特征向量的求法.(数字型)

例. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

[分析]: ① 求 A 的特征值的方法: 由 $|\lambda E-A|=0$ 解得 λ 即为 A 的特征值.

② 求 A 的对应于 λ_0 的特征向量的方法: 方程组 $(\lambda_0 E-A)\cdot x=0$ 的基础解系.

解: 1° 由特征方程 $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=9,\ \lambda_3=0$

2° ② 当 $\lambda_2=9$ 时, 由 $(\lambda_2 E-A)\cdot x=0$ 得:

$$(\lambda_2 E-A)=(9E-A)=\begin{pmatrix}8&-2&-3\\-2&8&-3\\-3&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{最简形}}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}&&x_3\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$ 由 $r(9E-A)=2<3$,

基础解系有 $3-2=1$ 个向量, $\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\boxed{1}\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ 对应 $\lambda_2=9$ 的特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$, $k_2\in\forall$常.

1. 特征值与特征向量的求法.(数字型)

例. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

[分析]: ① 求 A 的特征值的方法: 由 $|\lambda E-A|=0$ 解得 λ 即为 A 的特征值.

② 求 A 的对应于 λ_0 的特征向量的方法: 方程组 $(\lambda_0 E-A)\cdot x=0$ 的基础解系.

解: 1° 由特征方程 $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=9,\ \lambda_3=0$

2° ③ 当 $\lambda_3=0$ 时, 由 $(\lambda_3 E-A)x=0$ 得:

$$(\lambda_3 E-A)=(0E-A)=-A=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\-2&-1&-3\\-3&-3&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{最简形}}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}&&x_3\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\Rightarrow r(0E-A)=2<3$$

基础解系含有 $3-2=1$ 个向量: $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\\boxed{1}\end{pmatrix} \Rightarrow$ 对应 $\lambda_3=0$ 的特征向量为: $k_3\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $k_3\in$非

2. 特征值与特征向量的求法.(抽象型)

例. 已知三阶矩阵 A 的特征值为：1，-1，2，求(1) $B=A^3-5A^2$ 的特征值；(2)求 $|B|$

[分析] 关于 A 的若干性质：

A的迹

① 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \Rightarrow |A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$；$tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$

② 若 λ 为 A 的特征值，α 为对应于 λ 的特征向量，则：$A\alpha=\lambda\alpha$ $(\alpha\neq0)$

	A	A^2	$A^3+5A-6E$	A^{-1}	A^*	A^T	$B=P^{-1}AP$
特征值	λ	λ^2	$\lambda^3+5\lambda-6$	$\frac{1}{\lambda}$	$\lvert A\rvert/\lambda$	λ	λ
特征向量	α	α	α	α	α	不确定	$P^{-1}\alpha$

例如：A 有特征值 $\lambda=3 \Rightarrow A^2$ 有特征值 $\lambda^2=9$，A^{-1} 有 $\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{3}$，$2A-2E$ 有 $2\lambda-2=4$.

2. 特征值与特征向量的求法.(抽象型)

例. 已知三阶矩阵 A 的特征值为: $1, -1, 2$, 求 (1) $B=A^3-5A^2$ 的特征值; (2) 求 $|B|$

[分析] 关于 A 的若干性质:

① 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \Rightarrow |A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$; $\underbrace{tr(A)}_{A\text{的迹}}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$

② 若 λ 为 A 的特征值, α 为对应于 λ 的特征向量, 则: $A\alpha=\lambda\alpha \ (\alpha\neq 0)$

解: 由 A 的三个特征值为 $\lambda_1=1$; $\lambda_2=-1$; $\lambda_3=2$

(1) 则 $B=A^3-5A^2$ 的特征值为 $\lambda^3-5\lambda^2=-4$; -6 ; -12

(2) $|B|=B$ 的特征值之积 $=-4\times(-6)\times(-12)=-288$

3. 矩阵的相似对角化.

例. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$，求一个可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$（其中 Λ 为对角阵）

[分析]：① 若 P 可逆，使 $P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow$ 称 A 可相似对角化.

② 把矩阵 A 对角化的步骤：1° 求 A 特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$；

2° 求 A 的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；　3° 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$

解：1° 由 $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda+2 & -2\\ 1 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix} \xlongequal[\text{有公因子}]{\text{消非入元素}} \begin{vmatrix}\lambda & 0 & \lambda\\ -2 & \lambda+2 & -2\\ 1 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ -2 & \lambda+2 & 0\\ 1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+2)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=-2$

3. 矩阵的相似对角化.

例. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$，求一个可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$（其中 Λ 为对角阵）

[分析]：① 若 P 可逆，使 $P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow$ 称 A 可相似对角化.

② 把矩阵 A 对角化的步骤：1° 求 A 特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ ；

2° 求 A 的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ； 3° 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$

解：1°. 由 $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=-2$

2°. ① 当 $\lambda_1=\lambda_2=0$（二重根）时，由 $(0E-A)\cdot X=0$ 得：$(0E-A)=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-2&2&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}\rightarrow \begin{array}{c}\begin{matrix}\quad & x_2 & x_3\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$

$\Rightarrow r(0E-A)=1<3 \Rightarrow$ 基础解系即特征向量为：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

② 当 $\lambda_3=-2$ 时，由 $(-2E-A)X=0$ 得：$(-2E-A)=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-2&0&-2\\1&-1&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$

3. 矩阵的相似对角化.

例. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$，求一个可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$（其中 Λ 为对角阵）

[分析]：① 若 P 可逆，使 $P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow$ 称 A 可相似对角化.

② 把矩阵 A 对角化的步骤：1° 求 A 特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$；

2° 求 A 的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；3° 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$

解：1°. 由 $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=-2$

2°. ① 当 $\lambda_1=\lambda_2=0$（二重根）时，特征向量为：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\\boxed{1}\\\boxed{0}\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\\boxed{0}\\\boxed{1}\end{pmatrix}$

② 当 $\lambda_3=-2$ 时，特征向量为：$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\\boxed{1}\end{pmatrix}$

3°. 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$，可使 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&-2\end{pmatrix}$

例. 设 $A=\begin{pmatrix}17&-2&-2\\-2&14&-4\\-2&-4&14\end{pmatrix}$，求一个正交阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$（其中 Λ 为对角阵）

$Q^{-1}=Q^T$

[分析]：① 若 $A^T=A \Rightarrow$ 则一定存在正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=\Lambda$

施密特正交化：

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1\\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1\end{cases}$$

② 把对称阵 A 对角化的步骤：1° 求 A 特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$；

2° 求 A 的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；3° 把 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中不正交的向量正交化：若 α_1,α_2 不正交，则令

4° 单位化所有特征向量得：ξ_1,ξ_2,ξ_3； 5°. 令 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则 $Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$

解：① 由 $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}\lambda-17&2&2\\2&\lambda-14&4\\2&4&\lambda-14\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (\lambda-18)^2(\lambda-9)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=18,\quad \lambda_3=9.$

例. 设 $A=\begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$，求一个正交阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$（其中 Λ 为对角阵）

② 把对称阵 A 对角化的步骤：1° 求 A 特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$；

2° 求 A 的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；$3^\circ$ 把 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中不正交的向量正交化：若 α_1,α_2 不正交，则令

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_1 \\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 \end{cases}$$

4° 单位化所有特征向量得：$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$；　5° 令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，则 $Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

解：① 由 $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=18$，$\lambda_3=9$.

② 当 $\lambda_1=\lambda_2=18$ 时，由 $(18E-A)\cdot X=0$ 得基础解系即特征向量：$\alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=9$ 时，由 $(9E-A)\cdot X=0$ 得 $\alpha_3=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

③ 把 $\alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化：

令 $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix} -2/5 \\ -4/5 \\ 1 \end{pmatrix}$

④ 把 β_1,β_2,α_3 单位化：令 $\gamma_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\gamma_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\dfrac{1}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$，　$\gamma_3=\dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

例. 设 $A=\begin{pmatrix}17&-2&-2\\-2&14&-4\\-2&-4&14\end{pmatrix}$，求一个正交阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$（其中 Λ 为对角阵）

② 把对称阵 A 对角化的步骤：1° 求 A 特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$；

2° 求 A 的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；3° 把 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中不正交的向量正交化：若 α_1,α_2 不正交，则令 $\begin{cases}\beta_1=\alpha_1\\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1\end{cases}$

4° 单位化所有特征向量得：ξ_1,ξ_2,ξ_3；5° 令 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则 $Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$

解：① 由 $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=18$，$\lambda_3=9$.

③ 把 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ 正交化：

令 $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=\begin{pmatrix}-2/5\\-4/5\\1\end{pmatrix}$

④ 把 β_1,β_2,α_3 单位化：令 $\xi_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

$\xi_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\dfrac{1}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix}-2\\-4\\5\end{pmatrix}$，$\xi_3=\dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

⑤ 令 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-2/\sqrt5&-2/\sqrt{45}&1/3\\1/\sqrt5&-4/\sqrt{45}&2/3\\0&5/\sqrt{45}&2/3\end{pmatrix}$，可使 $\underset{\underset{Q^TAQ}{\parallel}}{Q^{-1}AQ}=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&&\\&18&\\&&9\end{pmatrix}$.

第六讲 二次型（三种题型）

1. 二次型的矩阵表示

例. 把下列二次型的矩阵写出来：

(1) $f(x_1,x_2)=2x_1^2-x_2^2+6x_1x_2$　　(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2x_3$

[分析] 二次型的矩阵 3 要素：1° $A^T=A$；2° A 的主对角元素为平方项系数；

3° A 的其它元素为交叉项系数的一半.

解：(1) $f(x_1,x_2)=2x_1^2-x_2^2+6x_1x_2=(x_1,x_2)\underbrace{\begin{pmatrix}2&3\\3&-1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=x^TAx.\Rightarrow A=\begin{pmatrix}2&3\\3&-1\end{pmatrix}$

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&-3/2\\1&-3/2&-1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x^TAx\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&-3/2\\1&-3/2&-1\end{pmatrix}$

例. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为2，求c.

[分析]：二次型 f 的秩 $= r(A)$

解：$A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{pmatrix}$，由 $r(f)=2 \Rightarrow r(A)=2$

而 $A\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}-1&5&-3\\0&24&-12\\0&12&c-9\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}-1&5&-3\\0&2&-1\\0&12&c-9\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}-1&5&-3\\0&2&-1\\0&0&c-3\end{pmatrix}$，要使 $r(A)=2$

有 $c=3$

2. 化二次型为标准形.

例. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3$.

(1) 利用配方法化 f 为标准形；(2) 利用正交变化法化 f 为标准形；

[分析]: (1). 关于配方法：

$$\begin{cases} a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2 \\ a^2+ab=a^2+2a\cdot\frac{b}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{1}{4}b^2 \end{cases}$$

解: (1) 配方法: 1° 先配所有含 x_1 的项:

$$\begin{aligned} f&=2x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+2x_3^2-2x_2x_3 \\ &=2\left[x_1^2+x_1x_2+x_1x_3\right]+2x_2^2+2x_3^2-2x_2x_3 \\ &=2\left[x_1^2+x_1(x_2+x_3)+\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)^2\right]-2\cdot\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_2x_3 \\ &=2\left(x_1+\frac{x_2+x_3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}x_2^2+\frac{3}{2}x_3^2-3x_2x_3 \end{aligned}$$

2. 化二次型为标准形.

例. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3$.

(1) 利用配方法化 f 为标准形; (2) 利用正交变化法化 f 为标准形;

[分析]: (1). 关于配方法:
$$\begin{cases} a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2 \\ a^2+ab=a^2+2a\cdot\frac{b}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{1}{4}b^2 \end{cases}$$

解: (1) 配方法: 1° 先配所有含 x_1 的项:

$$f=2x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+2x_3^2-2x_2x_3=2\left[x_1+\frac{x_2+x_3}{2}\right]^2+\frac{3}{2}x_2^2+\frac{3}{2}x_3^2-3x_2x_3$$

2° 再配所有含 x_2 的项

$$f=2\left[x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{2}\right]^2+\frac{3}{2}(x_2^2-2x_2x_3)+\frac{3}{2}x_3^2=2\left(x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2+0x_3^2$$

$+x_3^2$ $\quad -\frac{3}{2}x_3^2$

2. 化二次型为标准形.

例. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3$.

(1) 利用配方法化 f 为标准形；(2) 利用正交变化法化 f 为标准形；

解：(1) 配方法：1° 先配所有含 x_1 的项：

$$f=2x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+2x_3^2-2x_2x_3=2\left[x_1+\frac{x_2+x_3}{2}\right]^2+\frac{3}{2}x_2^2+\frac{3}{2}x_3^2-3x_2x_3$$

2° 再配所有含 x_2 的项

$$f=2\left[x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{2}\right]^2+\frac{3}{2}(x_2^2-2x_2x_3)+\frac{3}{2}x_3^2=2\left(x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2+0x_3^2$$

3° 当所有项都为完全平方项时，换元：令 $\begin{cases} y_1=x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{2} \\ y_2=x_2-x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$ 得 $f=2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2+0y_3^2$ 为标准形

2. 化二次型为标准形.

例. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3$.

(1) 利用配方法化 f 为标准形；(2) 利用正交变化法化 f 为标准形；

[分析] (2). 正交变换法：1° 写出 f 的矩阵 A ；2° 求 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ ；

3° 求 A 的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ；4° 把 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中不正交的向量施密特正交化；

5° 把以上所有向量单位化为 ξ_1,ξ_2,ξ_3 ，则 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 为正交矩阵；

6° 作变换：令 $x=Qy$ ，可使 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$ 标准形.

解：(2) 正交法： 1° $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$ ；

2° 求 λ：由 $|\lambda E-A|=0$ $\Rightarrow \begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}\overset{r_1+r_3}{=}\begin{vmatrix}\lambda-3&0&\lambda-3\\-1&\lambda-2&1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2\lambda=0$，

故：$\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=0$

2. 化二次型为标准形.

例. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3$，

(1) 利用配方法化 f 为标准形；(2) 利用正交变化法化 f 为标准形；

3° 求 A 的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；4° 把 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中不正交的向量施密特正交化；

5° 把以上所有向量单位化为 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$，则 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ 为正交矩阵；

6° 作变换：令 $x=Qy$，可使 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$ 标准形.

解：(2) 正交法：1° $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$；2° 故：$\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=0$

3° 求特征向量：① 当 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 时，由 $(3E-A)\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

② 当 $\lambda_3=0$ 时，由 $(0E-A)\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

2. 化二次型为标准形.

例. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3$,

(1) 利用配方法化 f 为标准形；(2) 利用正交变化法化 f 为标准形；

3° 求 A 的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；4° 把 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中不正交的向量施密特正交化；

5° 把以上所有向量单位化为 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$，则 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ 为正交矩阵；

6° 作变换：令 $x=Qy$，可使 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$ 标准形.

解：(2) 正交法：1° $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$；2° 故：$\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=0$

3° 求特征向量：① 当 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 时，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ② 当 $\lambda_3=0$ 时，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

4° 把 α_1,α_2 正交化：令 $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

2. 化二次型为标准形.

例. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3$，

(1) 利用配方法化 f 为标准形；(2) 利用正交变化法化 f 为标准形；

5° 把以上所有向量单位化为 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$，则 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ 为正交矩阵；

6° 作变换：令 $x=Qy$，可使 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$ 标准形.

解：(2) 正交法：3° ① 当 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 时，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ② 当 $\lambda_3=0$ 时，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

4° 把 α_1,α_2 正交化：令 $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

5° 把 β_1,β_2,α_3 单位化：令 $\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ；6° 令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，当 $x=Qy$ 时

$\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\gamma_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2=3y_1^2+3y_2^2+0y_3^2$

3. 正定二次型、正定矩阵.

例. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+(a+1)x_2^2+x_3^2-2x_2x_3$ 正定，求 a 应满足的条件.

[分析] 二次型 f 正定（即矩阵 A 正定）的判定方法:

法1° A 的特征值全大于0（即 f 的正惯性指数 = 未知数个数）;

法2° A 的各阶顺序主子式全大于0 .

解: $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a+1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$

一阶顺序主子式: $\Delta_1=|1|=1$

二阶 〃 〃 〃 〃 : $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&0\\0&a+1\end{vmatrix}=a+1$

三阶 〃 〃 〃 〃 : $\Delta_3=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&a+1&-1\\0&-1&1\end{vmatrix}=a$

由题意: $a+1>0$, $a>0$

$\therefore a>0$

祝同学们考试成功，学业有成！

框框老师.