答案：

1、 $x-|x| \neq 0$

$\Downarrow$

$x<0$

2、 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n+9^n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{9^n\left(\frac{2^n}{9^n}+\frac{3^n}{9^n}+\frac{5^n}{9^n}+1\right)}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{9^n}\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{2}{9}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{5}{9}\right)^n+1}$

$= 9$　　或者夹逼准则

$9=\sqrt[n]{9^n} \le t \le \sqrt[n]{4\cdot 9^n} = 9$

4、 $f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

5. $y' = -\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}$　$y'' = \frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}}$

令 $y''<0$ 则 $x<1$，所以凸区间可求

拐点：令 $x=1$，$y=2$，求得 $(1,2)$

1、 $(-\infty, 0)$

2、 9

3、 $f'(x)$

4、 $-\frac{\pi}{2}$

5、 $(-\infty,1)$，$(1,2)$

6、 $y = x+\frac{1}{e}$

7、 $\frac{(\ln 3)^n}{n!}$

6、设 $y=ax+b$

则 $a = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln(e+\frac{1}{x})}{x} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty}(y-ax)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}}$

$= \frac{1}{e}$

1、 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(e^{\sin x}-1)}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\frac{1}{\cos x})}{\frac{1}{3}x^2\cdot\sin x}$

$= 3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$

$= -\frac{3}{2}$

2、 $\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{x-\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{x-\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{x}{x-\ln(1+x)}\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{2x}}$

$= e^{\frac{1}{2}}$

四：$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = 0$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 g(x) = 0$　①

∴ 极限存在.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$　②

在 $x=0$ 处连续

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1-\cos x}{x\cdot\sqrt{x}}$

$= \frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}} = 0$　③

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2 g(x)}{x} = 0$

在 $x=0$ 可导

五、$y' = \dfrac{x^2+x+1-(2x+1)(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$= \dfrac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$

当 $x<-2$ 或 $x>0$ 时

$y'<0$，$y(x)$ 递减

当 $-2<x<0$ 时

$y'>0$，$y(x)$ 递增

极小值 $y(-2) = -\frac{1}{3}$

极大值 $y(0) = 1$

六、$xy = e^{x+y}$

左右求导：

$y + xy' = e^{x+y}(1+y')$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = y' = \dfrac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}} = \dfrac{xy-y}{x-xy}$

七. $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x^2+(ax-1)e^{-t(x-2)}}{1+e^{-t(x-2)}}=x^2, & x>2\\ \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{ax-1}{1}=ax-1, & x<2\end{cases}$

∴ 又 $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=4=\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=2a-1 \iff a=\frac{5}{2}$

九. $f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{3}(2x-5)x^{-\frac{1}{3}}$

令 $f'(x)=0$

则 $x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(2x-5)\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=0$

$x^2+\frac{2}{3}(2x-5)x=0$

∴ $x=\frac{10}{7}$ 或 $x=0$

当 $x\in(-\infty,0)$ 或 $(\frac{10}{7},+\infty)$ 时

$f'(x)>0$, $f(x)$ 递增

当 $x\in(0,\frac{10}{7})$ 时

$f'(x)<0$, $f(x)$ 递减

从而: 极大值

$f(0)=0$

极小值

$f(\frac{10}{7})=-\frac{15}{7}(\frac{10}{7})^{\frac{3}{2}}$

十. 证明:

令 $f(x)=x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x)$, $x>0$.

$f'(x)=1-x-\frac{1}{x+1}$

$f''(x)=-1+\frac{1}{(x+1)^2}<0$

$f'(x)$ 递减

∴ $f'(x)<f'(0)=0$

∴ $f(x)$ 递减 ∴ $f(x)<f(0)=0$, 得证

学支公众号二维码

2021-2022 《高等数学 I （1）》期中模拟考试试题

一、填空题（每空 3 分）

1、函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-|x|}$ 的定义域是 ~~x~~ $(-\infty,0)$.

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+5^n+9^n}=$ □ 9.

3、设 $y=f(x)$，其中 $f(x)$ 可导且 $f(x)>0$，则 $dy=$ $f'(x)$ dx.

$\left\{\begin{array}{ll} x\arctan\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{array}\right.$ =□，则左导数 $f'(0)=$□. $-\frac{\pi}{2}$

5、函数 $y=2-(x-1)^{\frac{1}{3}}$ 的凸区间为 $x<1$ $(-\infty,1)$，拐点为 $(1,2)$.

6、曲线 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为 $y=x$

7、函数 $y=3^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数 $a_n=$ $\dfrac{(\ln 3)^n}{n!}$.

二、选择题（每空 3 分）

1、设当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 都是等价无穷小（$\beta(x)\neq 0$），则当 $x\to x_0$ 时，下列表达式中不一定为无穷小的是（　　）

(A) $\alpha^2(x)+\beta^2(x)\sin\dfrac{1}{x}$　　(B) $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$

(C) $\ln(1+\alpha(x)\beta(x))$　　(D) $|\alpha(x)+\beta(x)|$

2、已知曲线 $y=a\sqrt{x}\,(a>0)$ 与 $y=\ln\sqrt{x}$ 在 $P(x,y)$ 有公共切线。则常数 a 的值与点 P 的坐标分别为（ A ）

(A) $\dfrac{1}{e},(e^2,1)$　(B) $\dfrac{1}{e},(e,1)$　(C) $\dfrac{1}{e^2},(e,1)$　(D) $\dfrac{1}{e^2},(e^2,1)$

三、计算下列极限（每小题 6 分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(e^{\sin x}-1)}$

2、$\lim\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(e^{\sin x}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\frac{1}{\cos x})}{\sin x(\sqrt[3]{1+x^2}-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{\cos x\cdot(e^{\frac{1}{3}\ln(1+x^2)}-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{\cos x\cdot\frac{1}{3}\ln(1+x^2)}=-\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos x\cdot x^2}=-\dfrac{3}{2}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$ $\dfrac{x}{x-\ln(1+x)}\cdot\dfrac{x-\ln(1+x)}{x}\cdot\dfrac{1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{x-\ln(1+x)}{x}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1-\frac{1}{x+1}}{2x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\frac{x}{x+1}}{2x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{2(x+1)}}=e^{\frac{1}{2}}$

四、$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2 g(x), & x\le 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处极限是否存在？是否连续？是否可导？（本题 6 分）

解：$f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=x^2 g(x)$

$\because g(x)$ 有界 $\therefore x_0^2 g(x_0)$ 为无穷小

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{3}{2}}=0$

$\therefore f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处极限存在，且在 $x=0$ 处连续

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x_0)=\lim\limits_{x_0\to 0}\dfrac{x_0^2 g(x_0)-0}{x_0-0}=\lim\limits_{x_0\to 0}x_0 g(x_0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x_0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1-\cos x_0}{\sqrt{x_0}}-0}{x_0}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{2}}=0$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

五、求函数 $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ 的单调区间和极值.（本题 6

解：$y'=\dfrac{x^2+x+1-(x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\dfrac{-x^2-2x}{(x^2+x+1)^2}=-\dfrac{x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$.

令 $y'>0$ 则 $y\in(0,$ $(-2,0)$

令 $y'<0$ 则 $y\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$　　且 $y'|_{x=-2}=y'|_{x=0}=0$

$\therefore$ y的单调递增区间为 $(-2,0)$ 单调递减区间为 $(-\infty,-2)$ 与 $(0,+\infty)$

y的极大值为 $f(0)=1$　　极小值为 $f(-2)=-\frac{1}{3}$

六、设 $y=y(x)$ 由方程 $xy=e^{z+y}$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$.（本题 8 分）

解：$\therefore xy=e^{\frac{x}{z}+y}$

~~$\therefore \ln x+\ln y=\frac{x}{z}+y$~~

~~$\therefore \frac{1}{x}+\frac{y'}{y}=\ln z+z'+y'$~~

~~$\therefore y'(y-1)=\frac{y}{x}-yz'$ $y(\frac{1}{x}-z')$~~

~~$\therefore y'=\frac{y}{y-1}(\frac{1}{x}-z')=\frac{y}{y-1}($~~

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=$

$\because xy=e^{x+y}$

$\therefore \ln x+\ln y=x+y$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{y'}{y}=1+y'$

$\therefore y'(1-\frac{1}{y})=\frac{1}{x}-1$

$\therefore y'=\dfrac{\frac{1}{x}-1}{1-\frac{1}{y}}=\dfrac{y(1-x)}{x(y-1)}$　$\dfrac{y(1-x)}{x(y-1)}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(1-x)}{x(y-1)}$

十、当 $x>0$ 时，试证不等式 $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$ 成立.（本题 8 分）

解：设 $f(x)=\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}-x$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{1+x}+x-1=\frac{x^2+x+1-x-1}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}$

$x>0$ 时 $f'(x)>0$

$f(0)=0$ 任取 $x_1>0$，则 $\exists\, x_0\in(0,x_1)$

使 $f(x_1)=f'(x_0)(x_1-0)=x_1 f'(x_0)$

$\therefore f(x_1)>0$

$\therefore x>0$ 时，$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$

十一、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $3f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.（本题 6 分）

解 设 $g(x)=x^3f(x)$ $\therefore g(0)=g(1)=0$

$\because f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且在 $(0,1)$ 可导

$\therefore g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且在 $(0,1)$ 可导

$\therefore \exists\,\xi\in(0,1)$ $g'(\xi)=0$

$\therefore g'(\xi)=3\xi^2 f(\xi)+\xi^3 f'(\xi)$

$=\xi^2(3f(\xi)+\xi f'(\xi))=0$

$\therefore 3f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$