

南京航空航天大学 2020 级硕士研究生

共 5 页 第 1 页

二〇二〇~二〇二一 学年 第 1 学期 《高等工程数学》课程 A 卷

考试日期: 2020 年 11 月 15 日 课程编号:

学院	学号	姓名	成绩
----	----	----	----

一 (20 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, 求 $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_F$, $\|A\|_2$.

$$\|A\|_1 = 4$$

$$\|A\|_\infty = 4$$

$$\|A\|_F = 4$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{6}$$

二 (20 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -10 & 3 & -28 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

1. 求 A 的特征多项式和 A 的全部特征值; (6 分)
2. 求 A 的不变因子、初等因子及最小多项式; (6 分)
3. 求 A 的 Jordan 标准型 J 及变换矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = J$; (6 分)
4. 令 $T > 0$, 确定幂级数 $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(T^3 + \frac{3}{k^2+3})^{\frac{k}{3}}} z^k$ 的收敛半径。令 $h(z) = s(2z - 7)$, 对上述 A 讨论矩阵幂级数 $h(A)$ 的绝对收敛性 (收敛圆边界上的情形除外)。 (2 分)

$$\text{特征多项式 } f(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)^2$$

$$\text{特征值 } \lambda_1 = 3, \lambda_{2,3} = 1$$

$$\text{不变因子 } d_1 = d_2 = 1, d_3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)^2$$

$$\text{初等因子 } \lambda - 3, (\lambda - 1)^2$$

$$\text{最小多项式 } m(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)^2$$

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -\frac{14}{5} \\ 5 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$T > 5$ 时 $h(A)$ 绝对收敛

三 (20 分). 1. 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ 的奇异值分解. (10 分)

2. 已知矩阵 B , 存在可逆矩阵 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 使得 $P^{-1}BP = J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求 e^{2tB} , 这里 t 是

实数. (10 分)

$A = V^T \Sigma U$, 其中

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{14} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{42}} \\ \frac{\sqrt{14}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{42}}{-4} \\ \frac{\sqrt{14}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{-1} & \frac{\sqrt{42}}{1} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{42}} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{2tB} = Pe^{2tJ}P^{-1} = \begin{bmatrix} e^{6t} & 0 & 0 \\ 2e^{4t} - 2e^{6t} + 4te^{4t} & e^{4t} + 2te^{4t} & 2te^{4t} \\ -4te^{4t} & -2te^{4t} & e^{4t} - 2te^{4t} \end{bmatrix}$$

四 (20 分) 1. 当实数 t 满足什么条件时, $A = \begin{bmatrix} 2020 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & t \\ 0 & t & -t-4 \end{bmatrix}$ 半正定? (10 分)

2. 令 $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 为复矩阵, 证明: $B^H B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为 Hermite 半正定矩阵. (7 分)

3. 令 $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 为复矩阵, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为 Hermite 正定矩阵, 利用 2. 中结论证明:
若 $\text{tr}(AB^H B) = 0$, 则 $B = 0$. (3 分)

1. 所有主子式非负, $t \leq -8$.

2. 根据定义证明即可.

3. 先证明 $B^H B = 0$, 再证明 $B = 0$.

五 (20 分) 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, 向量 $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$,

1. 求矩阵 A 的满秩分解, 并计算 A^+ ; (10 分)
2. 对于方程组 $Ax = b$, 用广义逆判断方程组是否相容, 若相容, 求其通解及极小范数解, 若不相容, 求其通解及极小最小二乘解。 (10 分)

$$A = BC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = A^+b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ 可验证 } A\hat{x} = b, \text{ 故方程组相容}$$

$$x = A^+b + (I - A^+A)y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y$$