

1. 下列说法正确的是

A. 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  可积, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  最多只能存在有限个间断点.

B. 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  一定有原函数  $\times$

C. 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有原函数, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  一定可积  $\times$

D. 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  可积, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上一定有界  $\times$

2. 已知  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续, 则极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 则下列说法不正确的是

A.  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有界 B.  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续

C. 若广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

D. 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 则广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛

3. 下列哪一个函数在  $[-1, 1]$  上不满足罗尔定理的条件

A.  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

B.  $f(x) = \begin{cases} |x| \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

C.  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

D.  $f(x) = |x^3|$

4. 满足下列条件时, 连续函数  $f(x)$  在  $x=0$  处取得极值

A.  $f'(0) = 0$  B.  $f''(0) > 0$  C.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = A > 0$  D.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A > 0$

5.  $\int_1^2 x \log_2 x dx =$

6. 已知  $f(x) = 2, f(1) = 1$  求  $\int f(x) f'(x) dx =$

7.  $\frac{d}{dx} \int_x^{103x} \ln(1+t^2) dt =$

8. 使得函数  $y = e^{-x^2}$  的曲线上凹的  $x$  的取值范围是

9. 函数  $y = x + 2 \cos x$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上的最小值是

10.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{1+x^2}} =$

11. 函数  $y = y(x)$  是由  $y x^2 = \int_0^y \sqrt{1+t^2} dt = 0$  确定的隐函数, 则  $y' =$

12.  $\int_{-1}^1 (x + e^{|x|}) \sin x dx =$

13.  $f(x)$  定义在区间  $[a, b]$  上, 写出使得  $f(x)$  可积的充分条件.

- (1)  $f(x)$  在  $[0, b]$  上可导
- (2)  $f(x)$  在  $[0, b]$  上单调
- (3)  $f(x)$  在  $[0, b]$  上仅有有限个极值, 且有界
- (4)  $f(x)$  可积

14. 当  $a$  为何值时, 函数  $f(x) = a \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$  在  $x = \frac{\pi}{4}$  处有极值, 并说明是极大值还是极小值

15. 设函数  $f(x)$  为连续函数, 满足等式  $f(x) = \ln(1+x^2) + x \int_0^1 f(x) dx$ , 求  $f(x)$

16. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+3} + \dots + \sqrt{n^2+n}}{n^2}$

17. 求曲线  $y = e^x$  与其过原点的切线及  $y$  轴所围成的图形的面积, 并求该图形绕  $y$  轴旋转一周所形成的旋转体的体积

18. 设  $L$  为心脏线  $\rho = 2(1 + \cos \theta)$ , 求  $L$  的全长以及  $L$  围成的图形的面积

19. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$  的和函数  $S(x)$  并求数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}}$  的和

20. 设  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上连续, 在  $(0, \pi)$  上可导,  $f(0) = 0$ , 证明存在  $\xi \in (0, \pi)$  使得  $f'(\xi) + f(\xi) \cos \xi = \frac{f(\pi)}{\pi} e^{-\sin \xi}$

21. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上二阶连续可导,  $f(0) = f(1) = 0$ , 且  $|f''(x)| \leq 1$ , 证明  $|\int_0^1 f(x) dx| \leq \frac{1}{12}$

22. 证明反常积分  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a + x^b} dx$  收敛, 其中  $a > 1, b < 1$ .