南京航空航天大学
2021~2022 第 二 学 期 线性代数 A 卷

鸣谢AsilenA提供并整理

2022 年 7 月

一、填空题 (每空 2 分)

1. 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 已知 $\vec{u}=[2,4,4]^T$,$\vec{v}=[1,1,0]^T$ 求向量 $\vec{u}$ 在向量 $\vec{v}$ 上的向量投影:__________.

2. 向量组 $\vec{a}_1=[1,3,2]^T$,$\vec{a}_2=[2,1,3]^T$,$\vec{a}_3=[3,2,1]^T$ 是线性_____ 的 (“相关” 或 “无关”).

3. 已知 $\mathbf{A}$ 是三阶矩阵,det($\mathbf{A}$)=$\frac{1}{3}$, 则 $\det\left((2\mathbf{A})^{-1}-adj(\mathbf{A})\right)$=__________.

4. 若矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&0&5\\0&0&m&1&1\\0&0&0&k&2\end{bmatrix}$ 的秩为 2, 则 m=__________,k=__________.

5. 设 $\mathbb{R}^3$ 的一个基为: $\vec{\beta}_1=[1,2,1]^T$,$\vec{\beta}_2=[1,3,2]^T$,$\vec{\beta}_3=[1,a,3]^T$, 向量 $\vec{a}=[1,1,1]^T$, 在这个基下的坐标向量为 $[c,-2,1]^T$, 则 a=__________,c=__________.

6. 写出 $\mathbb{R}^2$ 中将向量逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{6}$ 的线性变换: __________.

7. 设三阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩为 2, 矩阵 $2\mathbf{A}-\mathbf{I}$ 不可逆, 且 det($\mathbf{A}+\mathbf{I}$)=0, 则 $\mathbf{A}$ 的所有特征值是:__________, 二次型 $\vec{x}^T\mathbf{A}\vec{x}$ 的规范型为:__________.

二、选择题 (每空 3 分)

1. 下列陈述中正确的个数 (　　)

(1) 初等变换不改变矩阵的秩　(2) 初等变换不改变矩阵的行数和列数

(3) 初等变换不改变矩阵的可逆与否　(4) 可逆矩阵可以表示为有限个初等矩阵的乘积

A、1 个　　B、2 个　　C、3 个　　D、4 个

2. 设方阵 $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ 满足 $\mathbf{AB}$=$\mathbf{AC}$, 则条件 (　　) 成立时, 可得 $\mathbf{B}$=$\mathbf{C}$

A、$\mathbf{A}$ 是非零矩阵　　B、$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 都可逆　　C、方程组 $\mathbf{A}$x=0　　D、det($\mathbf{A}$)$\neq 0$

3. 当 **M** 为 (　　) 时,**M** 必为方阵

A、分块矩阵　B、可逆矩阵　C、线性方程组的增广矩阵　D、线性方程组的系数矩阵

三、计算题 (每题 8 分)(要求写出计算过程)

1. 求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -x & -1 & 2 & y \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ 行列式的值

2. 已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 满足 $\mathbf{AX}=\mathbf{X}+\mathbf{B}$, 求矩阵 $\mathbf{X}$.

3. 对矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, 分别求子空间 $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ 和 $\mathbf{C}(\mathbf{A}^T)$ 的一个基.

4. 已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, 通过将 $\mathbf{A}$ 对角化求出 $\mathbf{A}^K$

四、(15 分)

已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=2 \\ -x_2-2x_3-2x_4=c \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=-2 \end{cases}$$

矩阵形式为 $\mathbf{A}$x=b

(1) 当 c 取何值时, 方程组无解、有唯一解和无穷多解?

(2) 当有无穷多解时, 求出通解, 并给出 $\mathbf{A}$x=b 的一个特解和 $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ 的一个基.

五、(16 分)

已知下面的二次型系数矩阵有一个特征值是 2;f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+$3x_2^2$+x_3^2+$2x_1x_2$+$6x_1x_3$+$2x_2x_3$

(1) 写出系数矩阵, 求出另外两个特征值 (2) 用正交变换将二次型化为标准型, 并求出正交变换 x=$\mathbf{Q}$y 及二次型的标准型 (3) 判断此二次型是否正定.

六、证明题 (三题里面自选两题做, 每题 4 分)

1. 设 n×m 矩阵 $\mathbf{A}$ 具有分块矩阵的表达形式：$\mathbf{A}=[\mathbf{B}|\mathbf{C}]$, 其中 $\mathbf{B}$ 是 n×s 子矩阵, 且 $\mathbf{B}^T\mathbf{C}=0$

证明:$\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A})=\det(\mathbf{B}^T\mathbf{B})\det(\mathbf{C}^T\mathbf{C})$.

2. 设向量 $\vec{\beta}$ 可表示成向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_r$ 的线性组合,

但不能表示成 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_{r-1}$ 的线性组合

证明：(1)$\vec{\alpha}_r$ 不能表示成 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_{r-1}$ 的线性组合.

(2)$\vec{\alpha}_r$ 可以表示成 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_{r-1},\vec{\beta}$ 的线性组合.

3. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是三阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的三个不同特征值, 对应的特征向量分别为 $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$.

令 $\vec{w}=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3$

证明：$\vec{w},\mathbf{A}\vec{w},\mathbf{A}^2\vec{w}$ 线性无关