南 京 航 空 航 天 大 学

二〇二一～ 二〇二二学年 第 二 学期

课程名称：《 现代控制理论 》 参考答案及评分标准

命题教师：冒泽慧 试卷类型：B 试卷代号：

一、【10分】

由牛顿定律和弹簧定律可得

$$M_1\dot{x}_3 = u - K(x_1 - x_2)$$

$$M_2\dot{x}_4 = K(x_1 - x_2) \qquad \text{（4分）}$$

则

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{K}{M_1}x_1 + \frac{K}{M_1}x_2 + \frac{1}{M_1}u$$

$$\dot{x}_4 = \frac{K}{M_2}x_1 - \frac{K}{M_2}x_2 \qquad \text{（4分）}$$

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2$$

故而状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{K}{M_1} & \frac{K}{M_1} & 0 & 0\\ \frac{K}{M_2} & -\frac{K}{M_2} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{M_1}\\ 0\end{bmatrix}u \qquad \text{（2分）}$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

二、【10分】

$$\Phi(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=L^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ 0 & \dfrac{1}{s+2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$$ **（4 分）**

$$y(t)=c\Phi(t)x(0)+\int_0^t c\Phi(\tau)Bu(t-\tau)d\tau=\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$+\int_0^t\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-\tau} & e^{-\tau}-e^{-2\tau}\\ 0 & e^{-2\tau}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}e^{-2(t-\tau)}d\tau$$

（6 分）

$$=(6e^{-t}-e^{-2t})+\int_0^t -e^{-2\tau}e^{-2(t-\tau)}d\tau$$

$$=6e^{-t}-e^{-2t}-te^{-2t}\,(t\ge 0)$$

三、**【15 分】**

(1) 特征方程为：

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -3\\ 2 & \lambda+2 & 6\\ 1 & 2 & \lambda+4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+6)=0$$ **（2 分）**

特征值为：

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-6$$ **（2 分）**

求对应特征值的特征向量：

对于 $\lambda_1=1$，

$$(\lambda_1 I-A)v_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 3 & 6\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{12}\\v_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow v_1=\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{12}\\v_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-4\\1\end{bmatrix}$$

对于 $\lambda_2=-1$，

$$(\lambda_2 I-A)v_2=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{21}\\v_{22}\\v_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow v_2=\begin{bmatrix}v_{21}\\v_{22}\\v_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$$

对于 $\lambda_3=-6$，

$$(\lambda_3 I-A)v_3=\begin{bmatrix}-6 & 0 & -3\\ 2 & -4 & 6\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{31}\\v_{32}\\v_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow v_3=\begin{bmatrix}v_{31}\\v_{32}\\v_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-5\\-4\end{bmatrix}$$ **（2 分）**

则

$$P=\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix},P^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{35} & -\frac{11}{35} & -\frac{6}{35} \end{bmatrix}$$ **（2分）**

$$\bar{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix},\bar{B}=P^{-1}B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\bar{C}=CP=\begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

因此可得原系统的对角标准型为

$$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}u$$ **（2分）**

$$y=\begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \end{bmatrix}\bar{x}$$

(2) 系统的传递函数为：

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B$$

$$=\begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}=\frac{7}{(s-1)}$$ **（3分）**

由于传递函数存在零极点对消，它造成系统的状态空间实现要么不能控，要么不能观。**（2分）**

四、【15分】

（1）能控性矩阵 $Q_c=\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k-2 & 2k-3 \\ 1 & k \end{bmatrix}$

$\det(Q_c)=k^2-4k+3\neq 0$

可得系统能控的条件为 $k\neq 1$ 且 $k\neq 3$ **（2分）**

能观性矩阵 $Q_o=\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3+k \end{bmatrix}$

$\det(Q_c)=3k+3\neq 0$

可得系统能控的条件为 $k\neq -1$ **（2分）**

所以系统既能控又能观的条件为 $k\neq 1$ 且 $k\neq 3$ 且 $k\neq -1$ **（1分）**

（2）$k=-1$时，系统状态空间模型为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}x$$

系统不能观。

构造非奇异变换阵：

$$T=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},T^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$ （**4 分**）

则

$$\bar{A}=TAT^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix},\bar{B}=TB=\begin{bmatrix}-8\\ -3\end{bmatrix},\bar{C}=CT^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$ （**4 分**）

因此，按能观性进行结构分解后的系统状态空间表达式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_o\\ \dot{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_o\\ x_{\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8\\ -3\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_o\\ x_{\bar{o}}\end{bmatrix}$$ （**2 分**）

五、【15 分】

方法一：

显然，原点是系统唯一的平衡状态。（**2 分**）

选取正定标量函数$V(x)=x_1^2+x_2^2$，则（**3 分**）

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)&=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=2x_1(-x_1+2x_2)+2x_2(2x_1-5x_2)\\ &=-2x_1^2+8x_1x_2-10x_2^2\\ &=-2(x_1-2x_2)^2-2x_2^2\end{aligned}$$ （**2 分**）

对于状态空间中的一切非零x满足条件$V(x)$正定和$\dot{V}(x)$负定，$\|\mathbf{x}\|\to\infty,V\left(\mathbf{x}\right)\to\infty$，故系统的原点平衡状态是大范围渐进稳定的。（**3 分**）

方法二：

系统的状态方程可以写为向量-矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

显然，原点$x_1=x_2=0$是系统唯一的平衡状态。（**2 分**）

根据 $A^T P + PA = -Q$，取 $Q = I$，设 $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$，则（**3分**）

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解得 $P = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$。（**2分**）

由于矩阵P正定，系统的原点平衡状态是大范围渐进稳定的。（**3分**）

（2）通过分析系统运动过程中能量的变化来判断系统的稳定性。构造一个反映系统运动过程中能量变化的虚拟函数，其时间导数如果始终小于零，表明系统能量逐步衰减，直至在平衡状态处衰减至零，即系统稳定。（**5分**）

六、【20分】

（1） 系统可观，可通过状态观测器来获取状态变量。

令 $H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix}^T$

$f(\lambda) = \left|\lambda I - (A - HC)\right| = \lambda^3 + (3 + h_3)\lambda^2 + (5 + h_2)\lambda + h_1$ （**3分**）

$f^*(\lambda) = (\lambda + 4)(\lambda^2 + 6\lambda + 18) = \lambda^3 + 10\lambda^2 + 42\lambda + 72$ （**2分**）

$H = \begin{pmatrix} 72 & 37 & 7 \end{pmatrix}^T$ （**2分**）

（2）系统可控，可通过状态反馈将其极点任意配置。

令 $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$

$f(\lambda) = \left|\lambda I - (A - bK)\right| = \lambda^3 + (k_1 + 3)\lambda^2 + (3k_1 + k_2 + 5)\lambda + 5k_1 + 3k_2 + k_3$ （**3分**）

$f^*(\lambda) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 24\lambda + 20$ （**2分**）

$K = [6 \quad 1 \quad -13]$ （**2分**）

（3）原系统传递函数 $\dfrac{1}{s^3 + 3s^2 + 5s}$

经状态反馈后的传递函数为 $\dfrac{1}{s^3 + 9s^2 + 24s + 20}$ （**4分**）

状态反馈改变了传递函数的极点，全维状态观测器不改变系统传递函数。（**2分**）

七、【15分】

$H = (-x + 0.5u) + \lambda(-x + u) = (-1 - \lambda)x + (0.5 + \lambda)u$ （**2分**）

$u^*(t) = \begin{cases} -2 & 0.5 + \lambda > 0 \\ 2 & 0.5 + \lambda < 0 \end{cases}$ （**2分**）

$\dot{\lambda}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}=\lambda+1 \Rightarrow \lambda=ce^{t}-1$。由 $\lambda(2)=0$，得 $\Rightarrow \lambda(t)=e^{t-2}-1$ **（2 分）**

$$u^{*}(t)=\begin{cases}2 & 0 \le t<1.307 \\ -2 & 1.307<t \le 2\end{cases}$$ **(2 分)**

$\dot{x}=\begin{cases}-x+2 \\ -x-2\end{cases}$，$x^{*}(t)=\begin{cases}c_1 e^{-t}+2 & 0 \le t<1.307 \\ c_2 e^{-t}-2 & 1.307<t \le 2\end{cases}$ **（2 分）**

$c_1=3, c_2=17.78$ **（2 分）**

$$x^{*}(t)=\begin{cases}3e^{-t}+2 & 0 \le t<1.307 \\ 17.78e^{-t}-2 & 1.307<t \le 2\end{cases}$$ **（3 分）**