南京航空航天大学

二〇二一～二〇二二学年第 1 学期《高等数学 I》考试试题

考试日期： 年 月 日 试卷类型： 试卷代号：

班号 学号 姓名

题号	一	二	三	四	总分
得分					

本题分数	21
得　分	

一、填空题（每题 3 分，共 21 分）

1、向量（3,4,12）与 x 轴正向的夹角为__________。

2、曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为________________。

3、旋转抛物面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 4)$ 在 xoy 面上投影部分的面积为__________。

4、$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dots+\dfrac{1}{n+n}\right)=$____________。

5、曲线弧 $y=\dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 在 $0\le x\le 2$ 这一段的弧长为__________。（写出具体数值）

6、若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin t dt}{x^a}=2$，则 $a=$________。

7、曲线 $y=2x+1$ 在 $x=0$ 处的曲率为___________。

本题分数	9
得　分	

二、选择题（每题 3 分，共 9 分）

1、设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, x\le 0\\ x-1, x>0\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $F(x)$ 在点 $x=0$ 处（　　）

A. 可导但不连续　　B. 连续但不可导

C. 可导但导函数不连续　　D. 导函数连续

2、在区间 $[a,b]$ 内，如果有 $f'(x)=g'(x)$，则一定有（　　）

A. $f(x)=g(x)$　　B. $f(x)=g(x)+g(a)$

C. $f(x)=g(x)+C$　　D. $[\int f(x)dx]'=[\int g(x)dx]'$

3、下列反常积分发散的是（　　）

A. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}dx$　　B. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

C. $\int_{1}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$　　D. $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$

本题分数	30
得　分	

三、计算题（每题 6 分，共 30 分）

1、$\int 3x^2\arctan x dx$

2、$\int \frac{1}{\sin x\cos^3 x}dx$

3、 $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+\tan x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

4、 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2,[-1,0)\\ \frac{e^x}{e^x+1},[0,1]\end{cases}$,求$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$

5、 $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{a}^{a+1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sin x}}dx$

本题分数	7
得　　分	

四、已知 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}dt$，求 $\int_0^1 f(x)dx$。

本题分数	7
得　　分	

五、求过原点 O 及点 A（6,-3,2），且与平面 $4x-y+2z-8=0$ 垂直的平面方程。

本题分数	8
得　　分	

六、平面图形 D 由抛物线 $y=1-x^2$ 和 x 轴围成。

（1） 求 D 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积；

（2） 求 D 绕 y 轴旋转一周所成的旋转体体积。

本题分数	7
得　　分	

七、 $f(x)=x-\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\sec^2 x dx$，求 $f(x)$。

本题分数	6
得　　分	

八、证明：设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$。

本题分数	5
得　　分	

九、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x) \ge 0$。证明：

$$\int_a^b f(x)dx \ge (b-a) f(\frac{a+b}{2})$$。

二〇二一～二〇二二学年第 1 学期《高等数学 I》考试参考答案

本章试卷由学支教员阳心怡整理，答案仅供参考，如遇答案有误，请和学支教员部成员联系，学支会及时进行订正。感谢您的使用！

一、 填空

1. $\arccos\frac{3}{13}$

解析：$\vec{a}=(3,4,12),\vec{b}=(1,0,0)$

$$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3}{13}$$

2. $y=x+\frac{3}{2}$

解析：$\lim\limits_{x\to\infty}[y-(Ax+B)]=0$

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}}{x}=\lim_{x\to\infty}(\frac{1+x}{x})^{\frac{3}{2}}=1$$

$$B=\lim_{x\to\infty}[\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^3-x^3}{\sqrt{x}[(1+x)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}]}=\frac{3}{2}$$

3. 4π

解析：$z=x^2+y^2(0\le z\le 4)$

$r=2$

$S=\pi r^2=4\pi$

4. $\ln 2$

解析：$\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n})=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+...+\frac{1}{1+\frac{n}{n}})$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\ln 2$$

5. $\frac{13}{3}$

解析：$y=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}(0\le x\le 2)$

$y'=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{x}$

$$l=\int_0^2\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^2\sqrt{1+4x}dx$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^2\sqrt{1+4x}d(1+4x)$$
$$=\frac{1}{6}(1+4x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2$$
$$=\frac{13}{3}$$

6．4

解析：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sin tdt}{x^a}=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to0}\frac{(-\cos t)\Big|_0^{x^2}}{x^a}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^a}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^4}{x^a}=\frac{1}{2}$$

$\therefore a=4$

7．0

解析：$y=2x+1$

$$k=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

二、 选择题

1．B

解析：$F(0)=0\qquad F(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\int_0^x(t-1)dt=\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{1}{2}x^2-x)=0$

$$F(0^-)=\lim_{x\to0^-}\int_0^x\sin tdt=\lim_{x\to0^-}(1-\cos x)=0$$

$\therefore$连续

$\lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 极限不存在

$\therefore$连续但不可导

2．C

解析：定义

3．A

解析：A. $\int_{-1}^1\frac{1}{\sin x}dx\quad=\int_{-1}^0\frac{1}{\sin x}dx+\int_0^1\frac{1}{\sin x}dx$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^-}\ln|\tan\frac{x}{2}|\Big|_{-1}^{\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln|\tan\frac{x}{2}|\Big|_{\varepsilon}^{1}$$

$\therefore$发散

B. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad =\arcsin x\Big|_{-1}^{1}=\pi$

$\therefore$收敛

C. $\int_{1}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx \quad =\int_{1}^{+\infty}\arctan x d(-\frac{1}{x})$

$$=-\frac{\arctan x}{x}\Big|_{1}^{+\infty}+\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}d\arctan x$$

$$=\frac{\pi}{4}+\int_{1}^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\lim_{x\to\infty}[\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)]+\frac{1}{2}\ln 2$$

$$=\frac{\pi}{4}+\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{2}\ln 2$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

$\therefore$收敛

D. $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx=\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{\ln^2 x}d(\ln x)=-\frac{1}{\ln x}\Big|_{2}^{+\infty}=\frac{1}{\ln 2}$

$\therefore$收敛

三、 计算题

1. $\int 3x^2\arctan x dx$

$=\int\arctan x dx^3$

$=x^3\arctan x-\int x^3 d\arctan x$

$=x^3\arctan x-\int\frac{x^3}{1+x^2}dx$

$=x^3\arctan x-\frac{1}{2}[1+x^2-\ln(1+x^2)]+C$

2. $\int\frac{1}{\sin x\cos^3 x}dx$

3. $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+\tan x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

4. $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2,[-1,0) \\ \frac{e^x}{e^x+1},[0,1]\end{cases}$，求$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$

5. $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_a^{a+1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sin x}}dx$

四、 $f'(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$

$$=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xdf(x)$$

$$\int_0^1 f(x)dx=-\int_0^1 x\cdot\frac{\ln(x+1)}{x}dx$$

$$=-\int_0^1\ln(x+1)dx$$

$$=1-2\ln 2$$

五、 平面经过原点

设平面方程 $Ax+By+Cz=0$

法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

$$\begin{cases}6A-3B+2C=0 \\ 4A-B+2C=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=B \\ C=-\frac{3}{2}A\end{cases}$$

$$\therefore x+y-\frac{3}{2}z=0$$

六、 （1） $Vx=\int_{-1}^{1}\pi(1-x^2)^2dx=\frac{16}{5}\pi$

（2） $Vy=2\pi\int_0^1 x(1-x^2)dx=\frac{\pi}{2}$

七、 令$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\sec^2 xdx$，$f(x)=x-A$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x-A)\cdot\sec^2 xdx=A$$

即 $(x-A)\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx=A$

解得$A=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$

八、 设M与m是连续函数$f(x)$在$[a,b]$上的最大值与最小值，即

$$m \le f(x) \le M, x \in [a,b]$$

由定积分性质，有

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

即

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$$

由介值定理，至少存在一点$\eta \in [a,b]$，使得

$$f(\eta) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

即

$$\int_a^b f(x)dx = f(\eta)(b-a)$$

九、 法一： $f(x)$在$x_0 = \dfrac{a+b}{2}$泰勒展开

又$f''(x) \ge 0, f(x) \ge f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(x - \frac{a+b}{2})$

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b f(\frac{a+b}{2})dx + f'(\frac{a+b}{2})\int_a^b (x - \frac{a+b}{2})dx$$

而$\int_a^b (x - \frac{a+b}{2})dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = 0$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx \ge (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

法二： $f''(x) \ge 0 \Rightarrow$ 一阶导数递增

$$S_1 = \int_a^b f(x)dx$$

$$S_2 = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

$$S_1 \ge S_2$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx \ge (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$