南 京 航 空 航 天 大 学

二〇二二 ～ 二〇二三 学年 第一学期 **《高等数学 II(1)》考试试题**

考试日期： 2023 年 月 日 试卷类型： 试卷代号：

班号	学号	姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、填空题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{bx^2}{2x^2+x}=$
2. 设函数$\overline{\mathrm{y}=\mathrm{y(x)}}$由方程$x^3+xy+e^y=1$所确定，则$\mathrm{y}'(0)=$ ________
3. 设e^{-x}是f(x)的一个原函数，则$\int x^3f(lnx)dx=$ ________
4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x^3}{1+cos^2x}+sin^2xcosx\right)dx=$ ________
5. 反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=$ ________
6. 设f(x)为；连续函数，且满足$\mathrm{f(x)}=\mathrm{x}+\mathrm{x}^2\int_0^1\mathrm{f(x)dx}$,则$\int_0^1\mathrm{f(x)dx}=$
7. 设直线$\mathrm{y}=\mathrm{x}$和抛物线$\mathrm{y}=\mathrm{x}^2$所围成平面图形的面积为 ________ ________
8. 由直线$\mathrm{y}=\frac{2}{3}\mathrm{x}^{\frac{3}{2}}$上相应于x从 3 到 8 的一段弧的长度为 ________
9. 若幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$\mathrm{x}=-3$处收敛，则此级数在$\mathrm{x}=1$处 ________

二、计算题

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x(t-arctant)\,dt}{x^2ln(1+x^2)}$

2. $\int\frac{2x-5}{x^2-8x+17}\,dx$

3. $\int xarctanx\,dx$

4. $\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

三、判断下列级数的敛散性，其中正项级数请指明收敛还是发散；交错级数请指明绝对收敛、条件收敛还是发散（$4' \times 2$）

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(1-cos\frac{1}{n})$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

四、求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{2^n}$的收敛域与和函数（$9'$）

五、将函数$\mathrm{f(x)}=\frac{1}{x^2-5x+6}$展开成$(x+1)$的幂级数，并给出x的范围$(8')$

六、设由抛物线$y=2x^2$和直线$x=a, x=2$及$y=0$所围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积为V_1,由抛物线$y=2x^2$和直线$x=a$及$y=0$所围成的平面图形绕 y 轴旋转而成的旋转体体积为V_2,其中$0<a<2$,则当 a 为何值时，V_1+V_2取到最大值？并求出此最大值。

七、设$f(x)=\begin{cases}2x, -1\le x\le 0\\ 1, 0\le x\le 1\end{cases}$,求函数$\emptyset(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$在$-1\le x\le 1$上的表达式

八、设函数$f(x)$在$[0,a]$上具有连续导数,$f(a)=0, M=\max\limits_{x\in[0,a]}|f'(x)|$,

证明：$\left|\int_0^a f(x)dx\right|\le\frac{1}{2}Ma^2$

一、1. $\frac{b}{2}$

2. 0

3. $-\frac{1}{3}x^3+C$

4. $\frac{2}{3}$

5. $\frac{1}{2}$

6. $\frac{3}{4}$

7. $\frac{1}{6}$

8. $\frac{38}{3}$

9. 绝对收敛

二.1. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sim}{x^2\cdot x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{4x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\frac{1}{3}x^3\right)}{4x^3}$

$=\dfrac{1}{12}$

2. 原式 $=\int\dfrac{2(x-4)+3}{(x-4)^2+1}\,d(x-4)$

令 $x-4=t$

$=\int\dfrac{2t}{t^2+1}+\dfrac{3}{t^2+1}\,dt$

$=\ln(t^2+1)+3\arctan t+C$

$=\ln(x^2-8x+17)+3\arctan(x-4)+C$

3. 原式 $=\frac{1}{2}\int \arctan x \, d x^2$

$=\frac{1}{2}\left[x^2 \cdot \arctan x - \int x^2 \cdot \frac{1}{x^2+1} d x\right]$

$=\frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C$

$=\frac{1}{2}\left[(x^2+1)\arctan x - x\right] + C$

4. 令 $x=2\sin t$

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\sin^2 t}{2\cos t} \cdot 2\cos t \cdot dt$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \, dt$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1-\cos 2t \, dt$

$=\frac{\pi}{2}-1$

三.1. $1-\cos\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，∴原级数收敛.

2. ∵ $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 单调减 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$

∴原级数收敛

而 $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=1$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ 发散.

∴原级数条件收敛

因，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)}{2^{n+1}}\right]\cdot\frac{2^n}{n}=\frac{1}{2}$

$\therefore R=2$.

当$x=\pm2$时，$\sum_{n=1}^{\infty}n$发散.

$\therefore$收敛域为$(-2,2)$

$S(x)=x\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)'$

$=x\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)'$

$=\frac{-2x}{(x-2)^2}$，$-2<x<2$.

五. $f(x)=\frac{1}{2-x}-\frac{1}{3-x}$

$$=\frac{1}{3-(x+1)}-\frac{1}{4-(x+1)}.$$

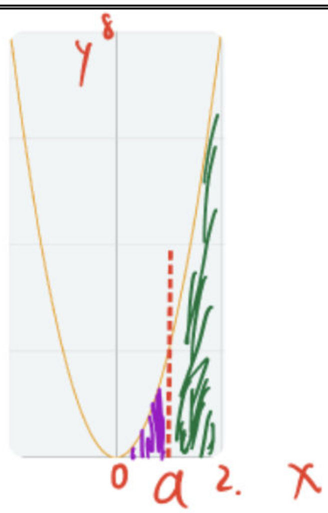
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+1}{3}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+1}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+1}{3}\right)^n-\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+1}{4}\right)^n$$

$$=\left[\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]\cdot(x+1)^n.$$

$$\begin{cases}-1<\frac{x+1}{3}<1\\-1<\frac{x+1}{4}<1\end{cases}\Rightarrow -4<x<4.$$

六、



$$V_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2dx=\frac{128-4a^5}{5}\pi.$$

$$V_2=2\pi\int_0^a x\cdot 2x^2\cdot dx=a^4\pi.$$

$$V_1+V_2=\frac{128}{5}+\frac{5a^4-4a^5}{5}\pi.$$

令. $f(a)=5a^4-4a^5$.

$f'(a)=20(a^3-a^4)=20\cdot a^3(1-a)$.

当 $0<a<1$ 时，$f'(a)>0$；当 $1<a<2$ 时，$f'(a)<0$.

$\therefore f(a)$ 在 $a=1$ 时最大，

$\therefore$ 此时，$V_1+V_2=\frac{129}{5}\pi$

七. $\phi(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$.

当 $-1\le x\le 0$.

$\phi(x)=\int_{-1}^{x} 2t\,dt = t^2\Big|_{-1}^{x} = x^2-1$

当 $0\le x\le 1$

$\phi(x)=\int_{-1}^{0} 2t\,dt+\int_{0}^{x} 1\,dt$

$= x-1$

$\therefore \phi(x)=\begin{cases} x^2-1, & -1\le x\le 0 \\ x-1, & 0\le x\le 1 \end{cases}$

八、$\because f(a)=0$

$\therefore$ 存在一点 ξ，使 $f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$

$\xi\in(a,x)$

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f'(\xi)(x-a)dx$$

$$\left|\int_0^a f(x)dx\right|\le\int_0^a|f(x)|dx=\int_0^a|f'(\xi)(x-a)|dx$$

$$\le M\int_0^a|x-a|dx$$

$$=M\int_0^a a-x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}Ma^2$$