"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材
配套参考书

普通物理学

（第七版）

习题分析与解答

孙迺疆　胡盘新　主编

教育出版社

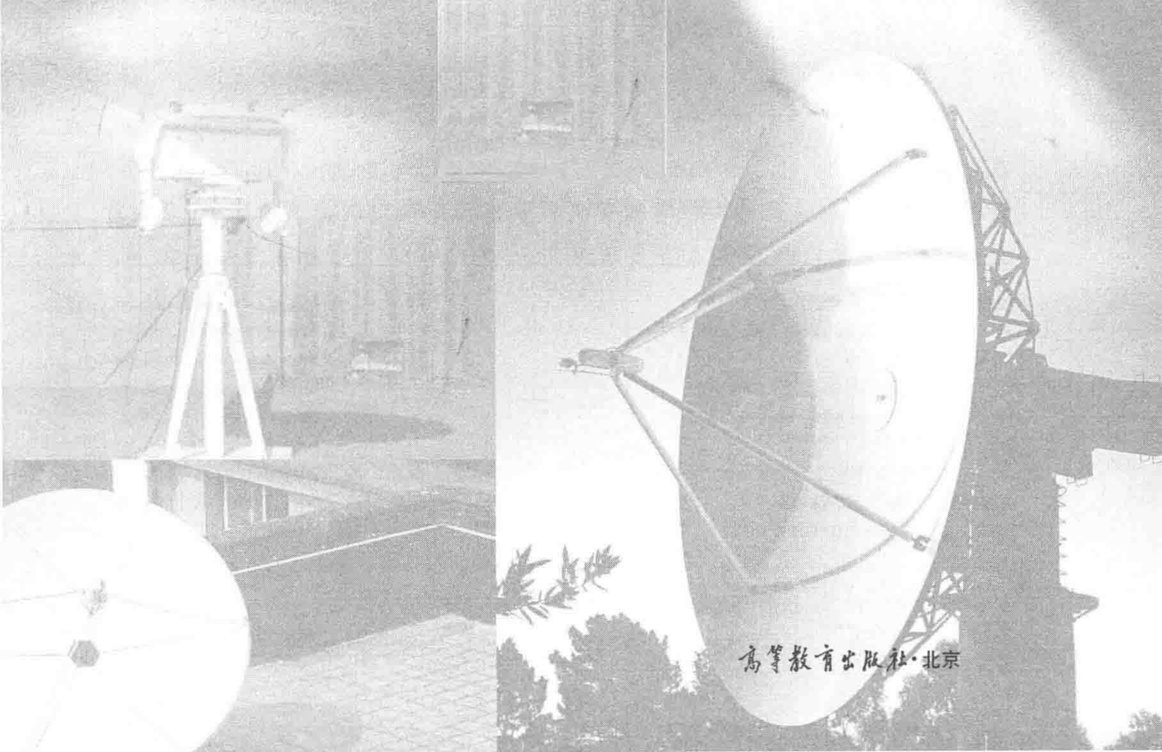
"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材
配套参考书

普通物理学

（第七版）

习题分析与解答

孙迺疆　胡盘新　主编



高等教育出版社·北京

内容提要

本书是与程守洙、江之永主编，胡盘新等修订的《普通物理学》（第七版）相配套的教学用书，全书按照主教材的章节顺序编排，每章都先归纳总结了本章的解题方法，再对教材所有习题作了分析和解答。解题过程中编者注重分析解题思路和解题方法，旨在启迪思维，提高学生分析问题和解决问题的能力，对有些习题还给出了多种解题方法，有的还对结果进行了讨论，以开阔读者的思路。

本书适用于高等学校理工科各专业，特别是使用程守洙、江之永主编，胡盘新等修订的《普通物理学》（第七版）的学生作为学习参考书，也可供相关教师在教学中参考。

图书在版编目（CIP）数据

普通物理学（第七版）习题分析与解答／孙迺疆，胡盘新主编.--北京：高等教育出版社，2016.12
ISBN 978-7-04-046009-4

Ⅰ.①普… Ⅱ.①孙… ②胡… Ⅲ.①普通物理学-高等学校-解题 Ⅳ.①O4-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 173492 号

策划编辑 程福平　责任编辑 程福平　封面设计 王 鹏　版式设计 王艳红
插图绘制 杜晓丹　责任校对 杨凤玲　责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 北京鑫海金澳胶印有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 27.75
字　　数 500 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
　　　　 http://www.hepmall.com
　　　　 http://www.hepmall.cn
版　　次 2016 年 12 月第 1 版
印　　次 2016 年 12 月第 1 次印刷
定　　价 43.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 46009-00

前言

做习题是学习大学物理的一个必要环节。著名理论物理学家索末菲(A. Sommerfeld)曾告诫他的学生海森伯(W.K.Heisenberg,1932年诺贝尔物理学奖获得者):“要勤奋地去做练习,只有这样,你才会发现,哪些你理解了,哪些你还没有理解”。通过做习题,学生可以发现自己在学习中存在的问题,以加深理解或拓展所学的知识,从而在分析问题和解决问题的能力方面得到必要的训练和提升。由于修订出版的《普通物理学》(第七版)对各章习题的配置数和难度层次都作了一定程度的调整,与之配套的《普通物理学(第七版)习题分析与解答》也相应地进行了修订。

本书给出了《普通物理学》(第七版)部分习题的分析和全部习题的解答。我们在编写中注重了对解题思路的分析和基本方法的运用,有些习题给出了不同的解法或者对结果进行了讨论。我们列出了每章的教学基本要求和习题的分类,以便于学生了解各章教学内容的要点和习题类型,也便于任课教师根据教学要求和学时安排,来选择习题安排作业。

做习题是一个运用所学的知识去分析、解决问题的过程,是个需要独立思考的过程。我们希望读者在阅读本书时,对相关的问题都已经过了这个独立思考的过程。

本书由孙迺疆(上海大学)和胡盘新(上海交通大学)主编,参加协编的有庄良、葛永华、陈爱明等教师。本书的出版得到了高等教育出版社程福平同志的大力支持,在此特致谢意。限于编者水平,书中难免存在错误和疏漏之处,恳请读者批评指正。

编　者

2015年10月

目录

第一篇
力学

第一章　力和运动

一、教学基本要求

1. 掌握对质点运动的描述方法。能分析质点作直线运动和平面内曲线运动时的位置矢量、位移、速度和加速度，作圆周运动、曲线运动时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度。

2. 掌握应用微分和积分求运动量或运动方程的方法。熟悉矢量的表示法和基本运算法则。能用微积分方法求解一维变力作用下简单的质点动力学问题。

3. 理解伽利略相对性原理，会运用伽利略坐标变换式和速度变换式分析相对运动问题。了解惯性力概念，了解在非惯性系中分析质点动力学问题的基本方法。

4. 掌握牛顿三定律及其适用条件。掌握用隔离体法分析质点的受力和解题的基本方法。

二、本章习题分类

1. 运动学的两类问题
2. 直线运动
3. 抛体运动
4. 曲线运动
5. 相对运动
6. 牛顿运动定律的应用
7. 非惯性参考系与惯性力

三、习题分析与解答

1. 运动学的两类问题

1-1. 一质点沿 Ox 轴运动，坐标与时间的变化关系为 $x=4t-2t^3$，式中 x、t 分别以 m、s 为单位，试计算：

（1）在最初 2 s 内的平均速度，2 s 末的瞬时速度；（2）1 s 末到 3 s 末的位移、平均速度；（3）1 s 末到 3 s 末的平均加速度；此平均加速度是否可用

$\overline{a}=\dfrac{a_1+a_2}{2}$计算？(4) 3 s 末的瞬时加速度。

分析：已知质点的运动学方程，用求导法求得速度和加速度，这是运动学的第一类问题。质点作直线运动时，其位矢、速度和加速度等矢量可以用标量表示，标量的正负表示它们的方向与 Ox 轴正向一致或相反。$a>0$，并不一定表示质点作加速运动，$a<0$ 也不一定作减速运动。当 a 与 v 同号，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 同方向时，质点作加速运动；当 a 与 v 异号，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 反向时，质点作减速运动。

在解题时需注意，当 $x(t)$ 是 t 的高次函数时，速度 $v=v(t)$，加速度 $a=a(t)$ 都是时间 t 的函数，质点可能沿直线往复运动。所以，需注意路程与位移、平均速度与瞬时速度、平均加速度与瞬时加速度概念的区别。

解：质点沿 Ox 轴运动，在一段时间内的位移为Δx，平均速度为 $\overline{v}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$，平均加速度为 $\overline{a}=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$；利用对 $x(t)$ 求导，可得瞬时速度为 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4-6t^2$，瞬时加速度为 $a=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-12t$。据此可得

$$(1)\ \overline{v}_{0-2}=\frac{x_2-x_0}{t_2-t_0}=\frac{(4\times2-2\times2^3)-0}{2-0}\ \mathrm{m/s}=-4\ \mathrm{m/s}$$

在最初 2 s 内质点的平均速度方向沿 Ox 轴反向。

$$v_2=(4-6t^2)\big|_{t=2}=-20(\mathrm{m/s})$$

2 s 末的瞬时速度沿 Ox 轴反向。

事实上，在 $t=0$ 时 $v_0>0$，质点朝 Ox 轴正向运动，但速率逐渐变小。令 $v=0$ 可得，在 $t=0.82$ s 时，质点的速率降为零，随后加速向 Ox 轴反向运动。

$$(2)\ \Delta x_{1-3}=x_3-x_1=[(4\times3-2\times3^3)-(4\times1-2\times1^3)]\ \mathrm{m}=-44\ \mathrm{m}$$

$$\overline{v}_{1-3}=\frac{x_3-x_1}{t_3-t_1}=\frac{-42-2}{3-1}\ \mathrm{m/s}=-22\ \mathrm{m/s}$$

1 s 末到 3 s 末的平均速度方向沿 Ox 轴反向。

$$(3)\ \overline{a}_{1-3}=\frac{v_3-v_1}{t_3-t_1}=\frac{[(4-6\times3^2)-(4-6\times1^2)]}{3-1}\mathrm{m/s^2}=-24\ \mathrm{m/s^2}$$

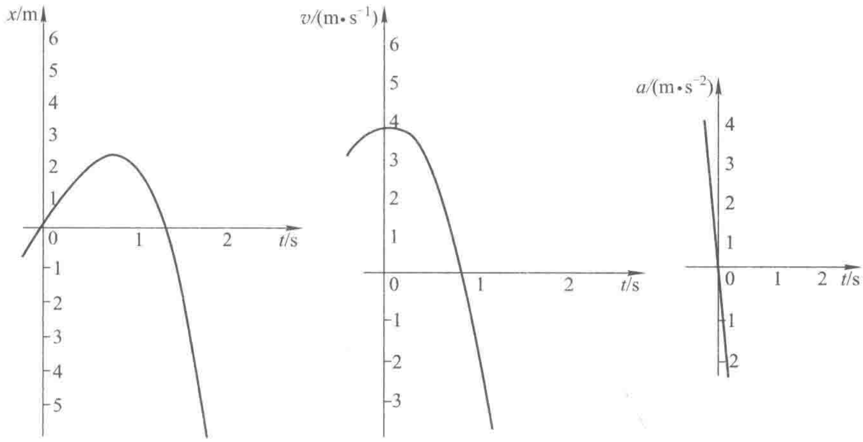
1 s 末到 3 s 末这段时间内质点沿 Ox 轴反向加速运动。

若用 $\overline{a}=\dfrac{a_1+a_3}{2}$计算，虽仍可得 $\overline{a}=-24\ \mathrm{m/s^2}$，但这求法是错误的。本题中的 $a-t$ 呈线性关系，故可得相同结果。

(4) 3 s 末质点的瞬时加速度为

$$a_3=\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{t=3}=-12t\,|_{t=3}=-36(\mathrm{m/s^2})$$

质点运动的 $x-t$ 图、$v-t$ 图、$a-t$ 图如解图 1-1 所示。



(a) $x-t$图　(b) $v-t$图　(c) $a-t$图

解图 1-1

1-2. 一质点沿 Ox 轴运动，其运动学方程为 $x=5+3t^2-t^3$，式中 x 的单位为 m，t 的单位为 s。

（1）试描述该质点的运动情况（在哪段时间内作加速运动？在哪段时间内作减速运动？在哪段时间内沿 Ox 轴正方向运动？在哪段时间内沿 Ox 轴负方向运动？）并画出 $x-t$ 图、$v-t$ 图和 $a-t$ 图。

（2）试求最初 4 s 内质点的平均速度和平均速率。

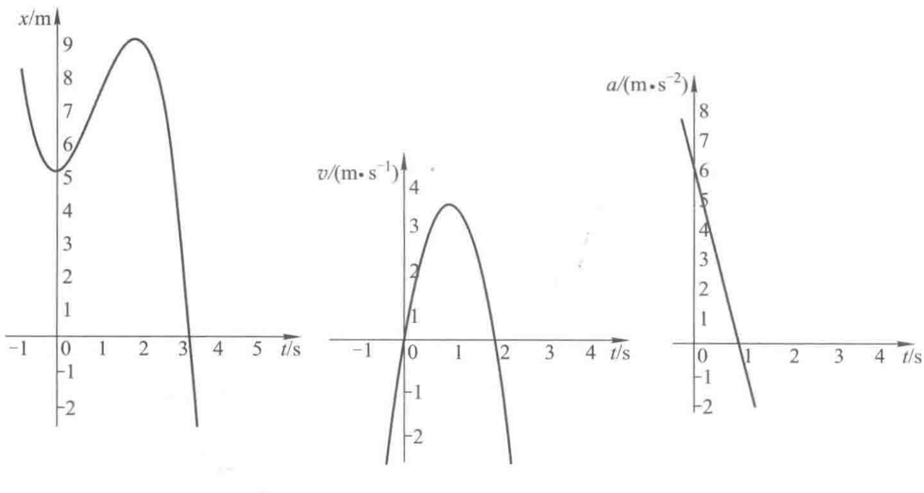
解：（1）对运动学方程求导，得质点运动的速度和加速度分别为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=6t-3t^2,\quad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=6-6t$$

将各时刻的 t 值代入 $x(t)$、$v(t)$ 和 $a(t)$ 表达式，可列表如下：

t/s	x/m	v/(m·s^{-1})	a/(m·s^{-2})
0	5	0	6
1	7	3	0
2	9	0	-6
3	5	-9	-12
4	-11	-24	-18

质点运动的 $x-t$ 图、$v-t$ 图、$a-t$ 图如解图 1-2 所示。



(a) $x-t$图 (b) $v-t$图 (c) $a-t$图

解图 1-2

利用$\frac{dx}{dt}=v=0$ 及$\frac{dv}{dt}=a=0$,可得

$$v=6t-3t^2\begin{cases}=0 & (t=0)\\ >0 & (0<t<2s)\\ =0 & (t=2s)\\ <0 & (t>2s)\end{cases},\quad a=6-6t\begin{cases}>0 & (0<t<1s)\\ =0 & (t=1s)\\ <0 & (t>1s)\end{cases}$$

由此可知质点的运动状态为:

$t=0$ 时,$x_0=5\ \mathrm{m}$,$v_0=0$,$a_0=6\ \mathrm{m/s^2}$,质点开始朝 Ox 轴正方向加速运动;

在($0<t<1$ s) 时段,$v>0$,$a>0$,质点继续沿 Ox 轴正方向加速运动,但速度的增大率在减缓;

$t=1$ s 时,$v=v_m=3$ m/s,$a=0$,质点朝 Ox 轴正方向运动的速度达极大值,停止加速;

在(1 s$<t<$2 s) 时段,$v>0$,$a<0$,质点朝 Ox 轴正方向作减速运动;

$t=2$ s 时,$x=x_m=9$ m,$v=0$,$a<0$,质点运动至 Ox 轴正方向的极大值 x_m处,停止;

$t>2$ s,$v<0$,$a<0$,质点调转运动方向,沿 Ox 轴负方向作加速运动。

(2) 最初 4 s 内质点的平均速度:

$$|\bar{\boldsymbol{v}}|_{0-4}=\left.\frac{\Delta x}{\Delta t}\right|_{0-4}=\frac{x_4-x_0}{4\ \mathrm{s}-0}=\frac{-16}{4}\ \mathrm{m/s}=-4.0\ \mathrm{m/s}$$

式中负号表示在最初 4 s 内质点平均速度的方向沿 Ox 轴反向。

由于质点在 $t=2$ s 时曾调转方向运动,最初 4 s 内经历的路程为

$$\Delta s_{0-4}=|\Delta x|_{0-2}+|\Delta x|_{2-4}=|9-5|\text{ m}+|-11-9|\text{ m}=24.0\text{ m}$$

质点在最初 4 s 内的平均速率为

$$\bar{v}_{0-4}=\left.\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|_{0-4}=\frac{24.0}{4}\text{ m/s}=6.0\text{ m/s}$$

1-3. 已知质点的运动学方程

$$\boldsymbol{r}=\left(3\cos\frac{\pi}{6}t\right)\boldsymbol{i}+\left(2\sin\frac{\pi}{6}t\right)\boldsymbol{j}$$

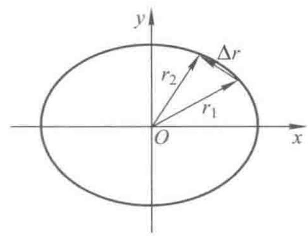
式中 r 的单位为 m,t 的单位为 s。(1) 求质点的轨迹方程,并画出轨迹图。(2) 求 $t_1=1$ s 和 $t_2=2$ s 之间的$\Delta\boldsymbol{r}$ 和$\Delta|\boldsymbol{r}|$ 的数值。(3) 求 $t_1=1$ s 和 $t_2=2$ s 两时刻的速度和加速度。(4) 在什么时刻质点的位矢与其速度矢量恰好垂直?求这时它的坐标。(提示:若两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 垂直,则 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$)

解:(1) 质点的运动学方程在 x 和 y 方向的分量式分别为

$$x=3\cos\frac{\pi}{6}t,\ y=2\sin\frac{\pi}{6}t$$

消去 t,得质点的轨迹方程为

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$$



解图 1-3

质点在 xOy 平面运动的轨迹为椭圆,如解图 1-3 所示。

(2) $t_1=1$ s 和 $t_2=2$ s 两时刻间质点的位移$\Delta\boldsymbol{r}$ 是一矢量,为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=3\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{6}\right)\boldsymbol{i}+2\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\right)\boldsymbol{j}$$
$$=(-1.10\boldsymbol{i}+0.73\boldsymbol{j})\text{ m}$$

其大小为

$$\Delta r=|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{(-1.10)^2+(0.73)^2}\text{ m}=1.32\text{ m}$$

$\Delta\boldsymbol{r}$ 与 Ox 轴正方向的夹角为

$$\theta=\arctan\frac{\Delta y}{\Delta x}=\pi-\arctan\frac{0.73}{1.10}=146.4^\circ$$

$\Delta|\boldsymbol{r}|$ 是一标量,为 $\boldsymbol{r}_2$的模与 $\boldsymbol{r}_1$的模之差,有

$$\Delta|\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{r}_2|-|\boldsymbol{r}_1|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}-\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

$$=\sqrt{\left(3\cos\frac{\pi}{3}\right)^2+\left(2\sin\frac{\pi}{3}\right)^2}-\sqrt{\left(3\cos\frac{\pi}{6}\right)^2+\left(2\sin\frac{\pi}{6}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{21}-\sqrt{31})\ \text{m}=-0.49\ \text{m}$$

（3）由 $$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=\left(-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{6}t\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}t\right)\boldsymbol{j}$$

可得 $$\boldsymbol{v}_1=\left[\left(-\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\pi}{6}\sqrt{3}\right)\boldsymbol{j}\right]\ \text{m/s}=(-0.79\boldsymbol{i}+0.91\boldsymbol{j})\ \text{m/s}$$

$\boldsymbol{v}_1$的大小为 $$v_1=|\boldsymbol{v}_1|=\sqrt{0.79^2+0.91^2}\ \text{m/s}=1.21\ \text{m/s}$$

与 Ox 轴正方向的夹角为

$$\alpha_1=\arctan\frac{v_{1y}}{v_{1x}}=\pi-\arctan\frac{0.91}{0.79}=131^\circ$$

$$\boldsymbol{v}_2=\left[\left(-\frac{\pi}{4}\sqrt{3}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\pi}{6}\right)\boldsymbol{j}\right]\ \text{m/s}=(-1.36\boldsymbol{i}+0.52\boldsymbol{j})\ \text{m/s}$$

$\boldsymbol{v}_2$的大小为 $$v_2=|\boldsymbol{v}_2|=\sqrt{1.36^2+0.52^2}\ \text{m/s}=1.46\ \text{m/s}$$

与 Ox 轴正方向的夹角为 $\alpha_2=\arctan\dfrac{v_{2y}}{v_{2x}}=\pi-\arctan\dfrac{0.52}{1.36}=159^\circ$

由 $$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\left(-\frac{\pi^2}{12}\cos\frac{\pi}{6}t\right)\boldsymbol{i}+\left(-\frac{\pi^2}{18}\sin\frac{\pi}{6}t\right)\boldsymbol{j}$$

得 $$\boldsymbol{a}_1=\left[\left(-\frac{\pi^2}{24}\sqrt{3}\right)\boldsymbol{i}+\left(-\frac{\pi^2}{36}\right)\boldsymbol{j}\right]\ \text{m/s}=-(0.71\boldsymbol{i}+0.27\boldsymbol{j})\ \text{m/s}$$

$\boldsymbol{a}_1$的大小为 $$a_1=|\boldsymbol{a}_1|=\sqrt{0.71^2+0.27^2}\ \text{m/s}=0.76\ \text{m/s}$$

与 Ox 轴正方向的夹角为

$$\beta_1=\arctan\frac{a_{1y}}{a_{1x}}=\pi+\arctan\frac{0.27}{0.71}=201^\circ$$

$$\boldsymbol{a}_2=\left(-\frac{\pi^2}{24}\right)\boldsymbol{i}+\left(-\frac{\pi^2}{36}\sqrt{3}\right)\boldsymbol{j}=-(0.41\boldsymbol{i}+0.47\boldsymbol{j})\ \text{m/s}$$

$\boldsymbol{a}_2$的大小为 $$a_2=|\boldsymbol{a}_2|=\sqrt{0.41^2+0.47^2}\ \text{m/s}=0.62\ \text{m/s}$$

与 Ox 轴正方向的夹角为

$$\beta_2=\arctan\frac{a_{2y}}{a_{2x}}=\pi+\arctan\frac{0.47}{0.41}=229^\circ$$

（4）质点的位矢与其速度矢量恰好垂直时，应满足关系 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=0$，有

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=\left[\left(3\cos\frac{\pi}{6}t\right)\boldsymbol{i}+\left(2\sin\frac{\pi}{6}t\right)\boldsymbol{j}\right]\cdot\left[\left(-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{6}t\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}t\right)\boldsymbol{j}\right]=0$$

即有 $\left(3\cos\frac{\pi}{6}t\right)\left(-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{6}t\right)+\left(2\sin\frac{\pi}{6}t\right)\left(\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}t\right)=-\frac{5}{12}\pi\sin\frac{\pi}{3}t=0$

显然,满足上式的条件是

$$\frac{\pi}{3}t=k\pi\ \mathrm{s},\quad k=0,1,2,\cdots$$

所以,质点的位矢与其速度矢量恰好垂直的时刻为 $t=3k$ s, $k=0,1,2,\cdots$

在这些时刻,质点正处于椭圆轨迹的半长轴和半短轴的端点处,即(3,0)、(0,2)和(-3,0)、(0,-2)点。

1-4. 一物体在黏性流体中沿直线运动,其加速度和速度的关系为 $a=-kv^2$,式中 k 为正值常量,已知 $t=0$ 时,$x=0,v=v_0$。求该物体在任意时刻的速度和运动方程。

分析:已知质点沿直线运动的加速度和初始运动状态,利用积分方法求该质点在任意时刻的速度和运动方程。这是运动学的第二类问题。

解:由加速度定义,有 $$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^2$$

利用初始条件并积分,有

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=-k\int_0^t\mathrm{d}t$$

可得物体在任意时刻的速度为

$$v=\frac{v_0}{1+kv_0t}$$

由速度定义,有 $$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{v_0}{1+kv_0t}$$

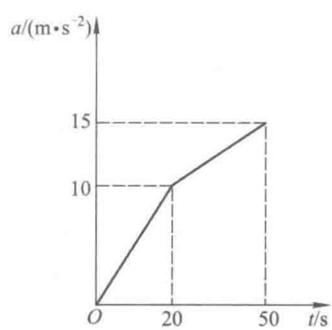
利用初始条件再积分,有

$$\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t\frac{v_0}{1+kv_0t}\mathrm{d}t$$

可得物体的运动学方程为

$$x=\frac{1}{k}\ln(1+kv_0t)$$

1-5. 火箭沿垂直方向由静止向上发射,其加速度随时间的变化规律如习题 1-5 图所示。



习题 1-5 图

试求火箭在 $t=50$ s 时燃料用完那一瞬时所能到达的高度及该时刻的速度。

分析：火箭加速度 a 为时间 t 的分段连续函数，计算时须分段计算并注意积分上下限的取值。

解：取 Oy 坐标轴垂直向上，原点于地面，设火箭由地面向上发射。

由图可得火箭运动的加速度为

$$a=\begin{cases} t/2, & 0\leqslant t\leqslant 20 \\ 10+(t-20)/6, & 20\leqslant t\leqslant 50 \end{cases}\quad \text{(SI 单位)} \tag{1}$$

火箭的初始运动状态为 $t_0=0$ 时，$y_0=0$，$v_0=0$。设 $t_1=20$ s 时火箭的高度为 y_1，速度为 v_1；$t_2=50$ s 时火箭的高度为 y_2，速度为 v_2。

由
$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_{t_0}^{t}a\mathrm{d}t \tag{2}$$

得
$$v=\int_0^t\frac{1}{2}t\mathrm{d}t=\frac{1}{4}t^2$$

将 $t_1=20$ s 代入上式，得
$$v_1=100\ \mathrm{m/s}$$

由
$$\int_{y_0}^{y}\mathrm{d}y=\int_{t_0}^{t}v\mathrm{d}t \tag{3}$$

得
$$y_1=\int_0^{t_1}\frac{1}{4}t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{12}t^3\bigg|_0^{t_1}=\frac{2}{3}\times10^3=6.67\times10^2(\mathrm{m})$$

将 v_1 和 y_1 以及 $t_1=20$ s 作为初始值，由(2)式计算 v_2：

$$\int_{v_1}^{v}\mathrm{d}v=\int_{t_1}^{t}\left[10+\frac{(t-20)}{6}\right]\mathrm{d}t$$

得
$$v=\frac{1}{12}(t^2+80t-800)$$

将 $t_2=50$ s 代入上式，得 $v_2=475$ m/s。v_2 也可由题图 $a-t$ 曲线下的面积求得。

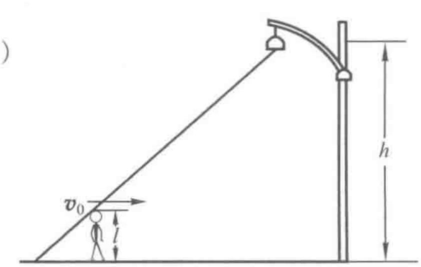
由(3)式计算 y_2：

$$\int_{y_1}^{y_2}\mathrm{d}y=\frac{1}{12}\int_{t_1}^{t}(t^2+80t-800)\mathrm{d}t$$

得

$$y_2=y_1+\frac{1}{36}(t^3+120t^2-2\,400t)\bigg|_{t_1}^{t_2}=8.92\times10^3(\mathrm{m})$$

1-6. 路灯距地面的高度为 h，一个身高为 l 的人在路上匀速运动，速度为 v_0，如习题 1-6 图所示，求：(1) 人影中头顶的移动速度；(2) 影子长度增长的速率。



习题 1-6 图

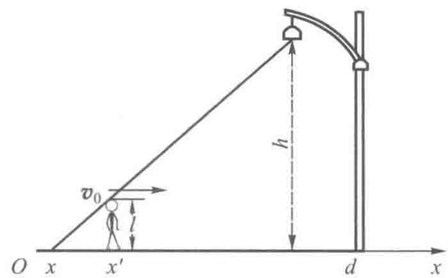
分析:利用相似三角形的几何关系,建立起人影头顶的运动学方程求解。

解:(1) 如解图 1-6 所示,取坐标轴 Ox,设 t 时刻人位于 x'处,头顶的影子位于 x 处,几何关系为

$$\frac{d-x}{h}=\frac{x'-x}{l}$$

得运动学方程

$$x=\frac{hx'-dl}{h-l}$$



解图 1-6

人头顶的影子移动的速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{h}{h-l}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}=\frac{h}{h-l}v_0$$

式中$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}=v_0$,由于$\frac{h}{h-l}>1$,所以 $v>v_0$,在向着路灯走近的情况下,头影移动的速度大于人的行走速度。

(2) 人影的长度为

$$x'-x=x'-\frac{hx'-dl}{h-l}=\frac{dl-lx'}{h-l}$$

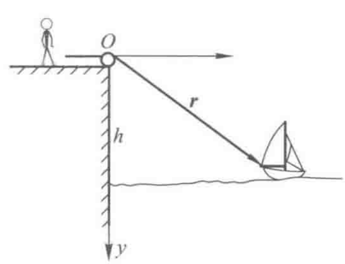
人影长度的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x'-x)=-\frac{l}{h-l}v_0$$

上述变化率小于零表明,随着人接近路灯,人影长度将变短。

1-7. 如习题 1-7 图所示,在离水面高度为 h 的岸边,有人用绳子拉船靠岸,船在离岸边 s 距离处。人收绳的速率为 v_0。(1) 从图中看出$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$各表示什么?(2) 求船的速度与加速度各有多大。

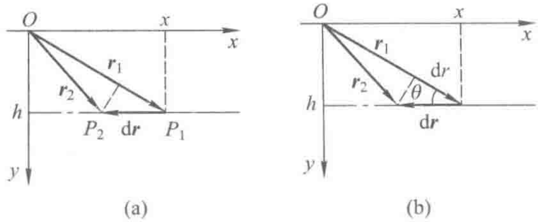
分析:在用绳拉船的过程中,绳上任一点的速度大小 v_0不变,而方向时时变化;船在水面运动速度的大小变化而方向始终不变。本题的要点在于正确建立船速 $\boldsymbol{v}$ 与收绳速率 v_0的关系。



习题 1-7 图

解:(1) 如解图 1-7(a)所示,设 t 时刻船位于 P_1,位矢为 $\boldsymbol{r}_1$,其大小 $|\boldsymbol{r}_1|=r_1$是该时刻的绳长,$t+\mathrm{d}t$ 时刻船位于 P_2,位矢为 $\boldsymbol{r}_2$。在 $\mathrm{d}t$ 内,船的位移是 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,指向 Ox 轴负方向,大小为 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$;

绳长的增量为$|\boldsymbol{r}_2|-|\boldsymbol{r}_1|$,即$\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}r$,其值小于零。



解图 1-7

由此可知:$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$是船的运动速度,$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}$;$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$是收绳速率,$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-v_0$,式中的负号表示绳子长度随$t$缩短($\mathrm{d}r<0$)。

(2) 由于$\mathrm{d}t$极小,因此$\boldsymbol{r}_1$和$\boldsymbol{r}_2$可视作平行。由解图 1-7(b)可知,$\mathrm{d}r$是$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$沿绳的分量,有

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\cos\theta=\mathrm{d}r$$

船的速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}=\frac{1}{\cos\theta}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}=-\frac{1}{\cos\theta}v_0\boldsymbol{i}$$

式中
$$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

所以
$$\boldsymbol{v}=-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v_0\boldsymbol{i}$$

式中负号表示船的速度方向沿x轴负方向。船在离岸边距离s处的速度为

$$v=-\frac{\sqrt{s^2+h^2}}{s}v_0$$

船的加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\frac{h^2v_0^2}{x^3}\boldsymbol{i}$$

船在离岸边距离s处有

$$a=-\frac{h^2v_0^2}{s^3}$$

$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$同向,表明船是加速靠岸的。

关于船速的另一解法:在解图所示的坐标系中,船的位矢(运动学方程)可表示为

$$\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i}+h\boldsymbol{j}$$

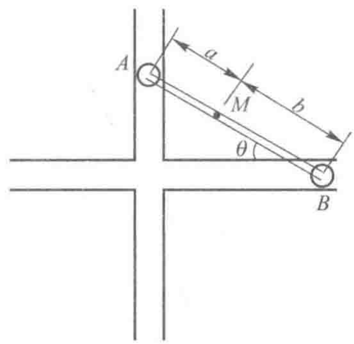
船的速度为
$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}$$

由几何关系可得
$$x=\sqrt{r^2-h^2}$$

所以
$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{r^2-h^2}\,\boldsymbol{i}=\frac{r}{\sqrt{r^2-h^2}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}$$

因$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-v_0$,故有
$$\boldsymbol{v}=-\frac{r}{\sqrt{r^2-h^2}}v_0\boldsymbol{i}=-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v_0\boldsymbol{i}$$

*1-8. 如习题 1-8 图所示,直杆 AB 两端可以分别在两个固定而垂直的直线导槽内滑动。试求杆上任意点 M 的轨迹方程以及任一时刻的速度的大小。已知 M 点距 A 端的距离为 a,距 B 端的距离为 b;又设杆的 A 端的运动速率为 v_0。



习题 1-8 图

分析:建立坐标系后,根据几何关系写出 M 点的运动学方程 $\boldsymbol{r}(t)$,消去分量式 $x(t)$ 和 $y(t)$ 中的参量 t,可得到 M 点的轨迹方程;通过对 t 求导,可得 M 点的速度和加速度。在本题中,$\boldsymbol{r}$ 及其分量 x 和 y 都是参量 t 的复合函数。

解:由题图知,t 时刻直杆与导槽间的夹角为 θ,且 θ 是时间 t 的函数,即 $\theta=\theta(t)$。

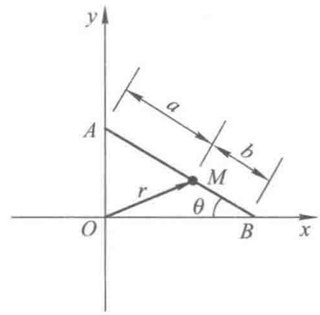
由解图 1-8 知,M 点的位矢可表示为
$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$$

式中　$x=a\cos\theta$,　$y=b\sin\theta$

这就是 M 点的运动学方程。

消去分量式 $x(\theta)$ 和 $y(\theta)$ 中的参量 θ,也即消去了时间参量 t,可得 M 的轨迹方程为
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(\text{椭圆})$$

将 x 和 y 分别对 t 进行复合求导,有
$$v_{Mx}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-a\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\qquad(1)$$



解图 1-8

和
$$v_{My}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=b\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

为求得$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$,需从题给 A 端的运动情况入手分析。

任意时刻 A 端的位矢为

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}=y_{\mathrm{A}}\boldsymbol{j}=(a+b)\sin\theta\boldsymbol{j}$$

A 端的运动被限制在沿 y 轴,速率为 v_0。即有

$$|\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}|=v_{\mathrm{A}}=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t}\right|=(a+b)\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=v_0 \tag{3}$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{v_0}{(a+b)\cos\theta} \tag{4}$$

由(1)式、(2)式和(4)式,可得 M 点速度的大小为

$$v_M=\sqrt{v_{Mx}^2+v_{My}^2}=\frac{v_0}{a+b}\sqrt{a^2\tan^2\theta+b^2}$$

2. 直线运动

1-9. 一辆卡车为了超车,以 90 km/h 的速度驶入左侧逆行道时,猛然发现前方 80 m 处一辆汽车迎面驶来。假定该汽车以 65 km/h 的速度行驶,同时也发现了卡车。设两司机的反应时间都是 0.70 s(即司机发现险情到实际制动所经过的时间),他们制动后的加速度大小都是 7.5 m/s^2,试问两车是否会相撞?如果会相撞,相撞时卡车的速度多大?

分析:相向而行的两车,都经历了 0.70 s 的匀速直线运动和相同加速度的匀减速直线运动,直至停车。两车行驶的总距离若大于 80 m 将相撞,反之则不会。

解:卡车的初速率为 $v_{10}=90$ km/h$=25$ m/s,汽车的初速率为 $v_{20}=65$ km/h$=18$ m/s,$L=80$ m。

在最初的$\Delta t_1=0.70$ s 内,两车都作匀速率直线运动,他们行驶的路程为

$$s_{10}+s_{20}=(v_{10}+v_{20})\Delta t_1=(25+18)\times0.7\ \mathrm{m}=30\ \mathrm{m}$$

两车制动后的加速度大小都是 $a=7.5$ m/s^2,卡车的速率降为零所行驶的路程为

$$s_1=\frac{v_{10}^2}{2a}=\frac{25^2}{2\times7.5}\ \mathrm{m}=41.7\ \mathrm{m}$$

汽车的速率降为零所行驶的路程为

$$s_2=\frac{v_{20}^2}{2a}=\frac{18^2}{2\times7.5}\ \mathrm{m}=21.6\ \mathrm{m}$$

从发现险情到两车都安全停下,他们共行驶的路程为

$$s=s_{10}+s_{20}+s_1+s_2=93.3\mathrm{m}>80\ \mathrm{m}$$

所以,两车会相撞。

设从制动起作用后到两车发生碰撞的时间间隔为Δt_2,有

$$L-(s_{10}+s_{20})=\left(v_{10}\Delta t_2-\frac{1}{2}a\Delta t_2^2\right)+\left(v_{20}\Delta t_2-\frac{1}{2}a\Delta t_2^2\right)$$

代入数据,可得方程

$$7.5\Delta t_2^2-43\Delta t_2+50=0\quad(\text{SI 单位})$$

解方程,得

$$\Delta t_2=1.62\ \mathrm{s}\quad(\text{舍去}\Delta t_2=4.11\ \mathrm{s})$$

所以,发生碰撞时卡车的速率为

$$v_1=v_{10}-a\Delta t_2=(25-7.5\times1.62)\ \mathrm{m/s}=12.9\ \mathrm{m/s}=46\ \mathrm{km/h}$$

1-10. 测量上抛物体两次经过两个给定点的时间,可以确定该处的重力加速度。若物体两次经过水平线 a 的时间间隔为 Δt_a,而两次经过水平线 b 的时间间隔为 Δt_b,水平线 a 和 b 之间的高度差为 h,假定在物体运动的范围内重力加速度为常量,试求该重力加速度的大小。

分析:上抛物体从抛出点上升至最高点经历的时间,与从最高点自由下落到抛出处所需的时间相同。物体两次经过水平线 a 所经历的时间,是物体从最高点自由下落到 a 所需时间的 2 倍,对水平线 b 也如此。

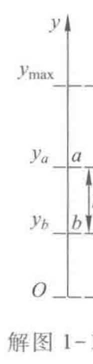
解:设物体从最高处自由下落到 a 所需时间为 t_a,有

$$y_a-y_{\max}=-\frac{1}{2}gt_a^2,\quad t_a=\Delta t_a/2$$

物体从最高处自由下落到 b 所需时间为 t_b,有

$$y_b-y_{\max}=-\frac{1}{2}gt_b^2,\quad t_b=\Delta t_b/2$$

据题意,有 $h=y_a-y_b=\frac{1}{2}g(t_b^2-t_a^2)=\frac{1}{2}g\left[\left(\frac{\Delta t_b}{2}\right)^2-\left(\frac{\Delta t_a}{2}\right)^2\right]$



解图 1-10

所以,重力加速度的大小为

$$g=\frac{8h}{(\Delta t_b)^2-(\Delta t_a)^2}$$

1-11. 高度为 2.5 m 的升降机，从静止开始以加速度 $a=0.2\ \text{m/s}^2$ 上升，8 s 后升降机顶板上有一螺帽落下来。问螺母落到升降机底板上所经过的时间和它相对地面下落的距离以及经过的路程。试以地面为参考系和以升降机为参考系分别计算。

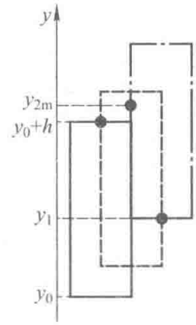
分析：对螺母运动的描述因参考系及坐标原点选择的不同而异。取地面参考系时，螺母作竖直上抛运动；取升降机参考系时，螺母以相对加速度自由下落。

解：(1) 取地面参考系

取 Oy 轴向上为正，原点选于地面。升降机从静止开始匀加速上升，$\Delta t=8$ s 时的速度为

$$v_0=a\ \Delta t=0.2\times8\ \text{m/s}=1.6\ \text{m/s}$$

此时，升降机底板升至 y_0，螺母位于 y_0+h 并脱落，脱落时具有向上的初速 v_0。将此时刻作为计时起点 $t=0$，写出运动学方程。对升降机底板，有



解图 1-11

$$y_1=y_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \tag{1}$$

对螺母，有

$$y_2=y_0+h+v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

设 t_d 时刻螺母落到升降机底板上，有 $y_1=y_2$。由(1)式和(2)式，解得

$$t_d=\sqrt{\frac{2h}{g+a}}=\sqrt{\frac{2\times2.5}{9.8+0.2}}\ \text{s}=0.707\ \text{s}$$

在 $t=0$ 到 t_d 这段时间内，螺母相对地面下落的距离为

$$\Delta y_2=y_2(t_d)-y_2(0)=v_0t_d-\frac{1}{2}gt_d^2 \tag{3}$$

代入数据得

$$\Delta y_2=\left[1.6\times0.707-\frac{1}{2}\times9.8\times(0.707)^2\right]\ \text{m}=-1.32\ \text{m}$$

计算螺母在 $t=0$ 到 t_d 这段时间内经过的路程 s，需考虑螺母在 y_0+h 处先以 v_0 上升至最高处 y_{2m}，再下落至该处的路程 s_1。它与(3)式 $\Delta y_2=s_2$ 之和构成总路程 s。

螺母上升至最高处 y_{2m} 时，速度为零。对(2)式求导并令其为零，可得所需时间 $t_1(t_1<t_d)$，即

$$t_1=\frac{v_0}{g}$$

将 t_1 代入(2)式,并令 $\Delta y_2'=y_{2m}-(y_0+h)$,得

$$\Delta y_2'=v_0t_1-\frac{1}{2}gt_1^2=\frac{v_0^2}{2g}$$

$$s_1=2\Delta y_2'=\frac{v_0^2}{g} \tag{4}$$

由(3)式和(4)式,得螺母下落过程中经过的路程为

$$s=s_1+s_2=s_1+\Delta y_2=\frac{v_0^2}{g}+\left|\left(v_0t_d-\frac{1}{2}gt_d^2\right)\right|=1.58\ \text{m}$$

(2) 取升降机参考系

取 Oy 轴向上为正,原点选于升降机底板,以螺母脱落时刻为计时起点。

在升降机参考系中,螺母下落的初速 $v_0=0$,相对参考系的加速度为$-(g+a)$,运动学方程为

$$y=h-\frac{1}{2}(g+a)t^2$$

落到底板时有,$y=0$,即可得到

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g+a}}=t_d$$

与取地面参考系所得结果相同。

1-12. 站台上一观察者,在火车开动时站在第一节车厢的最前端,第一节车厢在$\Delta t_1=4.0$ s 内从他身旁驶过,设火车作匀加速直线运动。求第 8 节车厢从他身边驶过时所经过的时间。

分析:火车作初速为零的匀加速直线运动。每节车厢的长度一定,写出第 n 节车厢经过身边所需时间的通式,即可求解。

解:设火车的加速度为 a,每节车厢长度均为 l,n 节车厢的总长为 $l_n=nl$。以第一节车厢的前端点为研究对象,从观察者身旁驶过所需时间为Δt_1,n 节车厢驶过身旁所需总时长为 t_n。

对第一节车厢,有

$$l=\frac{1}{2}a\Delta t_1^2$$

对 n 节车厢总长,有

$$l_n=nl=\frac{1}{2}at_n^2$$

由以上两式,得

$$t_n=\sqrt{n}\,\Delta t_1$$

第 n 节车厢从身旁驶过所需时长为

$$\Delta t_n=t_n-t_{n-1}=(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\,\Delta t_1$$

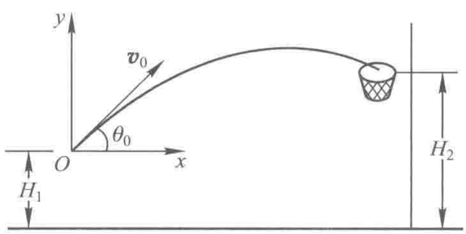
令 $n=8$,得

$$\Delta t_8=(\sqrt{8}-\sqrt{7})\times 4\ \text{s}=0.73\ \text{s}$$

3. 抛体运动

1-13. 当篮球运动员作立定投篮时,若以出手时球的中心作为坐标原点,作坐标系 Oxy,如习题 1-13 图所示。设篮圈中心坐标为(x,y),出手高度为 H_1,球的出手速度为 v_0,试证球的出手角度 θ_0应满足下式才能投入:

$$\tan\theta_0=\frac{v_0^2}{gx}\left[1+\sqrt{1-\frac{2g}{v_0^2}\left(H_2-H_1+\frac{gx^2}{2v_0^2}\right)}\right]$$



习题 1-13 图

分析:出手后篮球的运动轨迹是抛物线,当抛物线的下降段过篮圈中心坐标$(x、y)$时,球入篮圈。

解:在题图所示坐标系中,篮球的轨迹方程为

$$y=x\tan\theta-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$$

改写上述方程,得

$$y=x\tan\theta-\frac{gx^2}{2v_0^2}(1+\tan^2\theta)$$

即

$$\tan^2\theta-\frac{2v_0^2}{gx}\tan\theta+\left(1+\frac{2v_0^2}{gx^2}y\right)=0$$

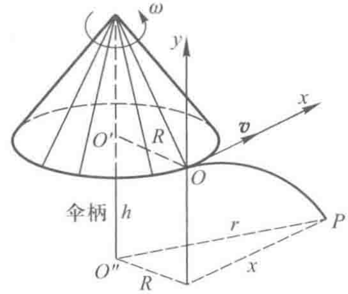
可解得

$$\tan\theta=\frac{v_0^2}{gx}\left[1\pm\sqrt{1-\frac{2g}{v_0^2}\left(y+\frac{gx^2}{2v_0^2}\right)}\right]$$

篮球由上方投入篮圈,在上式中应取"+"号。当 $y=H_2-H_1$ 时,$\theta=\theta_0$。即得

$$\tan\theta_0=\frac{v_0^2}{gx}\left[1+\sqrt{1-\frac{2g}{v_0^2}\left(H_2-H_1+\frac{gx^2}{2v_0^2}\right)}\right]$$

1-14. 如习题 1-14 图所示，一直立的雨伞，其边缘的半径为 R，离地面的高度为 h。当伞绕伞柄以角速度 ω 匀速旋转时，试证沿边缘飞出的水滴将落在地面上半径为 $r=R\sqrt{1+\frac{2h\omega^2}{g}}$ 的圆周上。请构思一种旋转式洒水器的方案。



习题 1-14 图

分析：伞绕伞柄以 ω 旋转，滞留在伞边缘的水滴沿圆周的切向飞出，作平抛运动。

解：在题图所示坐标系中，水滴自飞出点到落地点的水平距离为

$$x=v_0t,\ v_0=R\omega$$

水滴在竖直方向自由下落

$$y=-h=-\frac{1}{2}gt^2$$

可解得

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

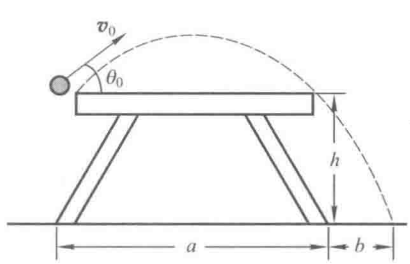
代入 $x(t)$ 表达式，得

$$x^2=\frac{2v_0^2h}{g}=\frac{2R^2\omega^2h}{g}$$

由图示几何关系得伞柄中心至水滴落地点的水平距离

$$r=\sqrt{R^2+x^2}=R\sqrt{1+\frac{2h\omega^2}{g}}$$

1-15. 如习题 1-15 图所示乒乓桌的一边，乒乓球作斜抛运动。已知桌高 $h=1.0$ m，宽 $a=2.0$ m。欲使乒乓球能从桌面的另一边切过，并落在离该边水平距离 $b=0.50$ m 处。求乒乓球的初速度 v_0 和抛射角 θ_0 各为多少？



习题 1-15 图

分析：将桌边点和落地点两个位置的

坐标值，代入斜抛运动的轨迹方程$f(x,y,v_0,\theta_0)=0$中，得到两个方程，解出两个未知量。

解：取坐标系 xOy，原点 O 位于球的发射处，如解图 1-15 所示。乒乓球（质点）的轨迹方程为

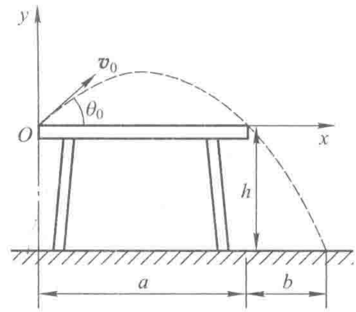
$$y=x\tan\theta_0-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta_0}$$

代入桌边点的坐标：$y=0,x=a$，得

$$v_0^2\sin 2\theta_0=ga \qquad (1)$$

代入落地点的坐标：$y=-h$，$x=a+b$，得

$$2h\cos^2\theta_0+(a+b)v_0^2\sin 2\theta_0=(a+b)^2g \quad (2)$$



解图 1-15

解(1)式和(2)式，得

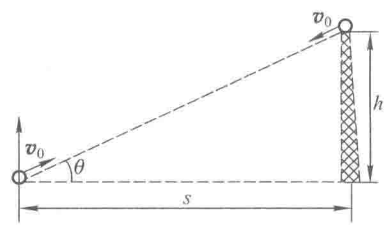
$$\tan\theta_0=\frac{ah}{(a+b)b}$$

$$v_0=\sqrt{\frac{(a+b)^2b^2+(ah)^2}{2h(a+b)b}g}$$

代入数据可得

$$\tan\theta_0=\frac{8}{5},\quad \theta_0=58°,\quad v_0=4.67\ \mathrm{m/s}$$

1-16. 如习题 1-16 图所示，置于地面和塔顶的两架弹射器，以相同的速率v_0沿它们的连线同时弹射出两球。如果塔顶高 $h=10$ m，两弹射器相隔的水平距离 $s=20$ m，这两个球会不会在空中相碰？要使两球在空中相碰，v_0至少应等于多少？



习题 1-16 图

分析：在忽略空气阻力条件下，两球被弹射后，在水平方向以相同的水平初速率，作匀速率直线运动；在竖直方向都作匀加速直线运动。两球若能在空中相碰，相碰点应处于两弹射点水平距离的中点，且$\boldsymbol{v}_0$的大小应能使两球在落地前相碰。

解：取坐标系 xOy，如解图 1-16 所示。设两球在被弹射后的 t_C时刻相碰，相碰点的坐标为(x_C,y_C)。在水平方向有

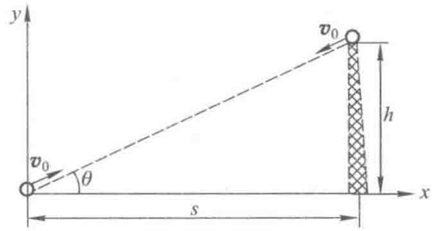
$$x_C=\frac{s}{2}=(v_0\cos\theta)t_C$$

得 $$t_C=\frac{s}{2v_0\cos\theta} \quad (1)$$

t 时刻两球在竖直方向的坐标分别为

$$y_1=(v_0\sin\theta)t-\frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

$$y_2=h-(v_0\sin\theta)t-\frac{1}{2}gt^2 \quad (3)$$



解图 1-16

将(1)式分别代入(2)式和(3)式，并由 $s\tan\theta=h$，可以得到

$$y_1=y_2=y_C$$

t_C时刻两球的垂直坐标和水平坐标相同，表明两球在空中相碰是可能的。但若 $\boldsymbol{v}_0$很小，致使 $y_C<0$，则“空中相碰”也将不能实现。所以，还必须满足条件：$y_C>0$。据此，应有 $$y_C=(v_0\sin\theta)t_C-\frac{1}{2}gt_C^2>0$$

得 $$v_0>\sqrt{\frac{gs}{4\cos\theta\sin\theta}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(s^2+h^2)}{h}g}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(20^2+10^2)\times9.8}{10}}\ \text{m/s}=11.07\ \text{m/s}$$

4. 曲线运动

1-17. 杂技表演中摩托车沿半径 50.0 m 的圆形路线行驶，其运动学方程为 $s=10.0+10.0t-0.5t^2$，其中 s 以 m 为单位，t 以 s 为单位。在 $t=5.0$ s 时，它的运动速率、切向加速度、法向加速度和总加速度是多少？

解：对路程求导可得到速率和切向加速度

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=10-t,\ a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-1\ \text{m/s}^2$$

由法向加速度定义，得 $$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(10-t)^2}{R}$$

总加速度为 $$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\frac{1}{R}\sqrt{(10-t)^4+R^2}$$

$t=5.0$ s 时，有 $$v=(10-5)\ \text{m/s}=5.0\ \text{m/s}$$

$$a_t=-1.0\ \text{m/s}^2,\quad a_n=\frac{(10-5)^2}{50}\ \text{m/s}^2=0.50\ \text{m/s}^2$$

$$a=\frac{1}{50}\sqrt{(10-5)^4+50^2}\ \text{m/s}^2=1.1\ \text{m/s}^2$$

总加速度与速度间的夹角为

$$\theta=\arctan\frac{a_n}{a_t}=\pi-\arctan\frac{0.50}{1.0}=153^\circ$$

1-18. 一电子在电场中运动,其运动学方程为 $x=3t,y=12-3t^2$,其中 x、y 以 m 为单位,t 以 s 为单位。计算 $t=1$ s 时电子的切向加速度、法向加速度以及轨迹上该点处的曲率半径。

解:对运动学方程求导,可得

$$v_x=3\ \mathrm{m/s},\quad v_y=-6t,\quad v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=3\sqrt{1+4t^2} \tag{1}$$

$$a_x=0,\quad a_y=-6\ \mathrm{m/s^2},\quad a=6\ \mathrm{m/s^2} \tag{2}$$

由切向加速度定义和(1)式,得

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{1+4t^2}=\frac{12t}{\sqrt{1+4t^2}} \tag{3}$$

由(2)式和(3)式,可得法向加速度为

$$a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=\frac{6}{\sqrt{1+4t^2}} \tag{4}$$

由法向加速度定义和(1)式,得

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{9(1+4t^2)}{\rho} \tag{5}$$

由(4)式和(5)式可得,t 时刻轨道上电子所在处的曲率半径为

$$\rho=\frac{3}{2}(1+4t^2)^{\frac{3}{2}} \tag{6}$$

所以,$t=1$ s 时的切向加速度为

$$a_{t1}=\frac{12}{\sqrt{5}}\mathrm{m/s^2}=5.37\ \mathrm{m/s^2}$$

法向加速度为

$$a_{n1}=\frac{6}{\sqrt{5}}\mathrm{m/s^2}=2.68\ \mathrm{m/s^2}$$

曲率半径为

$$\rho_1=\frac{3}{2}\sqrt[3]{5}\ \mathrm{m}=16.8\ \mathrm{m}$$

1-19. 一辆汽车沿圆形公路以初速 $v_0=7.0$ m/s 作匀减速行驶,经过 $t_1=5$ s

后，汽车的加速度与速度之间的夹角 $\theta_1=135°$，又经 3 s 后，加速度与速度之间的夹角 $\theta_2=150°$，求汽车的切向加速度和这两时刻的法向加速度。

分析：在匀减速圆周运动中，切向加速度与速度反向，而大小不变，法向加速度指向圆心，其大小则因减速而变小，所以加速度与速度间的钝角变大。

解：设圆形公路的半径为 R。t 时刻汽车的速率和法向加速度为

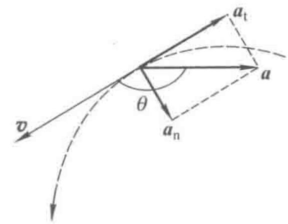
$$v=v_0-a_t t,\quad a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-a_t t)^2}{R} \tag{1}$$

如解图 1-19 所示，$\boldsymbol{a}_n$、$\boldsymbol{a}_t$ 与加速度 $\boldsymbol{a}$ 存在关系：

$$a_t=a\,|\cos\theta|,\quad a_n=a\sin\theta \tag{2}$$

由(1)式和(2)式，得

$$\frac{a_n}{a_t}=\frac{(v_0-a_t t)^2}{Ra_t}=|\tan\theta| \tag{3}$$



解图 1-19

分别将 t_1、θ_1 和 t_2、θ_2 代入(3)式，经整理可得

$$a_t=\frac{v_0\left(\sqrt{|\tan\theta_1|}-\sqrt{|\tan\theta_2|}\right)}{t_2\sqrt{|\tan\theta_1|}-t_1\sqrt{|\tan\theta_2|}}$$

将 $v_0=7.0$ m/s、$t_1=5$ s、$\theta_1=135°$ 和 $t_2=(5+3)$ s $=8$ s、$\theta_2=150°$ 代入上式，得

$$a_t=0.4\ \text{m/s}^2$$

由(3)式得

$$a_n=a_t|\tan\theta|$$

由此可得

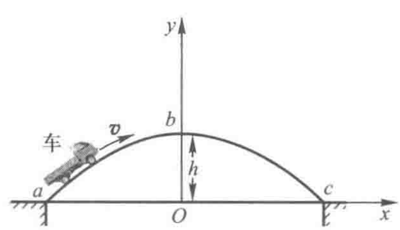
$$a_{n1}=a_t|\tan\theta_1|=0.4\times1\ \text{m/s}^2=0.4\ \text{m/s}^2$$

$$a_{n2}=a_t|\tan\theta_2|=0.4\times0.58\ \text{m/s}^2=0.23\ \text{m/s}^2$$

1-20. 一拱形桥 abc 如习题 1-20 图所示，桥面中部区域按 $y=h-kx^2$ 的规律变化。一辆汽车驶过桥面时，保持 x 方向的分速度 $v_x=u$ 不变。试求汽车在桥上任一点的速率、加速度及切向和法向加速度。

分析：利用 $v_x=u$ 可得 x 方向的运动方程 $x(t)$，代入轨迹方程后，得到 y 方向的运动方程 $y(t)$。由此通过对 t 求导，得到其他运动量。

解：设桥面起始点的坐标为 $(x_a,0)$，桥面上任一点的坐标为 (x,y)。由分速度 v_x 可得汽车在 x 方向的加速度和运动学方程。



习题 1-20 图

$$v_x=\frac{dx}{dt}=u,\quad a_x=\frac{d^2x}{dt^2}=0 \tag{1}$$

$$\int_{x_a}^{x}dx=\int_0^t u\,dt,\quad x=x_a+ut \tag{2}$$

将(2)式代入轨迹方程 $y=h-kx^2$，得

$$y=h-k(x_a+ut)^2 \tag{3}$$

对(3)式求导，得 y 方向的速度和加速度

$$v_y=\frac{dy}{dt}=-2ku(x_a+ut)$$

$$a_y=\frac{d^2y}{dt^2}=-2ku^2$$

由此得到汽车在桥上的速率

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{u^2+4k^2u^2(x_a+ut)^2}=u\sqrt{1+4k^2x^2}$$

由(1)式可知，加速度为　$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=a_y=-2ku^2$

切向加速度为　$a_t=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{4k^2u^2x}{\sqrt{1+4k^2x^2}}$

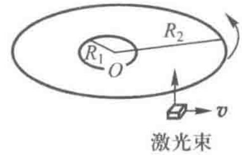
法向加速度为　$a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=\dfrac{2ku^2}{\sqrt{1+4k^2x^2}}$

汽车在桥面的中部时 $x=0$，有

$$a_t=0,\quad a_n=2ku^2$$

法向加速度指向拱形桥面下的曲率中心。

*1-21. 如习题1-21图所示，一张致密光盘(CD)音轨区域的内半径 $R_1=2.2$ cm，外半径 $R_2=5.6$ cm，径向音轨密度 $n=650$ 条/mm。在CD唱机内，光盘每转一圈，激光头沿径向向外移动一条音轨，激光束相对光盘是以 $v=1.3$ m/s 的恒定线速度运动的。问：(1) 这张光盘的全部放音时间是多少？(2) 激光束到达离盘心 $r=5.0$ cm 处时，光盘转动的角速度和角加速度各是多少？



习题 1-21

分析：光盘的音轨呈等间隔螺旋线分布。由于间隔很小，在径向的 dr 内分布有 ndr 条音轨，激光束相对每条音轨的运动可作圆周运动处理。由于激光束相对音轨运动的线速度恒定，由 $v=r\omega$ 可知，光盘转动的角速度 ω 与音轨半径 r 成反比。

解:(1) 设 $\mathrm{d}t$ 时间内,激光束沿光盘径向运动 $\mathrm{d}r$,经历的音轨数是 $\mathrm{d}N=n\mathrm{d}r$,读过音轨长度为 $\mathrm{d}l=2\pi rn\mathrm{d}r$ 所用的时间为

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}l}{v}=\frac{2\pi nr\mathrm{d}r}{v}$$

积分得全部放音时间为

$$T=\int_0^T \mathrm{d}t=\int_{R_1}^{R_2}\frac{2\pi rn\mathrm{d}r}{v}=\frac{\pi n}{v}(R_2^2-R_1^2)=4.16\times10^3\,\mathrm{s}=69.4\ \mathrm{min}$$

(2) 由线速度 $v=r\omega$ 恒定可知,在离盘心 $r=5.0$ cm 处时,光盘转动的角速度为

$$\omega=\frac{v}{r}=\frac{1.3}{0.05}\ \mathrm{rad/s}=26\ \mathrm{rad/s}$$

由角加速度定义,得

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v}{r}\right)=-\frac{v}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

其中$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{v}{2\pi rn}$。所以,激光束在离盘心 $r=5.0$ cm 处,光盘转动的角加速度为

$$\alpha=-\frac{v^2}{2\pi nr^3}=-\frac{1.3^2}{2\pi\times650\times10^3\times0.05^3}\ \mathrm{rad/s^2}=-3.31\times10^{-3}\mathrm{rad/s^2}$$

5. 相对运动

1-22. 一列车以 5 m/s 的速度沿 Ox 轴正方向行驶,某旅客在车厢中观察一个站在站台上的小孩竖直向上抛出的一球。相对于站台上的坐标系来说,球的运动学方程为

$$x=0,\quad y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2\quad(v_0、g\text{ 是常量})$$

(1) 如果旅客用随车一起运动的坐标系 $O'x'y'$ 来描写小球的运动,已知 $O'x'$轴与 Ox 轴同方向,$O'y'$轴与 Oy 轴相平行,方向向上,且在 $t=0$ 时,O'与 O 相重合,则 x'和 y'的表达式将是怎样的呢? (2) 在 $O'x'y'$坐标系中,小球的运动轨迹又是怎样的? (3) 从车上的旅客与站在车站上的观察者看来,小球的加速度各为多少? 方向是怎样的?

分析:对小球运动的描述,因参照系而异。这两参考系的时、空变换关系满足伽利略坐标及速度变换式。

解:(1) 以 Oxy 为站台坐标系,小孩位于坐标原点。$O'x'y'$为车厢上坐标

系，以 $v=5\ \mathrm{m/s}$ 的速度沿 x 轴正方向运动。由伽利略坐标变换，t 时刻车厢坐标系对小球运动的描述为

$$x'=x-vt=-5t \tag{1}$$

$$y'=y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

（2）从（1）式和（2）式中消去 t，得

$$y'=-\frac{v_0}{v}x'-\frac{1}{2}g\frac{x'^2}{v^2}=-\frac{v_0}{5}x'-\frac{g}{50}x'^2$$

在车厢坐标系中，小球运动的轨迹是抛物线。

（3）在站台坐标系中

$$a_x=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=0,\quad a_y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=g,\quad \boldsymbol{a}=-g\boldsymbol{j}$$

在车厢坐标系中

$$a'_x=\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2}=0,\quad a'_y=\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2}=g,\quad \boldsymbol{a}'=-g\boldsymbol{j}$$

可见

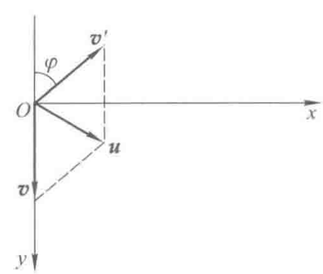
$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'$$

在这两参考系中加速度相同，方向向下。

1-23. 设河面宽 $l=1\ \mathrm{km}$，河水由北向南流动，流速 $v=2\ \mathrm{m/s}$，有一船相对于河水以 $v'=1.5\ \mathrm{m/s}$ 的速率从西岸驶向东岸。（1）如果船头与正北方向成 $\varphi=15°$ 角，船到达对岸要花多少时间？到达对岸时，船在下游何处？（2）如果船到达对岸的时间为最短，船头与河岸应成多大角度？最短时间等于多少？到达对岸时，船在下游何处？（3）如果船相对于岸走过的路程为最短，船头与岸应成多大角度？到对岸时，船又在下游何处？要花多少时间。

分析：水相对岸的流速 $\boldsymbol{v}$ 恒定，船相对水的速率 v' 不变而方向可变。$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$ 决定了船相对岸的速度 $\boldsymbol{u}$。

解： 研究对象是船，取岸为 S 系，水流为 S′系。S 系坐标 Oxy 如解图 1-23 所示。由速度变换关系



解图 1-23

$$\boldsymbol{u}_{船岸}=\boldsymbol{v}'_{船水}+\boldsymbol{v}_{水岸}$$

可知，船相对岸的速度 $\boldsymbol{u}$ 的分量为

$$u_x=v'\sin\varphi$$

$$u_y=v-v'\cos\varphi$$

船到达对岸的坐标为 $$x=l=u_x t=v'\sin\varphi t \tag{1}$$

$$y=u_y t=(v-v'\cos\varphi)t \tag{2}$$

(1) 将 $\varphi=15°$代入(1)式和(2)式,可得

$$t_1=\frac{l}{v'\sin\varphi}=\frac{1\times10^3}{1.5\times\sin 15°}\ \text{s}=2.58\times10^3\ \text{s}$$

$$y_1=(v-v'\cos\varphi)t=(2-1.5\times\cos 15°)\times2.58\times10^3\ \text{m}=1.42\ \text{km}$$

(2) 由(1)式可知,$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$时,t 最小,即有

$$t_2=\frac{l}{v'}=\frac{1\times10^3}{1.5}\ \text{s}=667\ \text{s}$$

并由(2)式,得 $$y_2=\left(v-v'\cos\frac{\pi}{2}\right)t_2=vt_2=1.33\ \text{km}$$

(3) 设船头与岸之间的夹角为 θ 时,船相对于岸走过的路程为最短。

由(1)式和(2)式,得 $$y=(v-v'\cos\theta)t=(v-v'\cos\theta)\frac{l}{v'\sin\theta} \tag{3}$$

令$\dfrac{dy}{d\theta}=0$,得 $$\cos\theta=\frac{v'}{v}=0.75,\quad \theta=41.4°$$

代入(3)式,得 $$y_3=0.88\ \text{km},\quad t=\frac{l}{v'\sin\theta}=1\ 010\ \text{s}$$

1-24. 设有一架飞机从 A 处向东飞到 B 处,然后又向西飞回 A 处,飞机相对于空气的速率为 v',而空气相对于地面的速率为 v_r,A、B 之间的距离为 l,飞机相对空气的速率 v'保持不变。试计算来回飞行时间:(1) 假定空气是静止的(即 $v_r=0$);(2) 假定空气的速度向东;(3) 假定空气的速度向北。

分析:由速度变换关系得到不同风速情况下的对地飞行速度,从而求出飞机往返两地所需时间。

解:以地面为 S 系,空气为 S′系,飞机为研究对象。

由速度变换关系,得

$$\boldsymbol{v}_{机地}=\boldsymbol{v}_{机气}+\boldsymbol{v}_{气地}$$

即 $$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}_r \tag{1}$$

(1) 当 $\boldsymbol{v}_r=0$,由(1)式得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'$$

单程时间 $$t_{AB}=t_{BA}=\frac{l}{v'}=\frac{l}{v}$$

往返时间 $$t_0=t_{AB}+t_{BA}=\frac{2l}{v'}=\frac{2l}{v}$$

（2）当 $\boldsymbol{v}_r$ 向东，由（1）式得，往程时

$$v_{AB}=v'+v_r$$

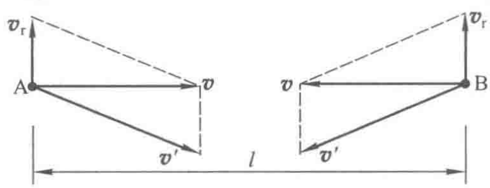
往程时间 $$t_{AB}=\frac{l}{v'+v_r}$$

返程时 $$v_{BA}=v'-v_r$$

返程时间 $$t_{AB}=\frac{l}{v'-v_r}$$

往返时间 $$t_1=t_{AB}+t_{BA}=\frac{l}{v'+v_r}+\frac{l}{v'-v_r}=\frac{t_0}{1-\left(\frac{v_r}{v'}\right)^2}$$

（3）当 $\boldsymbol{v}_r$ 向北，如解图 1-24 所示，往返速率均为



解图 1-24

$$v=\sqrt{v'^2-v_r^2}$$

往返的单程时间 $$t_{AB}=t_{BA}=\frac{l}{v}=\frac{l}{\sqrt{v'^2-v_r^2}}$$

往返时间 $$t_2=t_{AB}+t_{BA}=\frac{t_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v_r}{v'}\right)^2}}$$

1-25. 一条河在某段直线岸边同一侧有 A、B 两个码头，相距 1 km。甲、乙两人需要从码头 A 到码头 B，再立即由 B 返回。甲划船前去，船相对河水的速度为 4 km/h；而乙沿岸步行，步行速度也为 4 km/h。如河水流速为 2 km/h，方向从 A 到 B。求：(1) 在甲、乙两人都从码头 B 返回码头 A 的过程中，乙相对甲的速度是多少？(2) 谁先回到码头 A？先到达几分钟？

分析：取河岸为参考系 S，河水为参考系 S′，甲相对岸的速度可由速度变换关系求得。

解：设河水相对河岸的流速为 $\boldsymbol{v}_{水岸}$，甲相对河水的速度为 $\boldsymbol{v}_{甲水}$，则甲相对岸的速度为

$$\boldsymbol{v}_{甲}=\boldsymbol{v}_{甲水}+\boldsymbol{v}_{水岸}$$

甲从码头 A 向码头 B 的运动速率为

$$v_{甲1}=v_{甲水}+v_{水岸}=(4+2)\ \mathrm{km/h}=6\ \mathrm{km/h}$$

甲从码头 B 返回码头 A 的速率为

$$v_{甲2}=v_{甲水}-v_{水岸}=(4-2)\ \mathrm{km/h}=2\ \mathrm{km/h}$$

乙相对岸的速率是　　$v_{乙}=4\ \mathrm{km/h}$

（1）在甲、乙两人都从码头 B 返回码头 A 的过程中，乙相对甲的速率为

$$v_{乙甲}=v_{乙岸}-v_{甲岸}=v_{乙岸}-v_{甲2}=(4-2)\ \mathrm{km/h}=2\ \mathrm{km/h}$$

（2）设两个码头的间距为 L。甲回到码头 A 用时为

$$t_{甲}=\frac{L}{v_{甲1}}+\frac{L}{v_{甲2}}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{h}=\frac{2}{3}\mathrm{h}=40\ \mathrm{min}$$

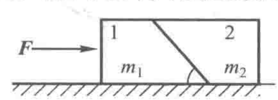
乙用时为

$$t_{乙}=\frac{2L}{v_{乙}}=\frac{1}{2}\mathrm{h}=30\ \mathrm{min}$$

所以，乙比甲早 10 min 回到 A。

6. 牛顿定律的应用

1-26. 有一长方形木块，切成如习题 1-26 图所示的两块，其质量分别为 m_1 和 m_2，两木块靠在一起平放在桌面上，以水平力 $\boldsymbol{F}$ 推动木块 1，所有摩擦均不计。求：(1) 两木块间的作用力；(2) $\boldsymbol{F}$ 为多大时，木块 2 开始上滑？



习题 1-26 图

分析：当两木块共同运动的加速度达最大值 a_M 时，桌面对 m_2 的支撑力为零，木块 2 开始上滑。

解：两木块的受力图如解图 1-26 所示。当两木块一起以最大加速度 a_M 运动时，有

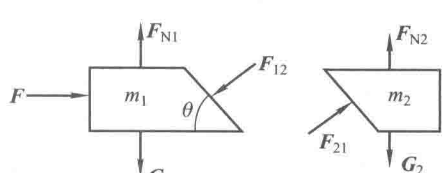
$$F-F_{12}\sin\theta=m_1a_M$$

$$F_{21}\sin\theta=m_2a_M$$

因 $F_{N2}=0$，有　　$F_{21}\cos\theta-m_2g\leqslant 0$

式中　　$F_{12}=F_{21}$

解以上方程可得



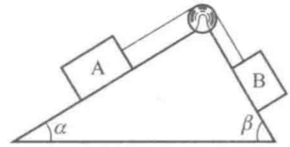
解图 1-26

（1）两木块间的作用力

$$F_{12}=F_{21}=\frac{m_2F}{(m_1+m_2)\sin\theta}$$

（2）木块 2 开始上滑时，$F\geqslant(m_1+m_2)g\tan\theta$

1-27. A、B 两个物体，质量分别为 $m_A=100$ kg，$m_B=60$ kg，装置如习题 1-27 图所示，两斜面的倾角分别为 $\alpha=30°$ 和 $\beta=60°$。如果物体与斜面间无摩擦，滑轮和绳的质量忽略不计，问：（1）系统将向哪边运动？（2）系统的加速度是多大？（3）绳中的张力多大？



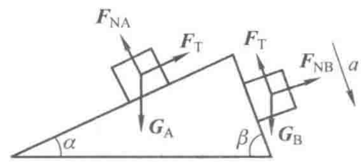
习题 1-27 图

分析：轻绳不可伸长，连接 A、B 两物体时，无论向哪边运动，A、B 的加速度值都相同。因不能直接判断系统的运动方向，可先假定某一运动正方向，并依此列方程，由计算结果确定物体的实际运动方向。

解：取两物体为研究对象。分别作 A、B 的受力分析见解图 1-27。设系统沿图示方向运动。两物体在运动方向上的动力学方程分别为

$$F_T-m_Ag\sin\alpha=m_Aa \qquad (1)$$

$$m_Bg\sin\beta-F_T=m_Ba \qquad (2)$$



解图 1-27

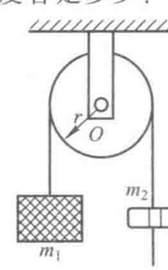
解（1）式和（2）式，得

$$a=\frac{m_Bg\sin\beta-m_Ag\sin\alpha}{m_A+m_B}=0.12\ \text{m/s}^2$$

$a>0$，表示系统的实际运动方向与假定正方向一致。从（1）式得

$$F_T=m_Ag\sin\alpha+m_Aa=502\ \text{N}$$

1-28. 如习题 1-28 图所示，一条轻绳跨过摩擦可被忽略的轻滑轮，在绳的一端挂一质量为 m_1 的物体，在另一侧有一质量为 m_2 的环，求当环相对于绳子以恒定的加速度 a_2 沿绳向下滑动时，物体和环相对地面的加速度各是多少？环与绳间的摩擦力多大？



习题 1-28 图

分析：分别对 m_1 和 m_2 作受力分析，设定轻绳及其连接物体运动的正方向，写出牛顿运动方程求解。注意牛顿运动方程是相对地面（惯性系）的。

解：对 m_1 和 m_2 作受力分析见解图 1-28。取 m_1 相对地面的加速度为 a_1，向下为正方向，m_2 相对地面的加速度为 a_2'，向上为正方向。设 m_2 相对绳的加速度大小为 a_2，与 a_2'

的假定方向相反,“轻绳”的质量为零。

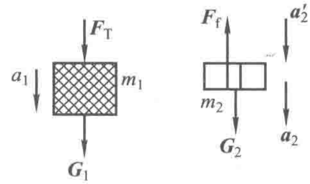
对 m_1,有　　$m_1g-F_T=m_1a_1$　　(1)

对 m_2,有　　$F_f-m_2g=m_2a_2'$　　(2)

对“轻绳”,有　$F_T-F_f=0$　　(3)

加速度 a_1、a_2和 a_2'间的关系为

$$a_2'=-a_2+a_1 \quad (4)$$



解图 1-28

可解得,当 a_2恒定时:

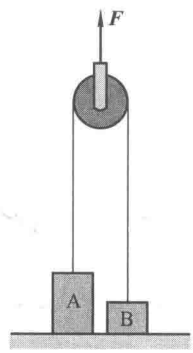
物体对地面的加速度为 $a_1=\dfrac{(m_1-m_2)g+m_2a_2}{m_1+m_2}$

环对地面的加速度为　$a_2'=\dfrac{(m_1-m_2)g-m_1a_2}{m_1+m_2}$

环与绳间的摩擦力为

$$F_f=F_T=\frac{m_1(2m_1g+m_2a_2)}{m_1+m_2}=\frac{m_1m_2(2g-a_2)}{m_1+m_2}$$

1-29. 一滑轮两边分别挂着 A 和 B 两物体,它们的质量分别为 $m_A=20$ kg,$m_B=10$ kg,今用力 F 将滑轮提起,如习题 1-29 图所示。当 F 分别等于(1) 98 N,(2) 196 N,(3) 392 N,(4) 784 N 时,求物体 A 和 B 的加速度以及两边绳中的张力(滑轮的质量与摩擦不计)。



习题 1-29 图

分析:不计质量不可伸长的轻绳,在拉紧并不计与滑轮间的摩擦时,绳中张力 F_T处处相等。物体 A 和 B 能否被提起,决定于各自所受的合力是否大于零。

解:以 A 和 B 为研究对象,在绳被拉紧时对 A 和 B 作受力分析,如解图1-29 所示。

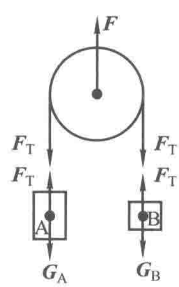
对 A,可被提起的条件是　$F_T-m_Ag=m_Aa_A>0$　(1)

对 B,可被提起的条件是　$F_T-m_Bg=m_Ba_B>0$　(2)

因滑轮的质量为零,$F-2F_T=0$　(3)

联立(1)式,(2)式,(3)式,得　$a_A=\dfrac{F}{2m_A}-g>0$　(4)

$$a_B=\frac{F}{2m_B}-g>0 \quad (5)$$



解图 1-29

(1) $F=98$ N 时,(4)式和(5)式均不成立,表示 A 和 B 不能被提起,即

$$a_A = a_B = 0$$

由(3)式,绳中的张力为　　$F_T = \dfrac{F}{2} = 49\ \text{N}$

(2) $F = 196$ N 时,由(4)式和(5)式可知,A 和 B 仍不能被提起,即

$$a_A = a_B = 0$$

绳中的张力为　　$F_T = \dfrac{F}{2} = 98\ \text{N}$

(3) $F = 392$ N 时,由(4)式和(5)两式可得

$$a_A = 0,\quad a_B = 9.8\ \text{m/s}^2$$

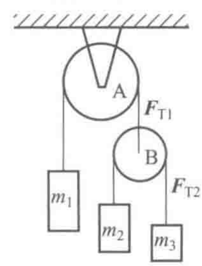
即 A 静止,B 加速上升。绳中的张力为 $F_T = \dfrac{F}{2} = 196\ \text{N}$

(4) $F = 784$ N 时,由(4)式和(5)式可得

$$a_A = 9.8\ \text{m/s}^2,\quad a_B = 29.4\ \text{m/s}^2$$

绳中的张力为　　$F_T = \dfrac{F}{2} = 392\ \text{N}$

1-30. 如习题 1-30 图所示,A 为定滑轮,B 为动滑轮,三个物体 $m_1 = 200$ g,$m_2 = 100$ g,$m_3 = 50$ g,求:(1) 每个物体的加速度;(2) 两根绳子中的张力 F_{T1} 与 F_{T2}。假定滑轮及绳的质量以及摩擦均可忽略不计。



习题 1-30 图

分析:求 m_2 和 m_3 对地的加速度 a_2 和 a_3 时,需考虑相对滑轮 B 的关系。

解:选地面参照系。如解图 1-30 所示,分别对各物体作受力分析,同时设定三者对地加速度 a_1、a_2 和 a_3 的方向,m_2、m_3 相对滑轮 B 的加速度为 a',在图中以虚线表示。

按设定加速度方向列运动方程,有

对 m_1　　$m_1g - F_{T1} = m_1a_1$　　(1)

对 m_2　　$m_2g - F_{T2} = m_2a_2$　　(2)

对 m_3　　$F_{T2} - m_3g = m_3a_3$　　(3)

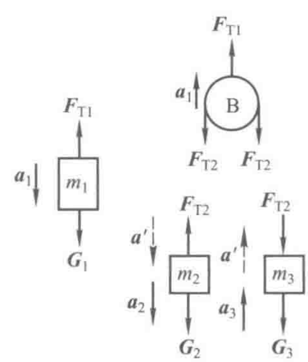
滑轮质量不计,有　$F_{T1} - 2F_{T2} = 0$　　(4)

m_2 对地的加速度　　$a_2 = a' - a_1$

m_3 对地的加速度　　$a_3 = a' + a_1$

联立(1)式、(2)式、(3)式、(4)式,得

$$a_1 = \frac{m_1m_2 + m_1m_3 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g = 1.96\ \text{m/s}^2$$



解图 1-30

$$a'=\frac{2m_1(m_2-m_3)}{m_1m_2+m_1m_3+4m_2m_3}g=3.92\ \mathrm{m/s^2}$$

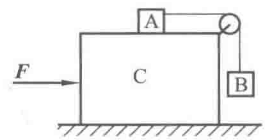
$$F_{T1}=\frac{8m_1m_2m_3}{m_1m_2+m_1m_3+4m_2m_3}g=1.57\ \mathrm{N}$$

$$F_{T2}=\frac{4m_1m_2m_3}{m_1m_2+m_1m_3+4m_2m_3}g=0.785\ \mathrm{N}$$

代入数据，可得

$$a_1=1.96\ \mathrm{m/s^2},a_2=1.96\ \mathrm{m/s^2},a_3=5.88\ \mathrm{m/s^2},F_{T1}=1.57\ \mathrm{N},F_{T2}=0.785\ \mathrm{N}$$

*1-31. 在光滑的水平面上有一质量为 m 的滑块 C，在其平台上有质量为 m_1 的物体 A 通过细绳和定滑轮与另一物体 B 相连，物体 B 的质量为 $m_2(m_2>m_1)$，如习题 1-31 图所示。若在滑块上施加一水平力 $\boldsymbol{F}$，使物体 A 和 B 与滑块保持相对静止。(1) 若物体 A 与滑块平面间无摩擦，则 $\boldsymbol{F}$ 应多大？(2) 若物体 A 与滑块平面间的摩擦因素为 μ，且 $m_1=m_2=m$，则 $\boldsymbol{F}$ 至少为多大？



习题 1-31 图

分析：A、B、C 三者在运动中保持的"相对静止"状态，不同于题图所示状态。物体 B 的加速度由倾斜细绳拉力的水平分量提供。

解：(1) A、B、C 三者的受力情况如解图 1-31(a)所示。运动中三者相对静止，可视作整体，有

$$F=(m_1+m_2+m)a \tag{1}$$

对物体 A，有

$$F_T=m_1a \tag{2}$$

对物体 B，有

$$F_T\sin\theta=m_2a \tag{3}$$

$$F_T\cos\theta=m_2g \tag{4}$$

解以上方程，得

$$F=(m_1+m_2+m)\frac{m_2g}{\sqrt{m_1^2-m_2^2}}$$

(2) 有静摩擦力 F_f 时，物体 A 的受力如解图 1-31(b)所示（当 F_f 大于最大静摩擦力 F_{fm} 时，三者将不能保持"相对静止"状态）。因 $m_1=m_2=m$，此时的方程组为

$$F=3ma \tag{1'}$$

$$F_T-F_f=ma \tag{2'}$$

$$F_T\sin\theta=ma \tag{3'}$$

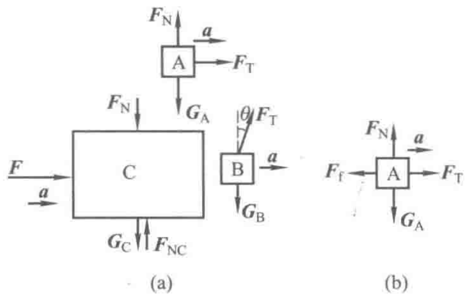
$$F_T\cos\theta=mg \tag{4'}$$

$$F_N-mg=0 \tag{5}$$

$$0<F_f\leqslant F_{fm}=\mu F_N \tag{6}$$

由(2)′式、(3)′式、(4)′式解出 F_f，并由(6)式

得
$$F_f=m(\sqrt{a^2+g^2}-a)\leqslant\mu mg$$

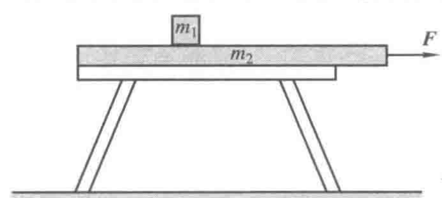


解图 1-31

从而解得
$$a\geqslant(1-\mu^2)\frac{g}{2\mu}$$

代回(1)′式，得
$$F\geqslant(1-\mu^2)\frac{3mg}{2\mu}$$

1-32. 质量为 m_1 的木板静置于水平桌面上，木板上放一质量为 m_2 的物体，如习题 1-32 图所示。现以水平恒力 $\boldsymbol{F}$ 作用于板上，将板从物体下水平地抽出。力 $\boldsymbol{F}$ 至少应多大？（设板与桌面间的摩擦因数为 μ_1，物体与板间的摩擦因数为 μ_2。）



习题 1-32 图

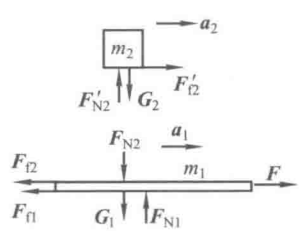
分析：木板能被抽出，必须满足的条件是它的加速度 a_1 大于物体的加速度 a_2。

解：分别对物体和木板作受力分析如解图 1-32 所示。其中 $F_{f2}=F'_{f2}$，$F'_{N2}=F_{N2}$。

对木板可列方程
$$F-F_{f1}-F_{f2}=m_1a_1$$
$$F_{N1}-F_{N2}-m_1g=0$$
$$F_{f1}=\mu_1F_{N1}$$

对物体可列方程
$$F'_{f2}=m_2a_2$$
$$F'_{N2}-m_2g=0$$
$$F'_{f2}=\mu_2F'_{N2}$$

加速度须满足条件
$$a_1>a_2$$

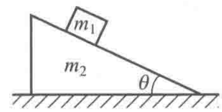


解图 1-32

解上述方程，可得

$$F>(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g$$

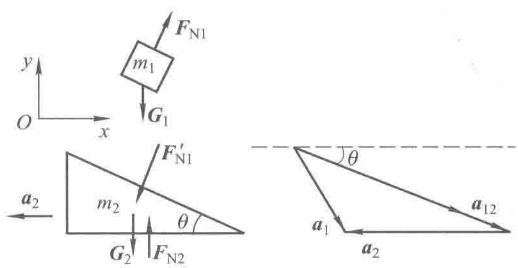
1-33. 质量为 m_2 的三角形木块，倾角为 θ，放在光滑的水平面上。另有一质量为 m_1 的滑块放在斜面上，如习题 1-33 图所示。如果接触面的摩擦忽略不计。试求两物体的加速度。



习题 1-33 图

分析：滑块下滑的同时，三角形木块也作加速运动，注意加速度的相对关系。

解：对木块和滑块的受力分析如解图 1-33 所示，其中 $F_{N1}=F'_{N1}$。取地面参考系和直角坐标系。设木块对地加速度为 $\boldsymbol{a}_2$，滑块对地加速度为 $\boldsymbol{a}_1$，滑块相对木块的加速度 a_{12}，三个加速度的关系如解图 1-33b 所示。据此可列方程



解图 1-33

$$-F_{N1}\sin\theta=-m_2a_2 \tag{1}$$

$$F_{N1}\sin\theta=m_1a_{1x} \tag{2}$$

$$F_{N1}\cos\theta-m_1g=-m_1a_{1y} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_{12}+\boldsymbol{a}_2 \tag{4}$$

(4)式的分量式为

$$a_{1x}=a_{12x}-a_2=a_{12}\cos\theta-a_2$$

$$a_{1y}=a_{12y}=a_{12}\sin\theta$$

可得

$$\tan\theta=\frac{a_{12y}}{a_{12x}}=\frac{a_{1y}}{a_{1x}+a_2}$$

或

$$a_{1x}\sin\theta-a_{1y}\cos\theta=-a_2\sin\theta \tag{5}$$

由(1)式和(2)式解出 a_{1x}，由(1)式和(3)式解出 a_{1y}，代入(5)式

可得

$$a_2=\frac{m_1\sin\theta\cos\theta}{m_2+m_1\sin^2\theta}g$$

$$a_{1x}=\frac{m_2\sin\theta\cos\theta}{m_2+m_1\sin^2\theta}g$$

$$a_{1y}=\frac{(m_1+m_2)\sin^2\theta}{m_2+m_1\sin^2\theta}g$$

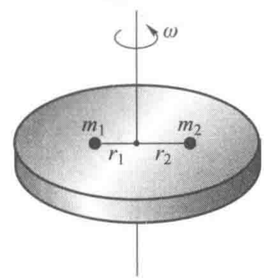
则 $\boldsymbol{a}_1$ 的大小为 $$a_1=\sqrt{a_{1x}^2+a_{1y}^2}=\frac{\sqrt{m_2^2+m_1(m_1+2m_2)\sin^2\theta}}{m_2+m_1\sin^2\theta}g\sin\theta$$

其方向以与水平面夹角 θ' 表示,有

$$\tan\theta'=\frac{a_y}{a_{1x}}=\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\tan\theta$$

$m_2\gg m_1$ 时,$a_2\to0$,过渡为固定斜面的结果。

1-34. 如习题 1-34 图所示,一轻绳两端各系一小物体,其质量分别为 m_1 和 m_2,置于匀速转动的水平转盘上,两物体到盘心的距离分别为 r_1 和 r_2。设 $m_2>m_1$,$r_2>r_1$,物体与转盘间的摩擦因数均为 μ。试讨论在不同角速度时,物体所受的静摩擦力和绳子张力,求保持物体在圆盘上静止所允许的最大角速度。



习题 1-34 图

解:两物体的受力图如解图 1-34 所示。F_1 和 F_2 为两物体所受的静摩擦力,其大小将随物体运动而变化。

(1) 在 ω 较小时,m_1 和 m_2 在各自所受静摩擦力 F_1 和 F_2 的作用下随盘转动,绳中拉力 $F_T=0$,此时有

$$F_1=m_1\omega^2r_1,\quad F_2=m_2\omega^2r_2$$

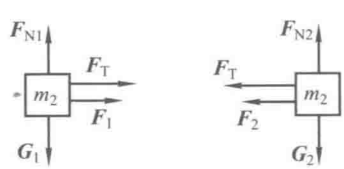
(2) 当 ω 增至一定值 ω_1 时,F_1 和 F_2 都将增大,但 F_2 先于 F_1 达到最大静摩擦力 $F_2=F_{2\max}=\mu m_2g$,而 F_T 仍为 0,故

$$\mu m_2g=m_2\omega_1^2r_2$$

得 $$\omega_1=\sqrt{\frac{\mu g}{r_2}}$$

$$F_1=m_1\omega_1^2r_1=\frac{\mu m_1gr_1}{r_2}$$

(3) 当 $\omega>\omega_1$ 时,$F_{2\max}$ 保持不变,F_1 未达到 $F_{1\max}$,但绳的拉力 $F_T\neq0$,此时 m_1 和 m_2 成为连接体保持相对圆盘静止。应用牛顿运动方程,有



解图 1-34

$$F_T+F_{2\max}=m_2a_2=m_2\omega^2r_2$$

$$F_T+F_1=m_1a_1=m_1\omega^2r_1$$

可解得
$$F_1=\mu m_2g-(m_2r_2-m_1r_1)\omega^2$$
$$F_T=m_2(\omega^2r_2-\mu g)$$

（4）ω 继续增大，直到 F_1 也达到最大值 $F_{1\max}=\mu m_1g$。此后，连接体 m_1 和 m_2 将发生朝 m_2 向外的滑动趋势。因而，此时 F_1 的方向将与解图 1-34 所示方向相反，相应的 ω 为 m_1 和 m_2 能够在圆盘上静止所允许的最大角速度 $\omega_{\max}$。运动方程为

$$F_T+F_{2\max}=m_2a_2=m_2\omega_{\max}^2r_2$$
$$F_T-F_{1\max}=m_1a_1=m_1\omega_{\max}^2r_1$$

可解得
$$\omega_{\max}=\sqrt{\frac{\mu(m_1+m_2)g}{m_2r_2-m_1r_1}}$$
$$F_T=\frac{m_1m_2(r_1+r_2)}{m_2r_2-m_1r_1}\mu g$$

当 ω 超过 $\omega_{\max}$ 后，m_1 和 m_2 将不能保持相对静止并随圆盘转动。

1-35. 半径为 r 的球被固定在水平面上，设球的顶点为 P。（1）将小物体自 P 点沿水平方向以初速度 v_0 抛出，要使小物体被抛出后不与球面接触而落在水平面上，其 v_0 至少应为多大？（2）要使小物体自 P 点自由下滑而落到水平面上，它脱离球面处离水平面有多高？

分析：小物体受球面的支持力 $\boldsymbol{F}_N$ 是变力，当 $\boldsymbol{F}_N=0$ 时，小物体脱离球面。本题也可利用机械能守恒定律求解。

解：（1）在 P 点处小物体被水平抛出，$\boldsymbol{F}_N=0$，有

$$mg=m\frac{v_0^2}{r}$$

得
$$v_0=\sqrt{gr}$$

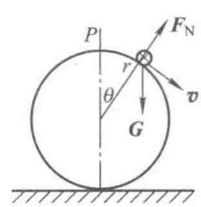
（2）设小物体沿球面下滑到 θ 角时离开球面，脱离球面时的速率为 v，如解图 1-35 所示，$\boldsymbol{F}_N=0$ 时，有

$$mg\sin\theta=ma_t=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$
$$mg\cos\theta=ma_n=m\frac{v^2}{r}$$

即有
$$v^2=rg\cos\theta \tag{2}$$

脱离处距离水平面的高度为

$$h=r(1+\cos\theta) \tag{3}$$



解图 1-35

由于 $v=\frac{ds}{dt}=\frac{rd\theta}{dt}$，因此 $dt=\frac{rd\theta}{v}$，(1)式可重写为

$$rg\sin\theta d\theta = v dv$$

两边积分

$$\int_0^\theta rg\sin\theta d\theta = \int_0^v v dv$$

得

$$v^2 = 2rg(1-\cos\theta)$$

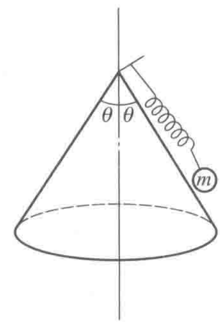
上式与(2)式相等，得

$$\cos\theta = \frac{2}{3}$$

代入(3)式，得

$$h = r(1+\cos\theta) = \frac{5}{3}r$$

1-36. 如习题 1-36 图所示，在顶角为 2θ 的圆锥顶点上，系一轻弹簧，劲度系数为 k，不挂重物时弹簧原长为 l_0。今在弹簧的另一端挂上一质量为 m 的小球，并使其在光滑圆锥面上绕圆锥轴线作圆周运动。试求恰使小球离开圆锥面时的角速度以及此时弹簧的长度。



习题 1-36 图

解：对小球的受力分析如解图 1-36 所示，合力的水平分量使小球作圆周运动。设小球以角速度 ω 作圆周运动时，弹簧的长度为 l。

在小球作圆周运动的水平面内，有

$$F\sin\theta - F_N\cos\theta = ma_n$$

其中

$$a_n = \omega^2 r = \omega^2 l\sin\theta$$

此时弹簧的拉力

$$F = k(l-l_0)$$

在垂直方向小球静止，有

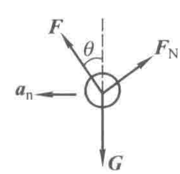
$$F\cos\theta + F_N\sin\theta - mg = 0$$

在以上方程中，令 $F_N=0$，可解得恰使小球离开圆锥面时弹簧的长度为

$$l = l_0 + \frac{mg}{k\cos\theta}$$

此时小球的角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{kg}{mg+kl_0\cos\theta}}$$



解图 1-36

1-37. 飞机做特技表演，在竖直平面内以匀速率 v 作半径为 R 的圆周运动。飞机驾驶员的质量为 m，试求他施于飞机座位的作用力有多大？

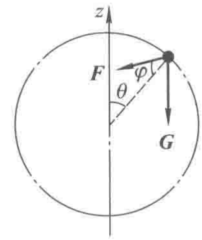
解:对飞行员的受力分析如解图 1-37 所示,设 $\boldsymbol{F}$ 为座位支撑力,与圆轨道法线方向的夹角为 φ。切向运动方程为

$$F\sin\varphi - mg\sin\theta = 0$$

法向运动方程为 $$F\cos\varphi + mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$$

解方程可得 $$F = m\sqrt{g^2 - 2\frac{v^2}{R}g\cos\theta + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{g\sin\theta}{v^2/R - g\cos\theta}$$



解图 1-37

当 $\theta=\pi$,$\varphi=0$,飞行员处于圆轨道的最低点处时,有

$$F = F_{\max} = mg + \frac{mv^2}{R}$$

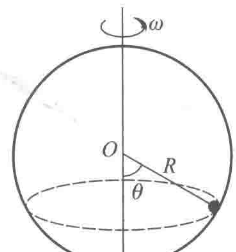
这时飞行员对座位的压力(垂直作用力)最大,对应“超重”最大的情况。

当 $\theta=0$,$\varphi=\pi$,飞行员处于圆轨道的最高点处时,有

$$F = F_{\min} = \frac{mv^2}{R} - mg$$

此时飞行员对座位的压力最小,对应“失重”最大的情况。

1-38. 如习题 1-38 图所示,半径为 R 的空心球壳绕竖直直径作匀速转动,其内壁有一质量为 m 的小物体,随球壳在一定的水平面内作匀速圆周运动。小物体与内壁间的摩擦因素为 μ。试求小物体能稳定在该平面转动的转速范围。



习题 1-38 图

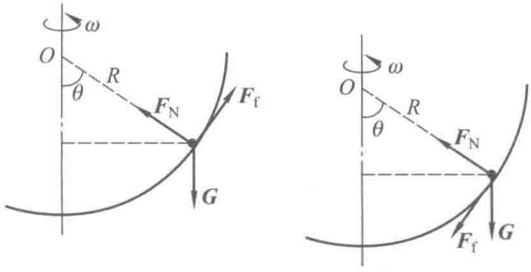
分析:对应不同的转速,小物体有向下或向上的滑动趋势。要使小物体能稳定在该平面,其受静摩擦力 F_f 应小于最大静摩擦力 $F_{f\max}$。当转速 $\omega=\omega_{\min}$ 很小,小物体有下滑趋势时,$\boldsymbol{F}_f$ 沿球壳切线向上;当转速 $\omega=\omega_{\max}$ 很大,小物体有上滑趋势时,$\boldsymbol{F}_f$ 应沿球壳切线向下。

解:如解图 1-38 所示,小物体随内壁转动时受重力 $\boldsymbol{G}$、支持力 $\boldsymbol{F}_N$ 和静摩擦力 $\boldsymbol{F}_f$ 作用,合力的水平分量使小球在水平面内转动。

当 $\omega=\omega_{\min}$ 时,阻止小球下滑趋势的静摩擦力达极大,此时的 $\boldsymbol{F}_f$ 沿切线向上,如解图 1-38(a)所示。小球在水平面内和竖直方向的运动方程为

$$F_N\sin\theta - F_f\cos\theta = mr\omega_{\min}^2 \tag{1}$$

$$F_N\cos\theta + F_f\sin\theta - mg = 0 \tag{2}$$



解图 1-38

$$F_f=\mu F_N,\quad r=R\sin\theta \tag{3}$$

解方程可得
$$\omega_{min}=\sqrt{\frac{(\sin\theta-\mu\cos\theta)}{R(\cos\theta+\mu\sin\theta)\sin\theta}g}$$

当 $\omega=\omega_{max}$ 时,阻止小球上滑趋势的静摩擦力达极大,此时的 $\boldsymbol{F}_f$ 沿切线向下,如解图 1-38(b)所示。有

$$F_N\sin\theta+F_f\cos\theta=mr\omega_{max}^2 \tag{1$'$}$$

$$F_N\cos\theta-F_f\sin\theta-mg=0 \tag{2$'$}$$

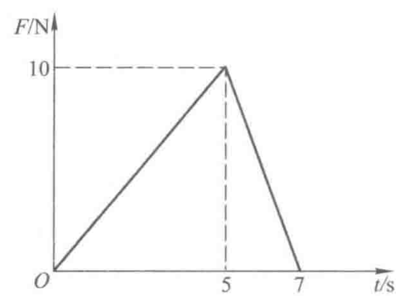
由(1)′式、(2)′式和(3)式可得

$$\omega_{max}=\sqrt{\frac{(\sin\theta+\mu\cos\theta)}{R(\cos\theta-\mu\sin\theta)\sin\theta}g}$$

所以,小球能在半径为 $r=R\sin\theta$ 的圆周平面稳定转动的转速范围为 $\omega_{min}\leqslant\omega\leqslant\omega_{max}$,即

$$\sqrt{\frac{(\sin\theta-\mu\cos\theta)}{R(\cos\theta+\mu\sin\theta)\sin\theta}g}\leqslant\omega\leqslant\sqrt{\frac{(\sin\theta+\mu\cos\theta)}{R(\cos\theta-\mu\sin\theta)\sin\theta}g}$$

1-39. 一质点的质量为 1 kg,沿 Ox 轴运动,所受的力如习题 1-39 图所示。$t=0$ 时,质点静止在坐标原点,试求此质点第 7 s 末的速度和坐标。



习题 1-39 图

分析:质点在变力 F 的作用下作直线运动。利用加速度 $a(t)$ 和初值条件,可求得 $v(t)$ 和 $x(t)$。求积分时应注意 $F-t$ 为分段连续函数。

解:据题意,$t=0$ 时,$x_0=0$,$v_0=0$。因 $m=1$ kg,由图可得加速度 a,

$$a=\frac{F}{m}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}k_1t_1=2t_1, & 0\leqslant t_1\leqslant 5\\ k_2(t_2-7)=-5(t_2-7), & 5\leqslant t_2\leqslant 7\end{cases}\quad (\text{SI 单位})\tag{1}$$

(1) 由 a-v 关系可知，a-t 曲线下的面积即为 v。由图示两个三角形面积可得，

$$v_5=\frac{1}{2}\times10\times5\ \mathrm{m/s}=25\ \mathrm{m/s},\quad v_{5-7}=\frac{1}{2}\times10\times(7-5)\ \mathrm{m/s}=10\ \mathrm{m/s}$$

所以，质点在第 7 s 末的速度为

$$v_7=v_5+v_{5-7}=35\ \mathrm{m/s}$$

(2) 由 $\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$，对(1)式积分，可得到质点在两个时间段的速度函数 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$

$$\int_0^{v_1}\mathrm{d}v_1=2\int_0^{t_1}t_1\mathrm{d}t$$

得

$$v_1=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=t_1^2,\quad 0\leqslant t_1\leqslant 5\tag{2}$$

由

$$\int_{v_5}^{v_2}\mathrm{d}v_2=-5\int_5^{t_2}(t_2-7)\mathrm{d}t_2$$

代入 $v_5=25\ \mathrm{m/s}$，得

$$v_2=\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-2.5t_2^2+35t_2-87.5,\quad 5\leqslant t_2\leqslant 7\tag{3}$$

对(2)式积分，得到质点在第 5 s 末的坐标 x_5

$$\int_{x_0}^{x_5}\mathrm{d}x_1=\int_0^5 t_1^2\mathrm{d}t_1$$

求出上述积分，并代入 $x_0=0$，得

$$x_5=\frac{125}{3}\ \mathrm{m}=41.67\ \mathrm{m}$$

对(3)式积分，得到质点在第 7 s 末的坐标 x_7

$$\int_{x_5}^{x_7}\mathrm{d}x_2=\int_5^7(-2.5t_2^2+35t_2-87.5)\mathrm{d}t_2$$

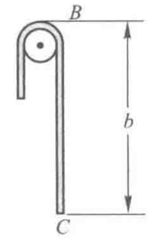
求出上述积分，并代入 $x_5=41.67\ \mathrm{m}$，得 $t=7\ \mathrm{s}$ 时的坐标为

$$x_7=105\ \mathrm{m}$$

所以，质点在第 7 s 末的坐标为 $x_7=105\ \mathrm{m}$，速度为 $v_7=35\ \mathrm{m/s}$。

1-40. 一根长为 L、质量均匀的软绳，挂在一半径很小的光滑木钉上，如习题 1-40 图所示。开始时，$BC=b$。试证当 $BC=2L/3$ 时，绳的加速度为 $a=g/3$，速度

为 $v=\sqrt{\dfrac{2g}{L}\left(-\dfrac{2}{9}L^2+bL-b^2\right)}$

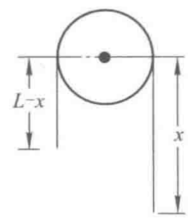


习题 1-40 图

分析：木钉两侧的软绳所受重力与下垂长度成正比。软绳单向侧滑时，两侧所受重力随之变化，且绳上各点有相同的速率和加速度大小。因而软绳的运动相当于变力作用下的直线运动。

用动能定理或机械能守恒定律求解更简捷。

解 1：如解图 1-40 所示，设软绳向右侧下滑，某时刻右侧的下垂长度为 x，左侧的下垂长度为 $(L-x)$。质量线密度为 $\lambda=\dfrac{m}{L}$，m 为软绳的总质量。软绳的运动方程为



解图 1-40

$$m_xg-m_{L-x}g=\lambda xg-\lambda(L-x)g=ma$$

即得 $$a=\frac{(2x-L)}{L}g$$

$x=2L/3$ 时， $$a=\frac{1}{3}g$$

由 $a(x)$ 关系，作变量代换 $$a=\frac{(2x-L)}{L}g=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v$$

积分，并代入上下限 $$\int_0^v v\mathrm{d}v=\int_b^{\frac{2}{3}L}\frac{g}{L}(2x-L)\mathrm{d}x$$

得 $$v=\sqrt{\frac{2g}{L}\left(-\frac{2}{9}L^2+bL-b^2\right)}$$

解 2：软绳在下滑过程中只有重力做功。t 时刻软绳受重力为 $\lambda(2x-L)g$，下滑中重力做功为

$$A=\int_b^{\frac{2}{3}L}\lambda g(2x-L)\mathrm{d}x$$

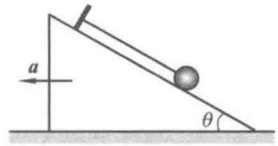
据动能定理，有 $$\int_b^{\frac{2}{3}L}\lambda g(2x-L)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}mv^2$$

得 $$v=\sqrt{\frac{2g}{L}\left(-\frac{2}{9}L^2+bL-b^2\right)}$$

7. 非惯性参考系与惯性力

1-41. 将质量为 m 的小球挂在倾角为 θ 的光滑斜面上，如习题 1-41 图所

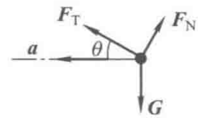
示。(1) 当斜面以加速度 a，沿如图所示的方向运动时，求绳中的张力及小球对斜面的正压力；(2) 当斜面的加速度至少为多大时，小球开始脱离斜面？（分别取地面为参考系和取斜面为参考系计算。）



习题 1-41 图

分析：取地面为参考系时，小球与斜面之间无相对运动，因而具有相同的对地加速度。对小球作受力分析后，可直接用牛顿运动定律求解。取斜面参考系（非惯性系）时，小球相对斜面静止，应添加惯性力求解。

解 1：(1) 取地面参考系。对小球的受力分析及所取坐标如解图 1-41 所示。



解图 1-41

小球在 x 方向的运动方程为　$F_T\cos\theta - F_N\sin\theta = ma$　(1)

在 y 方向的运动方程为　$F_T\sin\theta + F_N\cos\theta - mg = 0$　(2)

解得绳中的张力为　$F_T = m(g\sin\theta + a\cos\theta)$

对斜面的正压力为　$F_N = m(g\cos\theta - a\sin\theta)$

(2) 令 $F_N = 0$，得　$a = g\cot\theta$

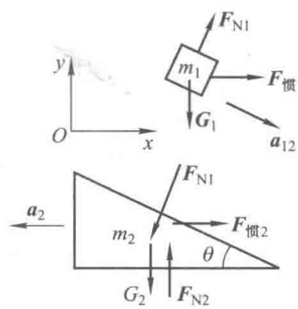
解 2：取斜面参考系时，(1) 式为

$$F_T\cos\theta - F_N\sin\theta - ma = 0$$

(2) 式不变，结果与解 1 相同。

1-42. 试用非惯性系解题 1-33。

分析：以相对三角形木块静止的参考系研究两物体的运动时，由于相对惯性系有加速运动，因而这是非惯性系。在此参考系中列两物体的运动方程时，需添加惯性力。



解图 1-42

解：设参考系相对惯性系的加速度为 $\boldsymbol{a}_2$，滑块对参考系的加速度为 $\boldsymbol{a}_{12}$。取坐标系 Oxy 固定于斜面，m_1 和 m_2 的受力如解图 1-42 所示。两物体的运动方程为

$$F_{N1}\sin\theta + F_{惯1} = m_1 a_{12x} \quad (1)$$

$$F_{N1}\cos\theta - m_1 g = -m_1 a_{12y} \quad (2)$$

式中

$$F_{惯1} = m_1 a_2$$

$$-F_{N1}\sin\theta + F_{惯2} = 0 \quad (3)$$

式中

$$F_{惯2} = m_2 a_2$$

设滑块对惯性系的加速度为 $\boldsymbol{a}_1$，根据加速度的相对关系 $\boldsymbol{a}_{12} = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$，有

$$a_{12x} = a_{12}\cos\theta = a_{1x} - (-a_2) = a_{1x} + a_2 \quad (4)$$

$$a_{12y}=a_{12}\sin\theta=a_{1y} \tag{5}$$

并有

$$\tan\theta=\frac{a_{12y}}{a_{12x}} \tag{6}$$

解以上方程,可得

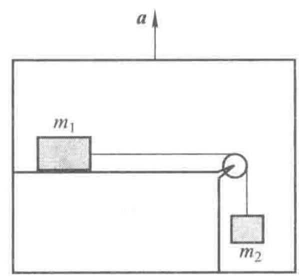
$$a_2=\frac{m_1\sin\theta\cos\theta}{m_2+m_1\sin^2\theta}g$$

$$a_{1x}=\frac{m_2\sin\theta\cos\theta}{m_2+m_1\sin^2\theta}g$$

$$a_{1y}=-\frac{(m_1+m_2)\sin^2\theta}{m_2+m_1\sin^2\theta}g$$

$$a_1=\sqrt{a_{1x}^2+a_{1y}^2}=\frac{\sqrt{m_2^2+m_1(m_1+2m_2)\sin^2\theta}}{m_2+m_1\sin^2\theta}g\sin\theta$$

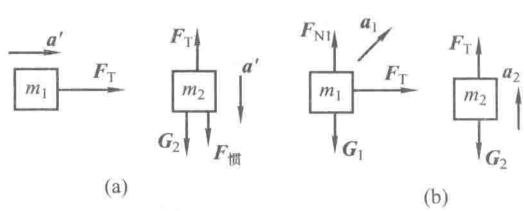
1-43. 如习题 1-43 图所示,在升降机内两物体质量分别为 $m_1=0.1$ kg,$m_2=0.2$ kg,用细绳跨过滑轮连接。当升降机以加速度 $a=g/2$ 上升时,机内和地面上的两人观察到两物体的加速度分别是多少?(略去各处的摩擦)



习题 1-43 图

分析:升降机内和地面上的两人分别处于非惯性系和惯性系内,他们观测到两物体的加速度与参考系有关。

解:(1) 以升降机为参考系。两物体在运动方向的受力如解图 1-43(a)所示,惯性力向下。升降机的加速度为 $\boldsymbol{a}$,设两物体相对升降机的加速度大小为 a'。



解图 1-43

对 m_1,有

$$F_T=m_1a'$$

对 m_2,有

$$F_T-m_2g-F_{惯}=-m_2a'$$

$$F_{惯}=m_2a$$

解得
$$a'=\frac{m_2(a+g)}{m_1+m_2}$$

代入数据，得
$$a'=g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$$

两物体加速度 a' 的方向与解图 1-43(a)所示方向一致，m_2 相对升降机以加速度 g 加速下降。

(2) 以地面为参考系。两物体的受力如解图 1-43(b)所示。升降机的加速度为 $\boldsymbol{a}$，设两物体在地面参考系的加速度分别为 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$。

对 m_1，有
$$F_T=m_1a_{1x}$$
$$a_{1y}=a$$

对 m_2，有
$$F_T-m_2g=m_2a_2$$

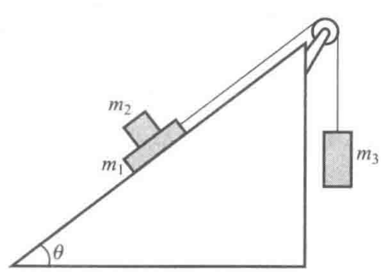
根据相对运动，有
$$a_2=a-a_{1x}$$

解以上方程，可得
$$a_{1x}=\frac{m_2(a+g)}{m_1+m_2}$$
$$a_2=\frac{m_1a-m_2g}{m_1+m_2}$$

代入数据，得
$$a_2=-\frac{g}{2}=-4.9\ \mathrm{m/s^2}$$
$$a_1=\sqrt{a_{1x}^2+a_{1y}^2}=\sqrt{g^2+\left(\frac{g}{2}\right)^2}=\frac{g}{2}\sqrt{5}=10.96\ \mathrm{m/s^2}$$

$a_2<0$ 表明 m_2 相对地面的加速度与图示方向相反，以 $g/2$ 加速下降，而 m_1 则以 a_1 作图示斜向加速运动，与水平方向的夹角可表示为
$$\theta=\arctan\left(\frac{a_{1y}}{a_{1x}}\right)$$

*1-44. 在如习题 1-44 图所示的力学系统中，已知 $m_1=1.0$ kg，$m_2=2.0$ kg，$m_3=3.5$ kg，物体 1 与斜面间的摩擦因数 $\mu_1=0.1$，物体 1 与物体 2 之间的滑动摩擦因数 $\mu_2=0.8$，不计绳和滑轮的质量及摩擦，试编写一计算机程序分别画出物体 1 与物体 2 的加速度对斜面倾角 θ 的关系曲线图，并分析在什么倾角范围内物体 2 相对物体 1 是静止的。

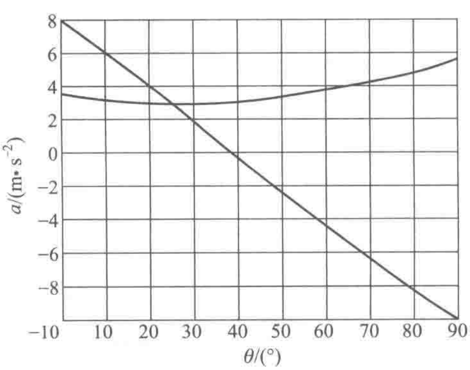


习题 1-44 图

参考程序

```
clear
eq1 ='F1-F2 =m1 * g * cos(alfa)';                % 对 m1 立方程
eq2 ='-mu1 * F1-mu2 * F2+T-m1 * a1 =m1 * g * sin(alfa)';
                                                  % 对 m1 立方程
eq3 ='F2 =m2 * g * cos(alfa)';                    % 对 m2 立方程
eq4 ='mu2 * F2-m2 * a2 =m2 * g * sin(alfa)';      % 对 m2 立方程
eq5 ='-F-m3 * a1 =-m3 * g';                       % 对 m3 立方程
[F1,F2,F,a1,a2] =solve(eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,'F1,F2,F,a1,a2');
                                                  % 解上述方程组
m1 =1;m2 =2;m3 =3.5;mu1 =0.1;mu2 =0.8;g =9.8;
                                                  % 给各参量赋值
a1 =subs(a1)                       % 写出 m1 的加速度作为 alfa 的函数
a2 =subs(a2)                       % 写出 m2 的加速度作为 alfa 的函数
alfa=0:0.01:pi/2;                  % 角度的变化范围
angle=alfa*180/pi;                 % 将角度从弧度变换为度
aa=subs(a1);                       % 计算 m1 的加速度
ab=subs(a2);                       % 计算 m1 的加速度
plot(angle,aa,'k',angle,ab,'b')
grid
xlabel('角度');ylabel('加速度/m/s^2')
```

答:m_1与m_2的加速度曲线在25°处相交,因此倾角小于25°时m_2相对m_1是静止的。



解图 1-44

第二章　运动的守恒量和守恒定律

一、教学基本要求

1. 掌握功的概念,掌握质点的动能定理和动量定理,理解质点系的内力和外力,了解质心概念和质心运动定理。

2. 掌握机械能守恒定律及其适用条件,质点系的功能原理,理解保守力做功的特点和势能的概念。

3. 掌握动量守恒定律及其适用条件,理解碰撞和力的成因。

4. 掌握质点的角动量守恒定律及其适用条件。

二、本章习题分类

1. 动量定理与动量守恒定律
2. 功和动能定理
3. 保守力的功、势能、功能原理和机械能守恒定律
4. 质心运动定理和动量守恒定律
5. 运动守恒定律的综合应用
6. 质点的角动量和角动量守恒定律

三、习题分析与解答

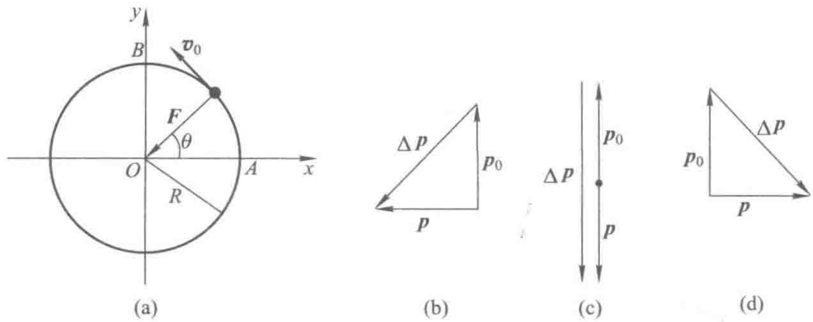
1. 动量定理与动量守恒定律

2-1. 质量为 m 的小球在水平面内作半径为 R,速率为 v_0的逆时针匀速圆周运动,初始时刻小球位于点(R,0)处。试求小球在经过:(1) 1/4 圆周;(2) 1/2 圆周;(3) 3/4 圆周;(4) 整个圆周的过程中的动量改变。试从冲量的计算得出结果。

分析:小球在水平面内作匀速圆周运动,动量的大小不变,但方向时刻在变化。

解:取坐标如解图 2-1(a)所示。设圆周半径为 R,由圆心向外的单位矢量为 $\boldsymbol{e}_n$。小球受合力为

$$F=-m\frac{v_0^2}{R}e_n$$



解图 2-1

设匀速圆周运动的角速度为 ω，初动量为 $\boldsymbol{p}_0=mv_0\boldsymbol{j}$。$t$ 时刻外力在 x、y 轴的分量为

$$F_x=-m\frac{v_0^2}{R}\cos\ \omega t$$

$$F_y=-m\frac{v_0^2}{R}\sin\ \omega t$$

冲量 $\boldsymbol{I}$ 在 x、y 方向的分量为

$$I_x=\int F_x\mathrm{d}t=-m\frac{v_0^2}{R}\int_0^t\cos\ \omega t\mathrm{d}t=-mv_0\int_0^\theta\cos\ \theta\mathrm{d}\theta \tag{1}$$

$$I_y=\int F_y\mathrm{d}t=-mv_0\int_0^\theta\sin\ \theta\mathrm{d}\theta \tag{2}$$

式中 $\theta=\omega t$。

由动量定理，冲量为 $\boldsymbol{I}=\Delta\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0=I_x\boldsymbol{i}+I_y\boldsymbol{j}$ (3)

$\Delta\boldsymbol{p}$ 的大小为 $|\Delta\boldsymbol{p}|=I=\sqrt{I_x^2+I_y^2}$

$\Delta\boldsymbol{p}$ 的方向用与 x 轴正方向的夹角 α 表示：

$$\tan\ \alpha=\frac{I_y}{I_x}=\frac{\Delta p_y}{\Delta p_x}$$

由(1)式、(2)式、(3)式可解得小球在各过程中，动量变化的大小和方向。

(1) 经 1/4 圆周，$\theta=\pi/2$，

$$I_x=-mv_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\ \theta\mathrm{d}\theta=-mv_0$$

$$I_y=-mv_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\ \theta\mathrm{d}\theta=-mv_0$$

因而,有
$$|\Delta \boldsymbol{p}| = I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} = \sqrt{2}\, m v_0, \quad \alpha = \frac{5}{4}\pi$$

$\Delta \boldsymbol{p}$ 如解图 2-1(b)所示。

(2) 经 1/2 圆周,$\theta = \pi$,$I_x = -m v_0 \int_0^{\pi} \cos\theta \mathrm{d}\theta = 0$,

$$I_y = -m v_0 \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta = -2 m v_0$$

因而,有
$$|\Delta \boldsymbol{p}| = I = 2 m v_0, \quad \alpha = \frac{3\pi}{2}$$

$\Delta \boldsymbol{p}$ 如解图 2-1(c)所示。

(3) 经 3/4 圆周,$\theta = 3\pi/2$,$I_x = -m v_0 \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \cos\theta \mathrm{d}\theta = m v_0$

$$I_y = -m v_0 \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin\theta \mathrm{d}\theta = -m v_0$$

因而,有
$$|\Delta \boldsymbol{p}| = I = \sqrt{2}\, m v_0, \quad \alpha = \frac{7\pi}{4}$$

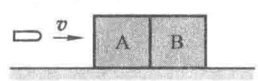
$\Delta \boldsymbol{p}$ 如解图 2-1(d)所示。

(4) 经整个圆周,$\theta = 2\pi$,　$I_x = -m v_0 \int_0^{2\pi} \cos\theta \mathrm{d}\theta = 0$,　$I_y = -m v_0 \int_0^{2\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta = 0$

故有
$$\boldsymbol{I} = \Delta \boldsymbol{p} = 0$$

由计算结果可知,在小球运动一周的过程中,每一时刻的动量都是不相同的。

2-2. 如习题 2-2 图所示两块并排的木块 A 和 B,质量分别为 m_1 和 m_2,静止地放置在光滑的水平面上,一子弹水平地穿过两木块,设子弹穿过两木块所用的时间分别为 Δt_1 和 Δt_2,木块对子弹的阻力为恒力 $\boldsymbol{F}$,试求子弹穿出后,木块 A、B 的速率。



习题 2-2 图

分析:木块 A、B 受子弹的摩擦力作用而运动。当子弹出 A 入 B 时,B 继续加速运动,而 A 则以子弹穿出时的速度作匀速直线运动。子弹穿出 B 后,B 将以大于 A 的速度匀速运动。

解:子弹穿出 A 时,A 和 B 的速度相同,设为 v_A。根据动量定理,有

$$F\Delta t_1 = (m_1 + m_2) v_A$$

得
$$v_A = \frac{F\Delta t_1}{m_1 + m_2}$$

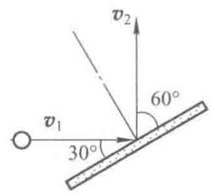
子弹穿出 B 后，设 B 的速度为 v_B，有

$$F\Delta t_2 = m_2 v_B - m_2 v_A$$

得

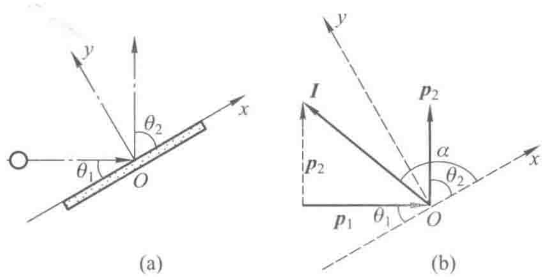
$$v_B = \frac{F\Delta t_2}{m_2} + v_A = F\left(\frac{\Delta t_2}{m_2} + \frac{\Delta t_1}{m_1+m_2}\right)$$

2-3. 一质量为 50 g 的乒乓球，以速率 $v_1 = 10$ m/s 飞向乒乓板，接触板后又以速率 $v_2 = 8$ m/s 飞出。设乒乓球触板前后的运动方向与板的夹角分别为 30° 和 60°，如习题 2-3 图所示。(1) 求乒乓球得到的冲量；(2) 如碰撞时间为0.1 s，求板施于乒乓球的平均冲力。



习题 2-3 图

解：据题意，可设乒乓板静止。取坐标系于乒乓板上，如解图 2-3(a) 所示。以乒乓球为研究对象。



解图 2-3

(1) 乒乓球得到的冲量为

$$\boldsymbol{I} = \Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = (p_{2x} - p_{1x})\boldsymbol{i} + (p_{2y} - p_{1y})\boldsymbol{j}$$

式中
$$\begin{aligned} p_{2x} - p_{1x} &= mv_2\cos\theta_2 - mv_1\cos\theta_1 \\ &= 0.05\times(8\times\cos 60° - 10\times\cos 30°)\ \text{N}\cdot\text{s} = -0.23\ \text{N}\cdot\text{s} \\ p_{2y} - p_{1y} &= mv_2\sin\theta_2 - (-mv_1\sin\theta_1) \\ &= 0.05\times(8\times\sin 60° + 10\times\sin 30°)\ \text{N}\cdot\text{s} = 0.60\ \text{N}\cdot\text{s} \end{aligned}$$

乒乓球得到冲量 $\boldsymbol{I}$ 的大小为

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{I}| = |\Delta\boldsymbol{p}| &= \sqrt{(p_{2x}-p_{1x})^2 + (p_{2y}-p_{1y})^2} \\ &= \sqrt{0.23^2 + 0.60^2}\ \text{N}\cdot\text{s} = 0.64\ \text{N}\cdot\text{s} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{I}$ 的方向（与 x 轴正向夹角）为

$$\alpha = \arctan\frac{\Delta p_y}{\Delta p_x} = \arctan\left(-\frac{0.60}{0.23}\right) = 111°$$

乒乓球得到冲量 $\boldsymbol{I}$ 的大小和方向如解图 2-3(b) 所示。

（2）板施于乒乓球的平均冲力的大小为

$$|\overline{\boldsymbol{F}}|=\frac{|\Delta \boldsymbol{p}|}{\Delta t}=\frac{0.717}{0.1}\ \mathrm{N}=7.17\ \mathrm{N}$$

$\overline{\boldsymbol{F}}$ 的方向与 $\boldsymbol{I}$ 相同，如解图 2-3b 所示。

2-4. 一颗子弹从枪口飞出的速度是 300 m/s，在枪管内子弹所受合力的大小由下式给出：

$$F=400-\frac{4\times10^{5}}{3}t$$

其中 F 以 N 为单位，t 以 s 为单位。（1）画出 $F-t$ 图；（2）计算子弹行经枪管长度所花费的时间，假定子弹到枪口时所受的力变为零；（3）求该力冲量的大小；（4）求子弹的质量。

解：（1）$F-t$ 图如解图 2-4 所示。合力 F 随时间 t 线性衰减。

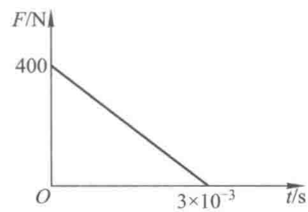
（2）根据假定，子弹在枪口时所受合力为零，

即有　$$F=400-\frac{4\times10^{5}}{3}t=0$$

解得子弹行经枪管长度所花费的时间 $t=3\times10^{-3}$ s。

（3）子弹所受冲量的大小为

$$I=\int_0^t F\mathrm{d}t=\int_0^{0.003}\left(400-\frac{4\times10^{5}}{3}t\right)\mathrm{d}t=0.6\ (\mathrm{N\cdot s})$$



解图 2-4

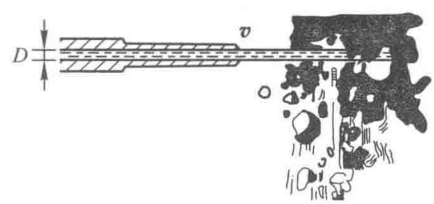
子弹所受冲量的大小也可以由 $F-t$ 图的面积求得，

$$I=\Delta S_{F-t}=\frac{1}{2}\times400\times3\times10^{-3}\ \mathrm{N\cdot s}=0.6\ \mathrm{N\cdot s}$$

（4）根据动量定理，　$$I=\Delta p=mv-0$$

得子弹的质量　$$m=\frac{I}{v}=\frac{0.6}{300}\ \mathrm{kg}=2\times10^{-3}\ \mathrm{kg}$$

2-5. 水力采煤是用高压水枪喷出的强力水柱冲击煤层，如习题 2-5 图所示。设水柱直径 $D=30$ mm，水速 $v=56$ m/s，水柱垂直射在煤层表面上，冲击煤层后的速度为零，求水柱对煤的平均冲力。



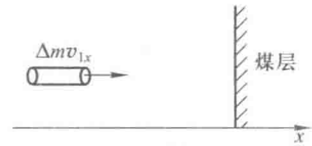
习题 2-5 图

分析：水柱对煤层的平均冲力作用在煤层上，其冲量的大小应等于单位时间内煤层动量的增量，这不能直接得到。

而单位时间内水柱动量的变化是可知的，利用牛顿第三定律，通过煤层对水柱的平均冲力来求解。

解：取坐标如解图 2-5 所示。Δt 时间内射向煤层的水柱质量为

$$\Delta m=\rho\Delta V=\frac{1}{4}\rho\pi D^2\Delta x=\frac{1}{4}\rho\pi D^2 v\Delta t$$



解图 2-5

设冲击煤层后的水速 $v'=0$，煤层对水柱的平均冲力为

$$\begin{aligned}\overline{F}&=\frac{\Delta mv'-\Delta mv}{\Delta t}=-\frac{\Delta mv}{\Delta t}\\&=-\frac{1}{4}\rho\pi D^2v^2=-2.22\times10^3\ \mathrm{N}\end{aligned}$$

水柱对煤层的平均冲力

$$\overline{F}'=-\overline{F}=2.22\times10^3\ \mathrm{N}$$

2-6. 2013 年 6 月 2 日，一辆从杭州开往北京的高速列车，遭飞鸟撞击，车头玻璃破裂，试估算飞鸟对玻璃的平均冲力。设飞鸟的质量为 0.25 kg，速度为 5 m/s，列车的速度为 300 km/h，碰撞时间的量级为 $10^{-2}\sim10^{-3}$ s。又设飞鸟与玻璃碰撞时，接触面积以鸟身截面计（约 20 cm^2），试求玻璃上被撞击部分将承受的平均压强为多大？

解：以匀速运行的列车为参考系，研究对象为飞鸟。列车对地的速度为 $v_{车地}=83.3$ m/s，撞击前鸟相对列车的速度为 $v_{鸟车}=v_{鸟地}+v_{车地}=(83.3+5)$ m/s $=88.3$ m/s，设撞击后飞鸟无反弹 $v_{鸟车}=0$。

列车对飞鸟的平均冲力为 $\overline{F}=\dfrac{0-mv_{鸟车}}{\Delta t}$

飞鸟对列车的平均冲力为 $\overline{F}'=-\overline{F}=\dfrac{mv_{鸟车}}{\Delta t}$

代入数据，可得飞鸟对玻璃的平均冲力为

$$\overline{F}'=(2.21\times10^3\sim2.21\times10^4)\ \mathrm{N}$$

平均压强为 $\overline{p}'=\dfrac{\overline{F}'}{\Delta S}=(1.1\times10^6\sim1.1\times10^7)$ Pa

2-7. 三艘质量均为 m_0 的小船鱼贯而行，速度均等于 $\boldsymbol{v}$。如果从中间船上同

时以速度 $\boldsymbol{u}$ 把两个质量均为 m_1 的物体分别抛到前后两船上，速度 $\boldsymbol{u}$ 的方向和 $\boldsymbol{v}$ 在同一直线上。问抛掷物体后，这三艘船的速度如何变化？

分析：不计水的流速和阻力，分别以各船和抛出物或接受物为系统。在水平面内各系统都不受外力，故各系统在水平面内的动量都守恒。求解时需注意各船的速度和从船上抛出或接受物体的速度均相对同一惯性参考系。

解：取水平坐标轴 Ox 固定于岸，坐标轴的正方向与 $\boldsymbol{v}$ 一致，分别对三艘船系统运用动量守恒定律。

对中间船和抛出物：向前抛出物体的速度为 $v+u$，向后抛出物体的速度为 $v-u$。设抛出物体后，中间船的速度为 v_2，有

$$(m_0+2m_1)v=m_0v_2+m_1(v+u)+m_1(v-u)$$

得

$$v_2=v$$

中间船对岸的速度不变。

对前方船和接受物系统：设接受物体后，前方船的速度为 v_1，有

$$m_0v+m_1(v+u)=(m_0+m_1)v_1$$

前方船对岸的速度变快，为

$$v_1=v+\frac{m_1}{m_0+m_1}u$$

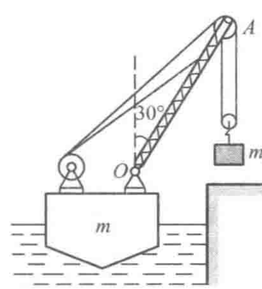
对后方船和接受物系统：设接受物体后，后方船的速度为 v_3，有

$$m_0v+m_1(v-u)=(m_0+m_1)v_3$$

后方船对岸的速度变慢，为

$$v_3=v-\frac{m_1}{m_0+m_1}u$$

2-8. 如习题 2-8 图所示，一浮吊质量 $m=20$ t，由岸上吊起 $m_0=2$ t 的重物后，再将吊杆 OA 与竖直方向间的夹角 θ 由 $60°$ 转到 $30°$。设杆长 $l=OA=8$ m，水的阻力与杆重忽略不计，求浮吊在水平方向移动的距离，并指明朝那边移动。



习题 2-8 图

分析：取浮吊和重物为系统。在水平方向系统的动量守恒。

解：取坐标系 Ox 固定于岸边，水平轴向右为正。设 m 相对岸的速度为 v_r，m_0 相对 m 速度的水平分量大小为 v，则 m_0 相对岸的水平速度为 $-(v-v_r)$。设开始时浮吊和重物相对静止。

由动量守恒定律可知

$$0=mv_r-m_0(v-v_r)$$

得浮吊相对岸的速度

$$v_r=\frac{m_0}{m_0+m}v \tag{1}$$

重物相对浮吊水平移动的距离Δs 为

$$\Delta s=\int_0^t v\mathrm{d}t=l(\sin 60°-\sin 30°) \tag{2}$$

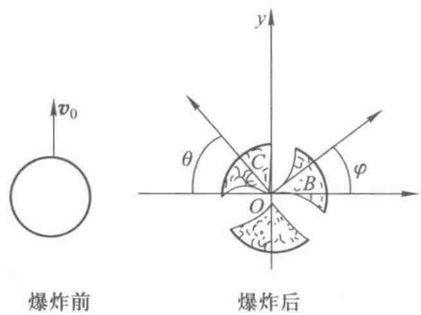
与此同时,浮吊船对岸移动的距离为Δx,$\Delta x=\int_0^t v_r\mathrm{d}t$ (3)

利用(1)式和(2)式,得 $\Delta x=\int_0^t \frac{m_0}{m_0+m}v\mathrm{d}t=\frac{m_0}{m_0+m}\int_0^t v\mathrm{d}t$

$$=\frac{m_0}{m_0+m}l(\sin 60°-\sin 30°)=0.27\ \mathrm{m}$$

浮吊朝岸移动了 0.27 m。

2-9. 一炮弹竖直向上发射,初速度为 v_0,在发射后经时间 t 在空中自动爆炸,假定分成质量相同的 A、B、C 三块碎片。其中 A 块的速度为零;B、C 两块的速度大小相同,且 B 块速度方向与水平成 φ 角,求 B、C 两碎块的速度(大小和方向)。



解图 2-9

分析:炮弹爆炸时的内力远大于重力,重力可略,爆炸前后炮弹系统的动量守恒。

解:以炮弹为系统,取坐标系 Oxy,如解图 2-9 所示。设爆炸前炮弹的速度为 $\boldsymbol{v}_0'$,爆炸后,B、C 两块速度的大小均为 v,并分别与 x 轴成 φ 角和 θ 角。三块碎片的质量均为 m。爆炸前后炮弹的动量守恒,有

x 方向:

$$0=mv\cos\varphi-mv\cos\theta$$

y 方向:

$$3mv_0'=mv\sin\varphi+mv\sin\theta$$

$$v_0'=v_0-gt$$

可得
$$v=\frac{3(v_0-gt)}{2\sin\varphi},\quad \theta=\varphi$$

2-10. 两个质量同为 m 的小孩，站在质量为 m_0 的平板车上，开始时平板车静止于光滑的直轨道上，他们以相对于车的速度 u 向后跳离平板车。(1) 若两人同时跳离，则平板车的速度是多少？(2) 若两人一个一个地跳离，则平板车的速度是多少？(3) 以上两种情况中哪一种的速度大些？

分析：水平光滑轨道与平板车之间无摩擦力作用，因此平板车和车上小孩的运动在水平方向的动量守恒。

解：以平板车和车上小孩为系统，取平板车运动方向为正方向。

(1) 两人同时跳离平板车。设车的速度为 v，人对地的速度为 $-(u-v)$。根据动量守恒定律，有

$$0=m_0v-2m(u-v)$$

得
$$v=\frac{2m}{m_0+2m}u$$

(2) 两人一个一个地跳离。设第一人跳离时，车的速度为 v_1，第二人跳离时车的速度为 v_2。

有
$$0=(m_0+m)v_1-m(u-v_1)$$

得
$$v_1=\frac{m}{m_0+2m}u$$

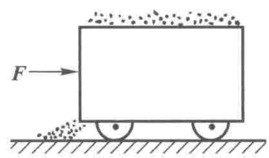
第二人跳离车，有
$$(m_0+m)v_1=m_0v_2-m(u-v_2)$$

得
$$v_2=v_1+\frac{m}{m_0+m}u=\frac{m}{m_0+2m}u+\frac{m}{m_0+m}u$$

(3) 由 $v_2>v_1$ 可知，在相同 u 的情况下，一个一个地跳离比同时跳离，平板车的速度会大些。

2-11. 如习题 2-11 图所示，一工人以水平恒力 $\boldsymbol{F}$ 推一煤车，由于煤车底部有一小洞，出现漏煤粉的现象，其漏煤速率为 $\frac{dm}{dt}=q$。设煤车原来静止，质量为 m_0。自 $t=0$ 开始推车，试求 t 时刻煤车的速度。

分析：煤车的整体质量随时间减少，这是变质量问题。考虑一段时间内煤车和漏下煤粉总体的动量变化，仍可利用动量定理求解。



习题 2-11 图

解：设 t 时刻煤车质量为 m，速度为 v。dt 时间

内,漏下的煤粉质量为 $\mathrm{d}m$,煤车速度增大 $\mathrm{d}v$。在 $\boldsymbol{F}$ 方向上动量的变化为

$$\mathrm{d}p=p(t+\mathrm{d}t)-p(t)=[(m-\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v)+(\mathrm{d}m)v]-mv$$

略去高阶小量 $\mathrm{d}m\mathrm{d}v$,得
$$\mathrm{d}p=m\mathrm{d}v$$

由动量定理,得
$$F=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

m 随时间变化,有
$$\int_{m_0}^{m}\mathrm{d}m=-\int_0^t q\mathrm{d}t$$

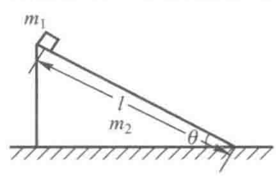
得
$$m=m_0-qt \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式,并积分

$$\int_0^t \frac{F\mathrm{d}t}{m_0-qt}=\int_0^v \mathrm{d}v$$

得 t 时刻煤车的速度为
$$v=\frac{F}{q}\ln\frac{m_0}{m_0-qt}$$

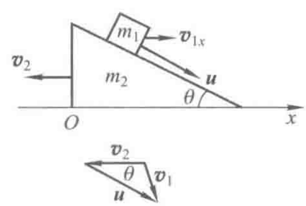
2-12. 如习题 2-12 图所示,质量为 m_2 的三角形木块,斜面长 l,倾角为 θ,静置于光滑的水平地面上。今将一质量为 m_1 的物体放在斜面的顶端,让它自由滑下。求当物体滑到地面时,三角形木块移动多少距离(试用两种方法求解)。



习题 2-12 图

分析:取 m_2 和 m_1 为系统时,系统在水平方向不受外力,可利用动量守恒定律求解,也可用系统质心的水平位置不变来求解。

解 1:取 m_2 和 m_1 为系统。因所有接触面都是光滑的,没有摩擦力;m_2 和 m_1 间的作用力是内力,不会改变系统动量;而重力和地面对 m_2 的支持力在垂直方向,因而系统在水平方向的动量守恒。



解图 2-12

设 m_2 向左运动,速度为 $\boldsymbol{v}_2$,m_1 对地的速度为 $\boldsymbol{v}_1$,m_1 相对 m_2 的速度为 $\boldsymbol{u}$,由于 m_1 在运动中始终不脱离斜面,因此 u 的水平分量为 $u\cos\theta$。

系统在水平方向的动量守恒,有

$$0=-m_2v_2+m_1v_{1x}$$

式中
$$v_{1x}=u\cos\theta-v_2$$

可以解得
$$v_2=\frac{m_1}{m_2+m_1}u\cos\theta$$

据速度定义 $v_2=\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$,对上式积分,注意到 $u\cos\theta=\dfrac{\mathrm{d}x_{21}}{\mathrm{d}t}$,$x_{21}$是 m_1相对 m_2移动的水平距离。

有
$$\int_0^{-x_2}\mathrm{d}x_2=\frac{m_1}{m_2+m_1}\int_0^{l\cos\theta}\mathrm{d}x_{21}$$

得
$$-x_2=\frac{m_1}{m_2+m_1}l\cos\theta$$

三角形木块向左移动的距离为 $s_2=|-x_2|=\dfrac{m_1}{m_2+m_1}l\cos\theta$。

解 2:m_2和 m_1系统在水平方向不受外力,故系统质心的水平位置不变。

设 m_2质心的水平坐标为 x_2,m_1质心的水平坐标为 x_1,系统质心的水平坐标为 x_C,有

$$x_C=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

系统质心位置不变,有 $\Delta x_C=0=m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2$

根据相对运动,有 $\Delta x_1=\Delta x_{21}+\Delta x_2=l\cos\theta+\Delta x_2$

可解得
$$\Delta x_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\Delta x_{21}=-\frac{m_1}{m_1+m_2}l\cos\theta$$

与解 1 结果一致,式中负号表示 m_2的位移是朝左的。

2. 功和动能定理

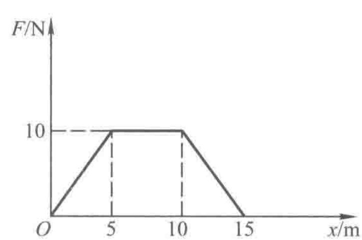
2-13. 质量为 2 kg 的物体,在沿 x 方向的变力作用下,在 $x=0$ 处由静止开始运动。设变力与 x 的关系如习题 2-13 图所示。试由动能定理求物体在 $x=5$,10,15 m 处的速率。

分析:各阶段变力做的功,可由功的定义通过积分求得,也可由 $F(x)$图的面积得到。

解 1:由 $F-x$ 图,写出 $F(x)$函数为

$$F(x)=\begin{cases}2x & (0\leqslant x\leqslant 5\,\mathrm{m})\\ 10 & (5\ \mathrm{m}\leqslant x\leqslant 10\ \mathrm{m})\\ 30-2x & (10\ \mathrm{m}\leqslant x\leqslant 15\ \mathrm{m})\end{cases}$$

式中 x 以 m 为单位,F 以 N 为单位。



习题 2-13 图

根据动能定理

$$A=\int_{r_1}^{r_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\Delta E_{\mathrm{k}}$$

$x=5$ m 时,有 $$A_1=\int_0^5 2x\mathrm{d}x=25=\frac{1}{2}mv_5^2-0$$

得 $x=5$ m 处的速率 $$v_5=5\ \mathrm{m/s}$$

$x=10$ m 时,有

$$A_2=\int_0^5 2x\mathrm{d}x+\int_5^{10}10\mathrm{d}x=25+50=75=\frac{1}{2}mv_{10}^2-0$$

得 $$v_{10}=8.66\ \mathrm{m/s}$$

$x=15$ m 时,有 $$A_3=A_1+A_2+\int_{10}^{15}(30-2x)\mathrm{d}x$$
$$=25+50+25=100=\frac{1}{2}mv_{15}^2-0$$

得 $$v_{15}=10.0\ \mathrm{m/s}$$

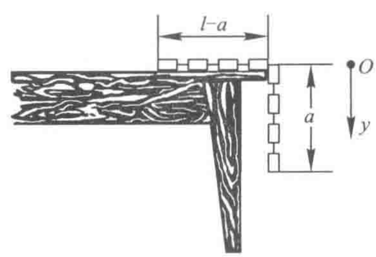
解 2:由 $F-x$ 图面积求功。

$$A_1=S_1=\frac{1}{2}\times5\times10\ \mathrm{J}=25\ \mathrm{J}$$

$$A_2=S_1+S_2=25\ \mathrm{J}+(5\times10)\ \mathrm{J}=75\ \mathrm{J}$$

$$A_3=S_1+S_2+S_3=75\ \mathrm{J}+\frac{1}{2}\times(15-10)\times10\ \mathrm{J}=100\ \mathrm{J}$$

2-14. 一链条,总长为 l,放在光滑的桌面上,其中一端下垂,长度为 a,如习题 2-14 图所示。假定开始时链条静止。求链条刚刚离开桌边时的速度。



习题 2-14 图

分析:匀质链条下垂部分所受的重力,随链条整体运动变化。可运用牛顿运动定律求解,也可由动能定理等方法求解。

解 1:用动能定理解题。设某时刻链条下垂部分的长度为 y,质量线密度为 λ。下垂部分受重力 $F_G=\lambda gy$,这是一个变力。

滑落过程中,重力做功

$$A=\int_a^l F_g\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\lambda g(l^2-a^2)$$

由动能定理 $$A=\frac{1}{2}mv^2-0=\frac{1}{2}\lambda lv^2$$

得
$$v=\sqrt{\frac{g}{l}(l^2-a^2)}$$

解 2:用牛顿运动定律解题。下垂部分所受的重力 $F_g=\lambda gy$ 使链条整体运动。

根据牛顿运动定律,有
$$F_g=ma$$

即
$$\lambda gy=\lambda l\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

作变换
$$gy=l\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=l\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=lv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

由积分
$$\int_0^v v\mathrm{d}v=\frac{g}{l}\int_a^l y\mathrm{d}y$$

可得
$$v=\sqrt{\frac{g}{l}(l^2-a^2)}$$

讨论:若考虑桌面与链条之间有摩擦,设摩擦因数为 μ。(1) 下垂长度为多少时,链条恰可下滑?(2) 链条离开桌面时速度多大?

解:(1) 设下垂部分长为 l_0时,链条恰可下滑。此时链条受桌面摩擦力为
$$F_f=\mu\lambda(l-l_0)g$$

恰可下滑时,应有
$$F_g-F_f=\lambda l_0g-\mu\lambda(l-l_0)g\geqslant 0$$

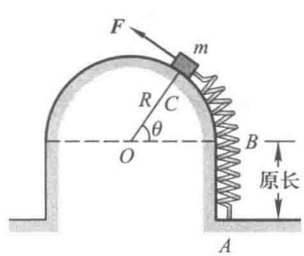
得
$$l_0\geqslant\frac{\mu}{1+\mu}l$$

(2) 链条下滑过程中,合力做功为
$$A=\int(F_g-F_f)\mathrm{d}y=\int_{l_0}^{l}[\lambda yg-\mu\lambda(l-y)g]\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\lambda g[(l^2-l_0^2)-\mu(l-l_0)^2]$$

代入 l_0表式,可得
$$A=\frac{\lambda gl^2}{2(1+\mu)}$$

由动能定理
$$A=\frac{1}{2}mv^2-0=\frac{1}{2}\lambda lv^2$$

解得
$$v=\sqrt{\frac{gl}{1+\mu}}$$



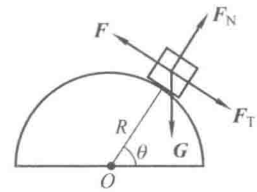
习题 2-15 图

2-15. 一弹簧,劲度系数为 k,一端固定在 A 点,另一端连一质量为 m 的物体,靠在光滑的半径为 R 的圆柱体表面上,弹簧原长为 AB(如习题 2-15 图所示)。在变力 F 作用下,物体极缓慢地

沿表面从位置 B 移到 C,求力 F 所做的功。

分析:"物体极缓慢地运动"表示物体在运动过程的每一时刻都处于力的平衡状态,物体运动的速度和加速度可视为零。

解:对物体的受力分析如解图 2-15 所示,其中弹性力的大小可写为 $F_T=ks=kR\theta$。



解图 2-15

因受力平衡,合力为零,有　$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_N+\boldsymbol{G}+\boldsymbol{F}_T=0$

即　$$\boldsymbol{F}=-(\boldsymbol{F}_N+\boldsymbol{G}+\boldsymbol{F}_T)$$

物体沿圆柱表面从 B 移到 C,变力 $\boldsymbol{F}$ 的功为

$$A=\int_B^C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\int_B^C(\boldsymbol{F}_N+\boldsymbol{G}+\boldsymbol{F}_T)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

其中,因 $\boldsymbol{F}_N\perp \mathrm{d}\boldsymbol{s}$,所以　$\boldsymbol{F}_N\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=0$

重力沿圆弧切向的元功为

$$-\boldsymbol{G}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=mgR\cos\theta \mathrm{d}\theta,$$

弹性力的元功为　$$-\boldsymbol{F}_T\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=kR^2\theta \mathrm{d}\theta$$

所以
$$\begin{aligned}A&=-\int_0^\theta \boldsymbol{G}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}-\int_0^\theta \boldsymbol{F}_T\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}\\&=\int_0^\theta mgR\cos\theta \mathrm{d}\theta+\int_0^\theta kR^2\theta \mathrm{d}\theta=mgR\sin\theta+\frac{1}{2}kR^2\theta^2\end{aligned}$$

令 C、B 间的高度差和弧长分别为 h 和 l,则有 $h=R\sin\theta$,$l=R\theta$,所以

$$A=mgh+\frac{1}{2}kl^2$$

可见,变力 $\boldsymbol{F}$ 的功等于物体、地球、弹簧系统中,重力势能和弹性势能的增量。

2-16. 一质量为 m 的陨石从距地面高 h 处,由静止开始落向地面。设地球半径为 R,引力常量为 G,地球质量为 m_E,忽略空气阻力。求:(1) 陨石下落过程中,万有引力做的功是多少?(2) 陨石落地的速度。

分析:将地球视作匀质球体,陨石所受引力指向地心。陨石从高处落下,万有引力做正功,陨石-地球系统引力势能的减少量,转化为陨石从静止下落到地面时的动能(将地球视为静止)。

解:(1) 陨石所受的万有引力为

$$\boldsymbol{F}=-G\frac{m_E m}{(R+r)^2}\boldsymbol{e}_r$$

式中 $\boldsymbol{e}_r$是由地球中心指向陨石的单位矢量,r 为陨石离地面的高度。

取陨石下落的微小位移为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$,与 $\boldsymbol{e}_r$的方向相反,$\mathrm{d}r'=-\mathrm{d}r$,则万有引力的

功为

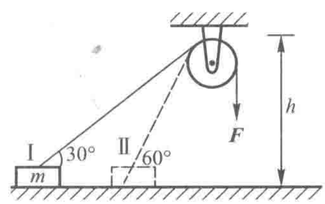
$$A=\int_h^0 \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}'=\int_h^0 F\cdot \mathrm{d}r'=-\int_h^0 Gm_{\mathrm{E}}m\frac{\mathrm{d}r}{(R+r)^2}$$

$$=Gm_{\mathrm{E}}m\left.\frac{1}{R+r}\right|_h^0=\frac{Gm_{\mathrm{E}}mh}{R(R+h)}$$

(2) 根据动能定理，　$A=\Delta E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2-0$

解得陨石落地时的速度大小为　$v=\sqrt{\frac{2Gm_{\mathrm{E}}h}{R(R+h)}}$

2-17. 在水平地面上有一质量 $m=50$ kg 的箱子，其上系有一绳子，绳子跨过距箱子高 $h=2$ m 的定滑轮。在一竖直向下的恒力 $F=256$ N 作用下，将箱子自静止开始从位置 Ⅰ（$\theta_1=30°$）拉到位置 Ⅱ（$\theta_2=45°$），如习题 2-17 图所示。若忽略滑轮与轴承间的摩擦和箱子与地面间的摩擦，试求箱子到达位置 Ⅱ 时的速度。



习题 2-17 图

解：设 Ox 轴正向沿箱子的位移方向，在位移为 $\mathrm{d}x$ 时，$\boldsymbol{F}$ 的元功为

$$\mathrm{d}A=F\cos\theta\mathrm{d}x$$

作 $x\to\theta$ 的变量代换，　$x=h\cot\theta$，　$\mathrm{d}x=-\frac{h}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$

$$\mathrm{d}A=-\frac{Fh\cos\theta}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

积分可得　$A=\int\mathrm{d}A=-\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{Fh\cos\theta}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=Fh\left(\frac{1}{\sin\theta_1}-\frac{1}{\sin\theta_2}\right)$

已知 $v_0=0$，设箱子到达位置 Ⅱ 时的速度为 v，由动能定理，

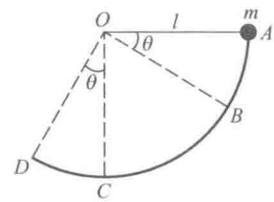
有　$A=\Delta E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2-0$

可得　$v=\sqrt{\frac{2Fh}{m}\left(\frac{1}{\sin\theta_1}-\frac{1}{\sin\theta_2}\right)}$

代入数据，得　$v=3.46$ m/s

2-18. 质量 $m=6\times10^{-3}$ kg 的小球，系于绳的一端，绳的另一端固结在 O 点，绳长为 $l=1$ m（如习题 2-18 图所示）。今将小球拉升至水平位置 A，然后放手，

求当小球经过圆弧上 B、C、D 点时的(1) 速度;(2) 加速度;(3) 绳中的张力。假定空气阻力不计,$\theta=30°$。



习题 2-18 图

分析:小球下摆的轨迹是圆弧,下摆过程中重力做正功,绳子的张力始终垂直于小球的位移,不做功。利用动能定理求解。

解:由题图可知:$\theta_B=30°$;$\theta_C=90°$;$\theta_D=120°$。

(1) 在小球下摆过程中,重力做功为

$$A_G=\int \boldsymbol{G}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int mg\cos\theta \mathrm{d}s=\int_0^\theta mgl\cos\theta \mathrm{d}\theta=mgl\sin\theta$$

由动能定理 $A=\Delta E_k=\dfrac{1}{2}mv^2-0$

得小球在各点速度的大小为 $v=\sqrt{2gl\sin\theta}$

代入各点数值,得

$$v_B=3.13\ \mathrm{m/s},\quad v_C=4.43\ \mathrm{m/s},\quad v_D=4.12\ \mathrm{m/s}$$

(2) 小球在 θ 位置时的 a_t 和 a_n 分别为

$$a_t=g\cos\theta,\quad a_n=\frac{v^2}{l}=2g\sin\theta,$$

$\boldsymbol{a}$ 的大小为 $a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=g\sqrt{1+3\sin^2\theta}$

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}_t$(以顺时针为正向)间的夹角为 $\alpha=\arctan\dfrac{a_n}{a_t}$

计算得到各点加速度的大小和方向如下表所示

	$a_t/(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})$	$a_n/(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})$	$a/(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})$	α
$\theta_B=30°$	8.49	9.8	12.96	49.1°
$\theta_C=90°$	0	19.6	19.6	90°
$\theta_D=120°$	-4.9	16.97	17.7	73.9°

(3) 由动力学方程 $F_T-mg\sin\theta=m\dfrac{v^2}{l}=2mg\sin\theta$

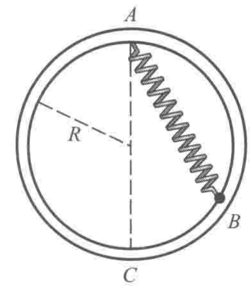
得绳中的张力为 $F_T=3mg\sin\theta$

小球在各点时绳中张力为

$$F_{TB}=8.82\times10^{-2}\ \mathrm{N},\quad F_{TC}=0.176\ \mathrm{N},\quad F_{TD}=0.153\ \mathrm{N}$$

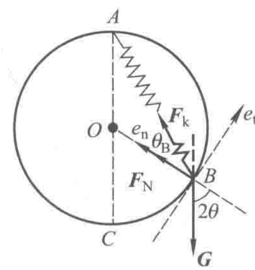
3. 保守力的功、势能、功能原理和机械能守恒定律

2-19. 一根原长 l_0 的弹簧，当下端悬挂质量为 m 的重物时，弹簧长 $l=2l_0$。现将弹簧一端悬挂在竖直放置的圆环上端 A 点，设环的半径 $R=l_0$，把弹簧另一端所挂重物放在光滑圆环的 B 点，如习题 2-19 图所示。已知 AB 长为 $1.6R$。当重物在 B 无初速地沿圆环滑动时，试求：(1) 重物在 B 点的加速度和对圆环的正压力；(2) 重物滑到最低点 C 时的加速度和对圆环的正压力。



习题 2-19 图

解：对重物的受力分析如解图 2-19 所示，其中 F_k 为弹性力，F_N 为圆环对重物的支持力，与重物对圆环的正压力 F'_N 是一对作用力和反作用力。



解图 2-19

由静平衡条件，　$F_k-mg=k\Delta l-mg=0$

式中　$\Delta l=2l_0-l_0=l_0=R$

求得弹簧的劲度系数 $k=\dfrac{mg}{\Delta l}=\dfrac{mg}{R}$　　(1)

在圆环的任意位置，重物的运动方程为

$$F_N+F_k\cos\theta-mg\cos 2\theta=ma_n=m\frac{v^2}{R}\qquad(2)$$

和

$$mg\sin 2\theta-F_k\sin\theta=ma_t\qquad(3)$$

重物对圆环的正压力　$F'_N=-F_N$　　(4)

(1) 重物在 B 点时，有　$v_B=0$

$$F_{kB}=k\Delta l_B=k(1.6R-R)=0.6mg$$

并有　$\cos\theta_B=\dfrac{1.6R}{2R}=0.8,\quad \sin\theta_B=\sqrt{1-\cos^2\theta_B}=0.6$

由式(2)可知，$a_{nB}=0$，重物在 B 点时的加速度沿切向。由式(3)得

$$a_B=a_{tB}=g(\sin 2\theta_B-0.6\sin\theta_B)=g\sin\theta_B(2\cos\theta_B-0.6)=5.88\ \mathrm{m/s^2}$$

由式(2)得　$F_{NB}=mg\cos 2\theta_B-0.6mg\cos\theta_B=-0.20\ mg$

式中负号表示 $\boldsymbol{F}_N$ 的方向与图示相反。

重物对圆环的正压力　$F'_{NB}=-F_{NB}=0.20\ mg$

方向指向环心。

(2) 重物在 C 点时，有

$$\theta_C=0,F_{kC}=k(2R-l_0)=mg$$

由式(3)可知，$a_{tC}=0$，重物在 C 点时的加速度沿法向。

取重物 m、地球和弹簧为系统，选 C 点为重力势能零点，弹簧原长为弹性势能零点。分别以重物在 B、C 两点为系统的始、末状态。根据机械能守恒定律，有

$$0+\frac{1}{2}k\,(1.6R-R)^2+mg(2R-1.6R\cos\,\theta_{B})=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}k\,(2R-R)^2 \qquad (5)$$

由(2)式和(5)式，可得　$v_C=\sqrt{0.8gR}$，　$F_{NC}=0.80mg$

重物在 C 点的加速度为

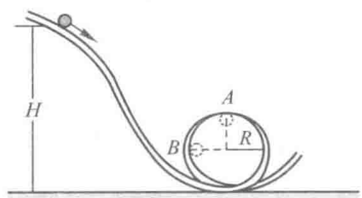
$$a_C=a_{nC}=\frac{v_C^2}{R}=0.8g=7.84\ \mathrm{m/s^2}$$

方向向上指向环心。

重物对圆环的正压力　$F'_{NC}=-F_{NC}=-0.80mg$

方向竖直向下。

2-20. 小球的质量为 m，沿着光滑的弯曲轨道滑下，轨道的形状如习题 2-20 图所示。(1) 要使小球沿圆形轨道运动一周而不脱离轨道，问小球至少应从多高的地方滑下？(2) 小球在圆圈的最高点 A 受到哪几个力的作用。(3) 如果小球由 $H=2R$ 的高处滑下，小球的运动将如何？



习题 2-20 图

解：(1) 要使小球沿圆形轨道运动一周而不脱离轨道，A 点应满足小球恰可作圆周运动条件。设小球在 A 点的速率为 v_A，取地面为重力势能零点，由机械能守恒，有

$$mgH=mg(2R)+\frac{1}{2}mv_A^2$$

并有

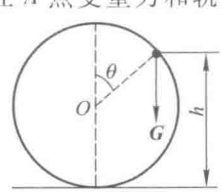
$$mg=m\frac{v_A^2}{R}$$

解得

$$H=\frac{5}{2}R$$

(2) 小球在 A 点的受力，与 H 有关。$H>\frac{5}{2}R$ 时，小球在 A 点受重力和轨道支持力，方向竖直向下；$H=\frac{5}{2}R$ 时，只受重力。

(3) 当 $H<\frac{5}{2}R$ 时，小球不能到达 A 点，将在轨道的某处脱轨，作抛体运动。设 $H=2R$ 时，小球在离地高度为 h



解图 2-20

处脱轨，如解图 2-20 所示。有

$$mgH=mgh+\frac{1}{2}mv_h^2$$

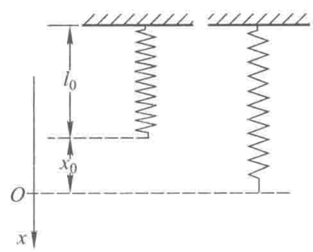
$$mg\cos\theta=m\frac{v_h^2}{R}$$

解得脱轨高度为
$$h=\frac{5}{3}R=1.67R$$

小球在脱轨时的速率为
$$v_h=\sqrt{\frac{2}{3}Rg}=2.56\sqrt{R}$$

2-21. 一弹簧，原长为 l_0，劲度系数为 k，上端固定，下端挂一质量为 m 的物体，先用手托住，使弹簧不伸长。(1) 如将物体托住慢慢放下，达静止(平衡位置)时，弹簧的最大伸长和弹性力是多少？(2) 如将物体突然放手，物体到达最低位置时，弹簧的伸长和弹性力各是多少？物体经过平衡位置时的速度是多少？

解：取物体、弹簧和地球为系统，取坐标如解图 2-21 所示。



解图 2-21

(1) 慢慢放下的物体将静止在受合力为零的平衡位置。设此时弹簧的静伸长量为 x_0，因受力平衡，有
$$-kx_0+mg=0$$

得
$$x_0=\frac{mg}{k}$$

弹性力大小为
$$F=kx_0=mg$$

(2) 突然放手后，设物体最低可到达 x 处。选重力势能零点在平衡位置 O 处，弹性势能零点在弹簧原长处。以“放手”位置和 x 处为系统的始态和末态，在此过程中，系统的机械能守恒。有

$$mgx_0=-mgx+\frac{1}{2}k(x_0+x)^2$$

解得
$$x=x_0$$

弹簧的伸长量为
$$x_0+x=2x_0=\frac{2mg}{k}$$

弹性力大小为
$$F=k(x_0+x)=2mg$$

设物体经过平衡位置时的速度为 v，因机械能守恒，有

$$mgx_0=\frac{1}{2}kx_0^2+\frac{1}{2}mv^2$$

解得物体在平衡位置时的速度为

$$v=g\sqrt{\frac{m}{k}}=\sqrt{gx_0}$$

2-22. 一质点沿 x 轴运动，势能为 $E_p(x)$，总能量为 E 恒定不变，开始时位于原点，试证明当质点到达坐标 x 处所经历的时间为：

$$t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-E_p(x)]}}$$

证：机械运动总能量 $E=E_p(x)+E_k(x)$

即有 $$E_k(x)=\frac{1}{2}mv^2=E-E_p(x)$$

在上式中解出 v，并利用 v 的定义，有

$$v=\sqrt{\frac{2[E-E_p(x)]}{m}}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

对上式分离变量后积分，注意到 $t=0$ 时 $x=0$，解得质点到达坐标 x 处所经历的时间 t 为

$$t=\int_0^t\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-E_p(x)]}}$$

得证。

2-23. 一双原子分子的势能函数为

$$E_p(r)=E_0\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}-2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6\right]$$

式中 r 为二原子间的距离，试证明：(1) r_0为分子势能极小时的原子间距；(2) 分子势能的极小值为$-E_0$；(3) 当 $E_p(r)=0$ 时，原子间距为$\frac{r_0}{\sqrt[6]{2}}$；(4) 画出势能曲线简图。

分析：势能函数的最小值对应系统的稳定平衡位置。通过对势能函数求极值的方法求解。

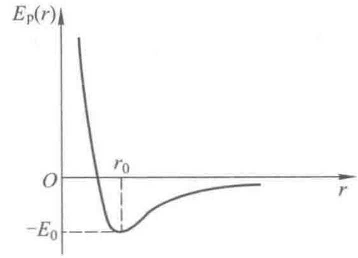
解：(1) 令： $$\frac{\mathrm{d}E_p(r)}{\mathrm{d}r}=0$$

可得 $$r=r_0$$

并且，有
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2E_{\mathrm{p}}(r)}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=r_0}>0$$
所以 r_0 为分子势能极小时的原子间距。

(2) 将 $r=r_0$ 代入势能函数，得分子势能极小值为
$$E_{\mathrm{p}}(r)\big|_{r=r_0}=-E_0$$
(3) 解方程　$E_{\mathrm{p}}(r)=0$

可解得
$$r=\frac{r_0}{\sqrt[6]{2}}$$
(4) 取下列数据，可确定势能曲线的变化趋势。势能曲线简图如解图 2-23 所示。



解图 2-23

r/m	$r\to0$	$r=r_0/\sqrt[6]{2}$	$r=r_0$	$r\to+\infty$
$E_{\mathrm{p}}(r)$/J	$E_{\mathrm{p}}(r)\to+\infty$	$E_{\mathrm{p}}(r)=0$	$E_{\mathrm{p}}(r)=-E_0$	$E_{\mathrm{p}}(r)\to0$

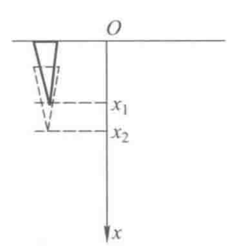
4. 运动守恒定律的综合应用

2-24. 以铁锤将一铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉进入木板内的深度成正比。在铁锤击第一次时，能将小钉击入木板内 1 cm，求击第二次时能击入多深。假定铁锤二次打击铁钉时的速度相同。

分析：铁钉所获动能，转化为克服阻力进入木板内一定深度的功。

解：设木板对铁钉的阻力为 $F=-kx$，第一次打击后铁钉进入的深度为 x_1，第二次的深度达 x_2，如解图 2-24 所示。阻力的功分别为
$$A_1=\int_0^{x_1}F\mathrm{d}x=\int_0^{x_1}-kx\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}kx_1^2$$
和
$$A_2=\int_{x_1}^{x_2}-kx\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}k(x_2^2-x_1^2)$$
设铁钉在二次被击后获得的动能分别为 E_{k1} 和 E_{k2}，因进入木板后分别静止于 x_1 和 x_2 处，由动能定理可得，
$$A_1=\Delta E_{\mathrm{k1}}=0-E_{\mathrm{k1}}$$
和
$$A_2=\Delta E_{\mathrm{k2}}=0-E_{\mathrm{k2}}$$
因 $\Delta E_{\mathrm{k1}}=\Delta E_{\mathrm{k2}}$，可得　$x_1^2=x_2^2-x_1^2$

解得
$$x_2=\sqrt{2}x_1$$



解图 2-24

代入 $x_1=1\ \text{cm}$,得第二次击入深度

$$x_2-x_1=\sqrt{2}x_1-x_1=0.414\ \text{cm}$$

2-25. 在一光滑的水平面上,把质量分别为 m'和 m 的两个质点分别放在自由长度为 l_0的弹簧的两端,压紧弹簧使两质点靠近,在弹簧的长度为 $l(l<l_0)$时,突然松手。求:质点 m 对质点 m'的相对速度(设弹簧劲度系数为 k)。

分析:取轻弹簧、m 和 m'为系统。在松手后的运动过程中,水平方向系统不受外力,故动量守恒;因弹性力是保守内力,故系统机械能也守恒。

解:突然松手后,m 和 m'的运动方向相反,设它们相对水平面(惯性系)的速度大小分别为 v 和 v'。因动量守恒,有

$$0=mv-m'v'$$

得

$$v=\frac{m'}{m}v'$$

因机械能守恒,有

$$\frac{1}{2}k(l_0-l)^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}m'v'^2$$

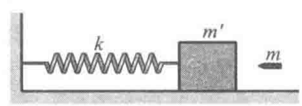
解以上两式,得

$$v'=(l_0-l)\sqrt{\frac{km}{m'(m+m')}}$$

质点 m'对质点 m 的相对速度为

$$v_{m'-m}=v'+v=(l_0-l)\sqrt{\frac{k(m+m')}{mm'}}$$

2-26. 如习题 2-26 图所示,为一种测定子弹速度的方法。子弹水平地射入一端固定在弹簧上的木块内,由弹簧压缩的距离求出子弹的速度。已知子弹质量是 0.02 kg,木块质量是 8.98 kg。弹簧的劲度系数是 100 N/m,子弹射入木块后,弹簧被压缩 10 cm。设木块与平面间的动摩擦因数为 0.2,求子弹的速度。



习题 2-26 图

分析:子弹的运动分两个阶段:子弹射入木块并与木块共同运动,为完全非弹性碰撞过程,子弹与木块系统的动量守恒;子弹、木块共同压缩弹簧,对子弹、木块和弹簧系统,摩擦力是外力,可用功能原理解得子弹的速度。

解:设 m_0、m 分别为子弹和木块的质量,子弹射入木块前的速度为 v_0,与木块共同运动的速度为 v。碰撞过程中,子弹、木块系统的动量守恒。

$$m_0v_0=(m_0+m)v \tag{1}$$

在弹簧被压缩 x 的过程中，摩擦力做功为

$$A_{外}=-\mu(m_0+m)gx \tag{2}$$

对子弹、木块和弹簧系统，运用功能原理

$$A_{外}=\Delta E_k+\Delta E_p$$

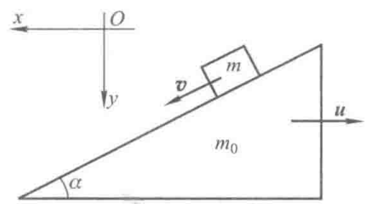
即
$$-\mu(m_0+m)gx=\left[0-\frac{1}{2}(m_0+m)v^2\right]+\left[\frac{1}{2}kx^2-0\right] \tag{3}$$

代入数据，解得
$$v_0=\frac{m+m_0}{m_0}\sqrt{\frac{kx^2}{m+m_0}+2\mu gx}=319.2\ \mathrm{m/s}$$

2-27. 一质量为 m 的铁块静止在质量为 m_0 的劈尖上，劈尖本身又静止在水平桌面上。劈尖与桌面的夹角为 α，设所有接触都是光滑的。当铁块位于高出桌面 h 处时，这个铁块-劈尖系统由静止开始运动。当铁块落到桌面上时，劈尖的速度有多大？

分析：对铁块、劈尖和地球系统，不受外力、无非保守内力，因而机械能守恒。对铁块和劈尖系统，水平方向不受外力，系统质心的水平位置不变，满足水平方向的动量守恒条件。

解：取坐标系 Oxy 于桌面（惯性系），如解图 2-27 所示。



解图 2-27

设劈尖对桌面的速度为 $\boldsymbol{u}$，朝 x 轴负向运动，铁块对桌面的速度为 $\boldsymbol{v}$，相对劈尖的速度为 $\boldsymbol{v}'$，$\boldsymbol{v}$ 的水平分量沿 x 轴正向，有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$$

$$v_x=v_x'-u=v'\cos\alpha-u$$

$$v_y=v_y'=v'\sin\alpha$$

铁块和劈尖系统在水平方向的动量守恒，有

$$-m_0u+m(v'\cos\alpha-u)=0$$

对铁块、劈尖和地球系统，机械能守恒。选桌面为重力势能零点。

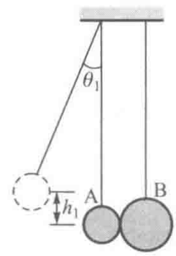
有
$$mgh=\frac{1}{2}m_0u^2+\frac{1}{2}mv^2$$

式中
$$v^2=v_x^2+v_y^2=(v'\cos\alpha-u)^2+v'^2\sin^2\alpha$$

解上述方程，得
$$u=m\cos\alpha\sqrt{\frac{2gh}{(m_0+m)(m_0+m\sin^2\alpha)}}$$

2-28. 如习题 2-28 图所示，两个摆球并列悬挂，其中摆球 A 质量为 $m_1=0.4\ \mathrm{kg}$，

摆球 B 质量为 $m_2=0.5\ \text{kg}$。摆线竖直时，A 和 B 刚好相接触。现将 A 拉过 $\theta_1=40°$后释放，当它和 B 碰撞后恰好静止。求：(1) 当 B 再次与 A 相碰后，A 能摆升的最高位置 θ_2；(2) 碰撞的恢复系数。



习题 2-28 图

分析：A、B 两球在同一水平线上作对心碰撞，水平方向不受其他外力，故碰撞前后两球的动量守恒。利用碰撞前后两球的速度关系，可解得恢复系数，并可判断两球的碰撞有动能损失，$e<1$。除碰撞外，在两球的运动过程中，摆线的拉力始终不做功，各球和地球系统的机械能守恒。

解：取向右为两球运动的正方向，相碰处为重力势能零点。设摆线长为 l，有

$$h_1=l(1-\cos\theta_1) \tag{1}$$

设 A 球碰前速度为 v_{A0}，由机械能守恒可得

$$m_1gh_1=\frac{1}{2}m_1v_{A0}^2 \tag{2}$$

碰撞前，B 球静止 $v_{B0}=0$。碰撞后，A 球静止 $v_A=0$。设 B 球的碰后速度为 v_B。由动量守恒可知

$$m_1v_{A0}-0=m_2v_B-0 \tag{3}$$

由(3)式，可得
$$v_B=\frac{m_1}{m_2}v_{A0}=\frac{4}{5}v_{A0}$$

据恢复系数定义，可得
$$e=\frac{v_B-v_A}{v_{A0}-v_{B0}}=\frac{v_B}{v_{A0}}=\frac{m_1}{m_2} \tag{4}$$

两球碰撞后，B 球以速度 v_B 被向右弹出。由机械能守恒可知，B 球再次碰撞 A 球前的速度为 $-v_B$。设再次碰撞后 B 球的速度为 v_B'，A 球的速度为 v_A'，并设它们的方向均向左，由动量守恒

$$m_2(-v_B)+0=m_2(-v_B')+m_1(-v_A') \tag{5}$$

据恢复系数定义，应有
$$e=\frac{v_A'-v_B'}{v_B} \tag{6}$$

解(4)式、(5)式、(6)式，得　$v_A'=v_B$，　$v_B'=0.2v_B$

再次碰撞后，A 球上升到最高点过程中的机械能守恒，有

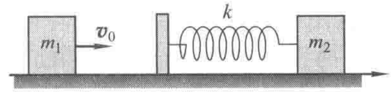
$$m_1gl(1-\cos\theta_2)=\frac{1}{2}m_1v_A'^2 \tag{7}$$

解(1)式、(2)式和(7)式，代入数据后，得

$$\cos\theta_2=1-\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2(1-\cos\theta_1)=0.85,\quad \theta_2=31.8°$$

恢复系数
$$e=\frac{m_1}{m_2}=0.8$$

2-29. 如习题 2-29 图所示，轻弹簧的一端与质量为 m_2 的物体连接，另一端与一质量可忽略的挡板相连，它们静止在光滑的桌面上。弹簧的劲度系数为 k。今有一质量为 m_1，速度为 v_0 的物体向弹簧运动并与挡板发生正面碰撞。求弹簧被压缩的最大距离。



习题 2-29 图

分析：把 m_2 和轻弹簧及无质量的挡板视为一弹性物体，它与 m_1 之间的碰撞是完全非弹性的，弹簧被压缩最大距离时，m_1 和 m_2 具有相同的运动速度。因弹性力是 m_1 和 m_2 系统的保守内力，整个过程的机械能守恒。

解：设弹簧被压缩最大值为 x 时，m_1 和 m_2 以相同速度 v 运动。因动量守恒，有

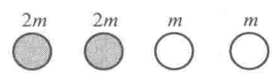
$$m_1v_0=(m_1+m_2)v$$

因机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}m_1v_0^2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2+\frac{1}{2}kx^2$$

解得
$$x=v_0\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}}$$

2-30. 大小相同，质量分别为 m 和 $2\,m$ 的四个球(如习题 2-30 图所示)静止在光滑水平面上。使左边的第一个质量为 $2\,m$ 的球以速度 v 与第二个球作对心的完全弹性碰撞，求各球的最终速度。



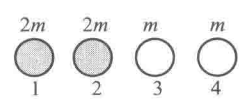
习题 2-30 图

分析：在光滑水平面内，四个球相互间的完全弹性碰撞过程，满足动量守恒和动能守恒条件。四球间相互反复碰撞后的最终状态是：总动量等于左边第一球的初动量；总动能为左边第一球的初动能。

解：为方便解题，对四球标号如解图 2-30 所示。设质量为 m_1，速度为 v_1 的球与质量为 m_2，速度为 v_2 的球作对心弹性碰撞，碰后的速度分别为 v_1' 和 v_2'。因动量和动能守恒，有

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'$$

和
$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2$$



解图 2-30

可得
$$v_1'=\frac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2} \tag{1}$$
$$v_2'=\frac{(m_1-m_2)v_2+2m_1v_1}{m_1+m_2} \tag{2}$$

运用(1)式和(2)式于四球间的各次碰撞:

1 号球和 2 号球的质量相同,且 $v_2=0$,有 $v_1'=0, v_2'=v_1=v$。即 1 号和 2 号球首次相碰后交换动量,1 号球静止,2 号球以 v 向右与 3 号球相碰。

2 号球的质量是 3 号球的 2 倍,碰前 3 号球静止。碰撞后 2 号球的速度由(1)式求得,为 $v/3$,向右,3 号球的速度由(2)式求得,为 $4v/3$,向右,并与 4 号球相碰。

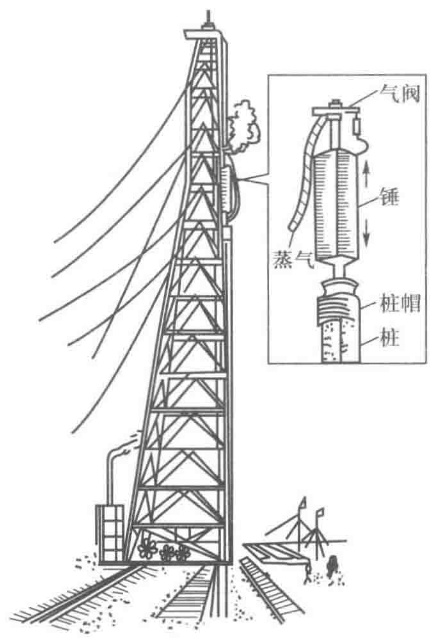
3 号球和 4 号球的质量相同,碰前 3 号球静止。碰撞后它们交换动量,即 3 号球静止,4 号球以 $4v/3$ 的速度向右作匀速直线运动。

2 号球与 3 号球相碰后的速度为 $v/3$,方向向右,将与静止的 3 号球再次相碰。由(1)式和(2)式得到碰撞后 2 号球的速度为 $v/9$,继续向右运动,3 号球的速度为 $4v/9$,向右运动。

由于 $v/9<4v/9<4v/3$,因此 2 号球追不上 3 号球,3 号球也不可能再与 4 号球相碰撞。2 号球、3 号球和 4 号球将以各自的速度向右作匀速直线运动。

所以,各球的最终速度是:1 号球静止;2 号球为 $v/9$;3 号球为 $4v/9$;4 号球为 $4v/3$。三个运动着的球的动量和动能都来自 1 号球。

2-31. 如习题 2-31 图所示是大型蒸气打桩机示意图。铁塔高 40 m,锤的质量 10 t。现将长达 38.5 m 的钢筋混凝土桩打入地层。已知桩的质量为 24 t,其横截面为 0.25 m^2的正方形,桩的侧面单位面积所受的泥土阻力为 $k=2.65\times10^4\ N/m^2$。(1) 桩依靠自重能下沉多深?(2) 桩稳定后把锤提高 1 m,然后让锤自由下落而击桩。假定锤与桩发生完全非弹性碰撞,一锤能打下多深?(3) 当桩已下沉 35 m 时,一锤又能打下多



习题 2-31 图

深？假定此时锤与桩的碰撞不是完全非弹性碰撞，而是锤在击桩后要反跳 5 cm。

分析：在桩依靠自重缓慢下沉的过程中，重力克服泥土的阻力做功。泥土的阻力随桩的下沉深度而变化。在锤与桩的碰撞过程中，冲击力远大于桩所受的重力和泥土的阻力，锤和桩系统的动量守恒。

解：取坐标轴 Ox，向下为正，原点位于地面。设桩的 4 个侧面为矩形，进入地下 x 深度时，侧面积为 $S=4x\sqrt{S_0}$，S_0 为桩的横截面积。桩所受阻力的大小为 $F=kS=4kx\sqrt{S_0}$（不计桩顶部截面所受阻力）。

（1）桩依靠自重下沉 x_1 深度时，阻力的功在数值上与重力的功相等。设桩的质量为 m_0，有

$$A_{重}=m_0gx_1 \tag{1}$$

桩下沉 x_1 深度时阻力做的功大小为

$$A_{阻}=\left|-\int_0^{x_1}F\mathrm{d}x\right|=\int_0^{x_1}4kx\sqrt{S_0}\,\mathrm{d}x=2k\sqrt{S_0}\,x_1^2 \tag{2}$$

（1）式和（2）式相等，得　$x_1=\dfrac{m_0g}{2k\sqrt{S_0}}=8.88\ \mathrm{m}$

（2）设锤的质量为 m，打击速度为 v_{10}，将锤提高高度为 h。对锤和地球系统，机械能守恒，有

$$mgh=\frac{1}{2}mv_{10}^2 \tag{3}$$

设桩和锤作完全非弹性碰撞后的共同运动速度为 v，由动量守恒定律，得

$$mv_{10}=(m+m_0)v \tag{4}$$

设桩运动至 x_2 处静止，对锤和桩运用动能定理，有

$$A_{重}+A_{阻}=\Delta E_{\mathrm{k}}=0-E_{\mathrm{k}} \tag{5}$$

其中，

$$A_{阻}=-\int_{x_1}^{x_2}F\mathrm{d}x=-2k\sqrt{S_0}\,(x_2^2-x_1^2)$$

$$A_{重}=(m+m_0)g(x_2-x_1)$$

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}(m+m_0)v^2$$

解（3）式，（4）式，（5）式，可得　$x_2=9.07\ \mathrm{m}$

一锤能打下的深度为　$\Delta x=x_2-x_1=0.19\ \mathrm{m}$

（3）当桩已下沉 35 m 时，若能将锤提至最大高度的塔顶（40 m）处，则锤距桩顶的高度 h_3 为

$$h_3=40\ \mathrm{m}-(38.5-35)\ \mathrm{m}=36.5\ \mathrm{m}$$

设锤自由下落 h_3 距离，击桩时锤的速度为 v'_{10}，有

$$mgh_3=\frac{1}{2}mv'^2_{10} \tag{6}$$

设击桩后，桩的速度为 v_2，锤的反跳速度大小为 v_1，因动量守恒，有

$$mv'_{10}=-mv_1+m_0v_2 \tag{7}$$

已知锤反跳高度 $h_2=5$ cm，其反跳速度 v_1 可由机械能守恒定律得到

$$mgh_2=\frac{1}{2}mv_1^2 \tag{8}$$

桩由 $x_2=35$ m 运动到 x_3 深处，对桩运用动能定理，有

$$m_0g(x_3-x_2)-2k\sqrt{S_0}(x_3^2-x_2^2)=0-\frac{1}{2}m_0v_2^2 \tag{9}$$

解(6)式，(7)式，(8)式，(9)式，得

$$x_3=35.98\ \text{m}$$

则从最高处，一锤能打下的深度为

$$\Delta x=x_3-x_2=0.98\ \text{m}$$

若锤的提起高度仍为 $h'_3=1$ m，则可得

$$x'_3=35.04\ \text{m},\quad \Delta x'=x'_3-x_2=0.04\ \text{m}$$

2-32. 质量为 7.2×10^{-23} kg、速度为 6.0×10^7 m/s 的粒子 A，与另一个质量为其一半而静止的粒子 B 相碰，假定此碰撞是完全弹性碰憧，碰撞后粒子 A 的速率为 5×10^7 m/s，求：(1) 粒子 B 的速率及偏转角；(2) 粒子 A 的偏转角。

分析：碰撞与打击、爆炸、分裂等过程具有作用力强、变化大而相互作用时间极短的特点。在碰撞中，物体受的外力，如重力、阻力等通常都远小于相互作用内力而可忽略，所以相碰系统的总动量守恒。对完全弹性碰撞过程，动能也守恒。注意对动量守恒规律矢量性的处理。

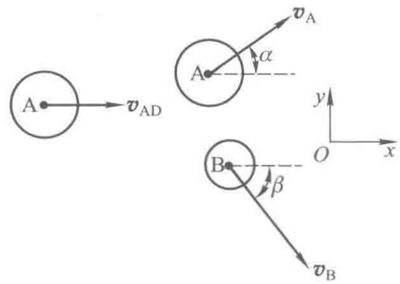
解：取 A，B 两粒子为系统。取坐标系 Oxy 如解图 2-32 所示。设 A 的质量为 m_A，碰前速度为 $\boldsymbol{v}_{A0}$，沿 x 轴正方向，碰后速度为 $\boldsymbol{v}_A$，与 x 轴正方向的夹角为 α。B 的质量为 m_B，碰后速度为 $\boldsymbol{v}_B$，与 x 轴正方向夹角为 β。

由动量守恒，有

x 方向：
$$m_Av_{A0}=m_Bv_B\cos\beta+m_Av_A\cos\alpha \tag{1}$$

y 方向：
$$0=m_Av_A\sin\alpha-m_Bv_B\sin\beta \tag{2}$$

由动能守恒
$$\frac{1}{2}m_Av_{A0}^2=\frac{1}{2}m_Bv_B^2+\frac{1}{2}m_Av_A^2 \tag{3}$$



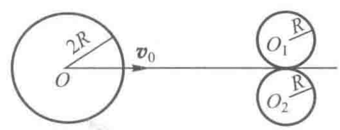
解图 2-32

由(3)式，得
$$v_B^2=\frac{m_A(v_{A0}^2-v_A^2)}{m_B}$$

并可解得
$$\cos\alpha=\frac{(m_A+m_B)v_A^2+(m_A-m_B)v_{A0}^2}{2m_Av_{A0}v_A},\quad \sin\beta=\frac{m_Av_A}{m_Bv_B}\sin\alpha$$

代入数据，得
$$v_B=4.69\times10^7\ \mathrm{m/s}$$
$$\cos\alpha=0.925,\quad \sin\beta=0.809\ 4$$
$$\alpha=22^\circ20',\quad \beta=54^\circ4'$$

2-33. 两个半径均为 R 的光滑小球相互接触，放在光滑的水平面上。另一半径为 $2R$ 的光滑大球以速度 v_0 在该平面上与两小球弹性碰撞，如图习题 2-33 所示。如三个球是用同样材料做成，求碰撞后各球的速度。



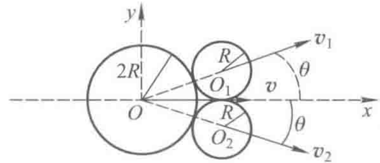
习题 2-33 图

解：设大球质量为 m_0，小球质量为 $m_1=m_2=m$。取坐标系 Oxy，碰撞瞬间三球状态相对 x 轴的对称性如解图 2-33 所示。设碰撞后大球的速度为 $\boldsymbol{v}$，两小球的速度分别为 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$.

因动量守恒，有
$$m_0v_0=m_0v+m_1v_1\cos\theta+m_2v_2\cos\theta$$
和
$$0=m_1v_1\sin\theta-m_2v_2\sin\theta$$

因动能守恒，有
$$\frac{1}{2}m_0v_0^2=\frac{1}{2}m_0v^2+\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

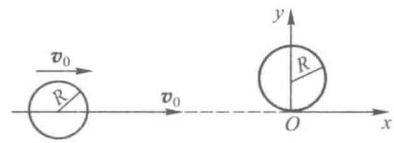
由球体体积可知 $m_0=8m$，由几何关系可得
$$\sin\theta=\frac{R}{3R}=\frac{1}{3}$$



解图 2-33

解以上方程，得
$$v=\frac{m_0-2m\cos^2\theta}{m_0+2m\cos^2\theta}v_0=\frac{3+\sin^2\theta}{5-\sin^2\theta}v_0=0.64v_0$$
$$v_1=v_2=\frac{2m_0\cos\theta}{m_0+2m\cos^2\theta}v_0=\frac{12\sqrt{2}}{11}v_0=1.54v_0$$
$$\theta=\arcsin\frac{1}{3}=19.47^\circ$$

2-34. 两个质量均为 m、半径均为 R 的光滑棋子。一个静止在光滑水平面上，其中心位置坐标为 $(0,R)$，如习题 2-34 图所示。另一棋子在水平面上沿 x 轴以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 运动，该两棋子的碰撞是完全弹性碰撞。求碰撞后两棋子的速度。



习题 2-34 图

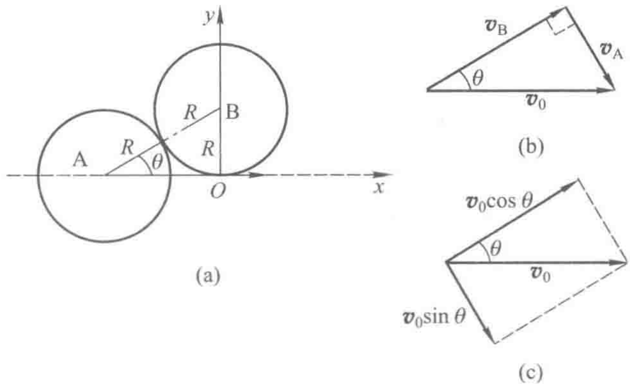
分析：两棋子的碰撞满足动量守恒和动能守恒条件。当它们的质量相等且其中之一原来静止，则斜碰后两者的运动方向一定相互垂直。

解：记初始运动的棋子为 A，静止的为 B。设碰撞后 A 的速度为 $\boldsymbol{v}_A$，B 的速度为 $\boldsymbol{v}_B$。因动量守恒，有
$$m\boldsymbol{v}_0=m\boldsymbol{v}_A+m\boldsymbol{v}_B$$
即
$$\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_B$$
将上式等号两边都平方，有
$$v_0^2=v_A^2+2\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{v}_B+v_B^2 \tag{1}$$
因动能守恒，有
$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}mv_B^2$$
即
$$v_0^2=v_A^2+v_B^2 \tag{2}$$
比较(1)式和(2)式可知
$$\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{v}_B=v_Av_B\cos\varphi=0$$
式中 φ 为 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$ 间的夹角，$\varphi=90^\circ$，即碰撞后 $\boldsymbol{v}_A\perp\boldsymbol{v}_B$，与 $\boldsymbol{v}_0$ 构成直角三角形，如解图 2-34(b)所示。

由解图 2-34(a)所示的几何关系可知 $\theta=30^\circ$。

将 $\boldsymbol{v}_0$ 按 θ 分解成两个互相垂直的分量 $\boldsymbol{v}\cos\theta$ 和 $\boldsymbol{v}\sin\theta$，如解图 2-34(c)所示。

根据动量守恒定律，在两棋子中心连线方向上，A 棋子以 $v_0\cos\theta$ 的速度与静止的 B 作对心的弹性碰撞后，将交换动量，有
$$v_B=v_0\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}v_0$$



解图 2-34

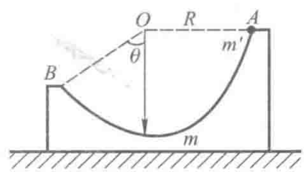
$\boldsymbol{v}_B$ 与 x 轴正向的夹角 $\theta=30°$。

在垂直于两棋子中心连线的方向上,A 棋子未与 B 发生碰撞,其动量保持不变,即以 $v_0\sin\theta$ 的速度运动。所以

$$v_A=v_0\sin\theta=\frac{1}{2}v_0$$

$\boldsymbol{v}_A$ 与 x 轴正向的夹角 $\alpha=-60°$。

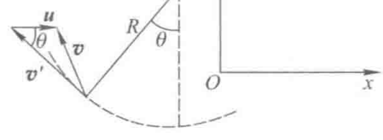
2-35. 一个质量 $m=4$ kg 表面光滑的凹槽,静止放在光滑的水平地面上,槽的凹面呈圆弧形,其半径 $R=0.2$ m 如习题 3-35 图所示。槽的 A 端与圆弧中心 O 点在同一平面上,B 端与 O 点的连线与竖直方向间的夹角 $\theta=60°$。今有一质量 $m'=1$ kg 的小滑块自 A 端从静止开始沿槽面滑下。求小滑块在 B 端滑出时,凹槽相对地面的速度。



习题 2-35 图

分析:取凹槽、滑块和地球为系统时,因系统内既无非保守内力,又不受外力,故系统的机械能守恒。对凹槽和滑块,在水平方向不受外力,故两者在水平方向的动量守恒。求解时须注意在运动中的相对关系。

解:选地面参考系和坐标系 Oxy,以槽的 A 端为重力势能零点。设滑块在任意 θ 位置时对地的速度为 $\boldsymbol{v}$,凹槽对地的速度为 $\boldsymbol{u}$。由机械能守恒,有



解图 2-35

$$0=\frac{1}{2}m'v^2+\frac{1}{2}mu^2-m'gR\cos\theta \tag{1}$$

由水平方向动量守恒,有　$0=mu+m'v_x$　(2)

式中 v_x是滑块对地速度的水平分量。

由相对运动,$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$,滑块相对凹槽的速度 $\boldsymbol{v}'$,沿圆弧在 θ 位置的切线方向,如解图 2-35 所示。

$\boldsymbol{v}$ 的两个分量分别为 $v_x=-v'\cos\theta+u$,　$v_y=v'\sin\theta$　(3)

$\boldsymbol{v}$ 的大小为

$$\begin{aligned} v^2&=v_x^2+v_y^2=(u-v'\cos\theta)^2+(v'\sin\theta)^2\\ &=v'^2+u^2-2uv'\cos\theta \end{aligned} \tag{4}$$

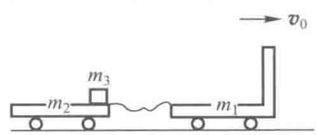
式(4)是余弦定理表式,$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{v}'$和 $\boldsymbol{u}$ 三者关系如解图 2-35 所示。

解方程组(1)式、(2)式、(3)式和(4)式可得

$$u=\sqrt{2Rg}\,m'\cos\theta\sqrt{\frac{m'\cos\theta}{(m'+m)[(m'+m)-m'^2\cos^2\theta]}}$$

代入数据,得　$u=0.144\ \mathrm{m/s}$

*2-36. 如习题 2-36 图所示,光滑水平路面上有一质量 $m_1=5$ kg 的无动力小车以匀速度$v_0=2$ m/s 向前行驶,小车由不可伸长的轻绳与另一质量 $m_2=25$ kg 的拖车相连。拖车前端放有一质量 $m_3=20$ kg 的物体,物体与拖车间的摩擦因数 $\mu=0.2$。开始时,绳未拉紧,拖车静止。试求:(1) 当小车、拖车和物体以共同速度运动时,物体相对拖车的位移;(2) 从绳子拉紧到三者达到共同速度所需的时间。



习题 2-36 图

分析:小车、拖车和物体的运动状态变化可分为两个过程:① 在绳子被小车绷紧的极短时间内,小车和拖车间的相互作用力远大于物体与拖车间的摩擦力,小车和拖车获得了同一速度,而物体可认为尚处于“将动却未动”,即静止的状态;② 物体受拖车的滑动摩擦力作用向前运动,并相对拖车形成位移。与此同时,摩擦力的功使物体获得了动能也消耗了小车和拖车的动能,最后使三者具有了共同速度。

若取小车、拖车和物体为系统,拉力和摩擦力是内力,系统在水平方向不受外力,因此系统的动量在全过程都守恒。摩擦内力的功,改变系统的动能,可由动能定理求得相对位移。对物体运用动量原理可解得达到共同速度所需时间。

若取小车和拖车为系统,在求得系统的共同速度后,也可用动能定理求解

位移，但需注意成对摩擦力的作用对象，而且，摩擦力的功对应的位移是对地的。

解：(1) 取小车、拖车和物体为系统。系统在过程①的初动量是小车的动量，末动量是绳被拉紧、小车和拖车获速度 v_1 的动量，物体尚未运动。

由动量守恒，有 $$m_1v_0=(m_1+m_2)v_1 \tag{1}$$

在过程②，系统的初动量是小车和拖车以 v_1 运动的动量，末动量是系统以共同速度 v 运动的动量。系统的动量仍然守恒，有

$$(m_1+m_2)v_1=(m_1+m_2+m_3)v \tag{2}$$

摩擦力（非保守内力）的功，使系统的动能减少（速度由 v_1 变为 v）。设物体相对拖车的位移为 s，由动能定理，得

$$-\mu m_3gs=\frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)v^2-\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_1^2 \tag{3}$$

解(1)式、(2)式和(3)式，得

$$s=\frac{m_1^2}{2\mu g(m_1+m_2+m_3)(m_1+m_2)}v_0^2$$

代入数据，得物体相对拖车的位移为

$$s=0.017\ \mathrm{m}$$

(2) 设物体受摩擦力作用时间为 t，其速度由零变为 v。由动量原理，有

$$ft=\mu m_3gt=m_3v-0$$

得 $$t=\frac{v}{\mu g}=\frac{m_1}{\mu g(m_1+m_2+m_3)}v_0$$

代入数据，得 $$t=0.1\ \mathrm{s}$$

关于相对位移 s 的另解：

取已获得共同速度 v_1 后的小车和拖车为系统。在系统的运动速度从 v_1 减小到 v 的过程中，系统克服外界（物体）施与的摩擦力做功，动能减少。设系统对地的位移为 s_1，有

$$-\mu m_3gs_1=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2-\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_1^2$$

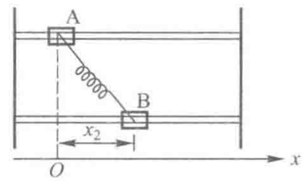
同时，物体受摩擦力作用而获得了动能（速度从零增大到 v），在此过程中物体对地的位移为 s_2，有

$$\mu m_3gs_2=\frac{1}{2}m_3v^2-0$$

物体相对拖车的位移为 $$s=s_1-s_2$$

所得结果相同。

*2-37. 质量分别为 m_1 和 m_2 的两个滑块 A 和 B，分别穿于两条平行且水平的光滑导杆上，两杆间的距离为 L，再以一劲度系数为 k、原长为 L 的轻质弹簧连接两滑块，如习题 2-37 图所示。设开始时滑块 A 位于 $x_1=0$ 处，滑块 B 位于 $x_2=l$ 处，且其速度均为零。试求释放后两滑块的最大速度分别是多少？



习题 2-37 图

分析：以两滑块和弹簧为系统。两滑块在滑杆上所受弹性力是保守内力；受杆的支持力和重力均垂直于滑杆，是外力但它们的合力为零，因而系统的动量守恒，机械能也守恒。系统的初始动量为零，意味着释放后两滑块将反向运动；系统的总机械能由初始值决定，当两滑块的动能最大时，弹性势能为零，处于弹簧原长即垂直于滑杆的位置。

解：设两滑块的最大速度分别为 v_1 和 v_2。

因动量守恒，有
$$0=m_1v_1+m_2v_2$$

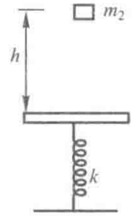
因机械能守恒，有
$$0+\frac{1}{2}k\left(\sqrt{l^2+L^2}-L\right)^2=\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2\right)+0$$

解上述方程，得速度的最大值分别为
$$v_1=\left(\sqrt{l^2+L^2}-L\right)\sqrt{\frac{m_2k}{m_1(m_1+m_2)}}$$
$$v_2=\left(\sqrt{l^2+L^2}-L\right)\sqrt{\frac{m_1k}{m_2(m_1+m_2)}}$$

2-38. 一劲度系数为 k 的轻弹簧，一端竖直固定在桌面上，另一端与一质量为 m_1 的平板相连，如习题 2-38 图所示。现有一质量为 m_2 的物体在距平板 h 处由静止开始自由下落。(1) 当物体与平板发生完全弹性碰撞时；(2) 当物体与平板发生完全非弹性碰撞时；问弹簧被再压缩的长度是多少？

分析：物体与平板发生碰撞的相互作用力远大于所受重力，因而过程的动量守恒。并且，在完全弹性碰撞中的总动能也守恒，而非弹性碰撞的总动能不守恒。

碰撞后平板再压缩弹簧的过程，满足机械能守恒条件，但需注意重力势能和弹性势能零点的选取。



习题 2-38 图

解：选静止于轻弹簧上平板的位置为重力势能零点，弹性势能零点在弹簧原长处。设平板静止时弹簧已被压缩 x_0，有

$$kx_0-m_1g=0 \tag{1}$$

物体自由下落 h 距离的速度大小为

$$v=\sqrt{2gh} \tag{2}$$

(1) 物体与平板发生完全弹性碰撞。设碰撞后物体的速度为 v_m，平板的速度为 $v_板$，由动量守恒，有

$$m_2v=-m_2v_m+m_1v_板 \tag{3}$$

由动能守恒 $$\frac{1}{2}m_2v^2=\frac{1}{2}m_2v_m^2+\frac{1}{2}m_1v_板^2 \tag{4}$$

碰撞后物体反弹，而平板将向下压缩弹簧继续运动。设弹簧被再压缩 x_M 时，压缩量达最大，此时 $v_板=0$。对平板、弹簧和地球系统，机械能守恒。有

$$\frac{1}{2}m_1v_板^2+\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}k(x_0+x_M)^2-m_1gx_M \tag{5}$$

由以上五式可解得 $$x_M=\frac{2m_2}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{2m_1gh}{k}}$$

(2) 物体与平板发生完全非弹性碰撞。碰撞后物体与平板合为一体，设共同运动的速度为 $v_{板m}$。由动量守恒，有

$$m_2v=(m_1+m_2)v_{板m} \tag{6}$$

设弹簧被再压缩 x_m 时，压缩量达最大，此时 $v_{板m}=0$。对平板、物体、弹簧和地球系统，机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{板m}^2+\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}k(x_0+x_m)^2-(m_1+m_2)gx_m \tag{7}$$

由(1)式、(2)式、(6)式、(7)式，可解得

$$x_m=\frac{m_2g}{k}\left[1+\sqrt{1+\frac{2kh}{(m_1+m_2)g}}\right]$$

2-39. 地面上竖直安放着一个劲度系数为 k 的弹簧，其顶端连接一静止的质量为 m' 的物体。有个质量为 m 的物体，从距离顶端为 h 处自由落下，与质量为 m' 的物体作完全非弹性碰撞。求证弹簧对地面的最大压力为：

$$F_{max}=(m'+m)g+mg\sqrt{1+\frac{2kh}{(m'+m)g}}$$

分析：利用动量守恒和机械能守恒定律，分阶段求解证明。

解：m 作自由落体运动，碰撞前的速度大小为

$$v=\sqrt{2gh} \tag{1}$$

设碰撞后两物体的共同速度为 V，由动量守恒，有

$$mv=(m+m')V \tag{2}$$

设 m'静止于弹簧上时，弹簧的压缩量为 x_0，有

$$m'g-kx_0=0 \tag{3}$$

选 m 、m'、弹簧和地球为系统，在压缩弹簧的过程中系统的机械能守恒。选碰撞前 m'静止于弹簧顶端处为重力势能零点，弹簧的原长处为弹性势能零点。设弹簧再被压缩 x 时，压缩量达最大，此时 $V=0$。根据机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}(m+m')V^2+\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}k(x+x_0)^2-(m+m')gx \tag{4}$$

对地面的最大压力由弹簧的最大弹性力施与，为

$$F_{\max}=k(x+x_0) \tag{5}$$

式中 x_0由(3)式得到

$$x_0=\frac{m'}{k}g$$

将(1)式，(2)式，(3)式代入(4)式，得

$$x=\frac{mg}{k}\pm\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{(m+m')g}}$$

舍去“-”，代入(5)式，得

$$F_{\max}=(m+m')g+mg\sqrt{1+\frac{2kh}{(m+m')g}}$$

2-40. 一个球从 h 高处自由落下，掉在地板上。设球与地板碰撞的恢复系数为 e。试证：(1) 该球停止回跳需经过的时间为 $t=\frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{2h}{g}}$；(2) 在上述时间内，球经过的路程是 $s=\frac{1+e^2}{1-e^2}h$。

分析：恢复系数定义为碰后离开的相对速度与碰前接近的相对速度之比。以地球为参考系，地板是静止的，而最终球将停跳，说明常量 $e<1$。所以，球与地面的碰撞是损失部分动能的弹性碰撞，且每次球的回跳速度都将等比地小于触地速度。球在触地前以及触地后的运动，由机械能守恒定律给出。

解：球自 h 高度首次自由下落，设碰地前的速度为 v_{10}，根据机械能守恒，有

$$h=\frac{v_{10}^2}{2g} \tag{1}$$

得

$$v_{10}=\sqrt{2gh} \tag{2}$$

落到地面所需时间，由 $h=\frac{1}{2}gt_0^2$，得 $t_0=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ (3)

与地面碰撞后，设球的回跳速度为 v_1，因地面始终不动，有 $v_{20}=v_2=0$。据恢复系数定义，有

$$e=\frac{v_2-v_1}{v_{10}-v_{20}}=\frac{-v_1}{v_{10}}$$

即

$$v_1=-ev_{10} \tag{4}$$

上式中的负号表示回跳速度 v_1 与 v_{10} 反向，大小为 v_{10} 的 e 倍。

利用以上(1)式—(4)式，可以得到：碰地后球的回跳高度为

$$h_1=\frac{v_1^2}{2g}=\frac{e^2v_{10}^2}{2g}=e^2h$$

球从首次回跳到再次触地的时间间隔

$$t_1=\frac{2v_1}{g}=\frac{2ev_{10}}{g}=2e\sqrt{\frac{2h}{g}}=2et_0$$

以后各次球的回跳高度

$$h_2=e^2h_1=e^4h,\quad h_3=e^2h_2=e^6h,\ \cdots\cdots$$

球从各次回跳到再次触地的时间间隔

$$t_2=2e\sqrt{\frac{2h_1}{g}}=2e^2\sqrt{\frac{2h}{g}}=2e^2t_0,\quad t_3=2e^3\sqrt{\frac{2h}{g}}=2e^3t_0,\ \cdots\cdots$$

上两式中各项的比例系数分别为 e^2 和 e。所以，球停止回跳需经过的时间为

$$\begin{aligned}t&=t_0+t_1+t_2+t_3+\cdots\\&=t_0\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^n\right)=\frac{1+e}{1-e}t_0=\frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{2h}{g}}\end{aligned}$$

停止回跳前经过的路程是

$$\begin{aligned}s&=h+2h_1+2h_2+2h_3+\cdots\\&=h+2e^2h+2e^4h+\cdots=\frac{1+e^2}{1-e^2}h\end{aligned}$$

计算中利用了等比级数的求和公式：$a+aq+aq^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=\frac{a}{1-q}$，$|q|<1$

2-41. 火箭起飞时，从尾部喷出的气体的速度为 3 000 m/s，每秒喷出的气体质量为 600 kg。若火箭的质量为 50 t。求火箭得到的加速度。

分析：火箭在飞行过程中通过不断地喷出气体来获得加速度，作为一个整体，火箭的质量在飞行中不断变化。从这个意义上说，火箭飞行是变质量物体的

运动问题。在飞行过程中，如果火箭及其喷射物所受外力可以忽略，以某时刻的火箭主体和喷射物作为质点系统，动量是守恒的。如果所受外力不可忽略，比如在起飞阶段，则可由质点系统的动量原理来处理。本题讨论火箭起飞时的情况，必须考虑重力，并应注意正确运用动量原理和速度的相对性关系。

解：设火箭从地面竖直向上发射，以向上为运动正方向。取 t 时刻的火箭和喷射物为质点系统，质量分别为 m 和 $\mathrm{d}m$，它们相对地面的速度为 v。t 时刻后，喷射物以相对火箭主体的速度 u"从尾部喷出"，相对地面的速度为 $(v-u)$。则 t 时刻，系统整体的动量为

$$p(t)=(m+\mathrm{d}m)v \tag{1}$$

$t+\mathrm{d}t$ 时刻，系统整体的动量为

$$p(t+\mathrm{d}t)=m(v+\mathrm{d}v)+\mathrm{d}m(v-u) \tag{2}$$

在 $\mathrm{d}t$ 时间内，火箭和喷射物受重力

$$F=-(m+\mathrm{d}m)g \tag{3}$$

根据动量原理，有

$$F\mathrm{d}t=\mathrm{d}p=p(t+\mathrm{d}t)-p(t) \tag{4}$$

将(1)式、(2)式、(3)式代入(4)式，并略去高阶小量 $\mathrm{d}m\mathrm{d}t$，可得

$$m\mathrm{d}v=u\mathrm{d}m-mg\mathrm{d}t$$

所以，火箭主体的加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{u}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}-g=\left(\frac{3\ 000}{50\times10^{3}}\times600-9.8\right)\ \mathrm{m/s^2}=26.2\ \mathrm{m/s^2}$$

5. 质点的角动量和角动量守恒定律

2-42. 电子质量为 9.1×10^{-31} kg，在半径为 5.3×10^{-11} m 的圆周上绕氢核作匀速运动，已知电子的角动量为 $h/2\pi$，求它的角速度。

解：设电子质量为 m，绕核作匀速率圆周运动的速率为 v，轨道半径为 r。电子对氢核的角动量为

$$L=mvr=\frac{h}{2\pi}$$

可得

$$v=\frac{h}{2\pi mr}=\frac{6.63\times10^{-34}}{2\times3.14\times9.11\times10^{-31}\times5.3\times10^{-11}}\ \mathrm{m/s}=2.2\times10^{6}\ \mathrm{m/s}$$

电子的绕核运动的角速度为

$$\omega=\frac{v}{r}=\frac{h}{2\pi mr^2}$$

$$=\frac{6.63\times10^{-34}}{2\times3.14\times9.11\times10^{-31}\times(5.3\times10^{-11})^2}\ \mathrm{rad/s}=4.13\times10^{16}\ \mathrm{rad/s}$$

2-43. 试证质点在有心力场中运动时，因所受作用力处处指向“力心”这一点，则在相等的时间内，它对力心的位矢在空间将扫过相等的面积。

分析：质点所受有心力对“力心”的力矩为零，因而对“力心”的角动量守恒。位矢扫过面积的速度相等，此即开普勒第二定律。

证：设由“力心”O 指向质点的位矢为 $\boldsymbol{r}$，质点所受有心力 $\boldsymbol{F}$ 处处指向“力心”，与 $\boldsymbol{r}$ 反向。对“力心”O 的力矩为

$$\boldsymbol{M}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=0$$

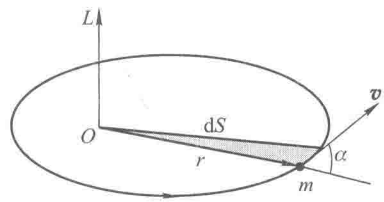
所以，有

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_0=\text{常量}$$

即质点对“力心”角动量的大小和方向都不变。

如解图 2-41 所示，$\boldsymbol{L}$ 垂直于质点的运动平面。设质点的质量为 m，某时刻其位矢 $\boldsymbol{r}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 的夹角为 α。角动量的大小为

$$L=|\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}|=mrv\sin\alpha$$



解图 2-41

$\mathrm{d}t$ 时间内位矢扫过的面积 $\mathrm{d}S$ 为

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{2}r|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\sin\alpha=\frac{1}{2}|\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$$

单位时间内，位矢扫过的面积为

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{|\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|=\frac{L}{2m}=\text{常量}$$

可见，在相等的时间间隔内，位矢在空间扫过的面积相等，为一常量。问题得证。

2-44. 当地球处于远日点时，到太阳的距离为 1.52×10^{11} m，轨道速度为 2.93×10^{4} m/s。半年后，地球处于近日点，到太阳的距离为 1.47×10^{11} m。求：(1) 地球在近日点时的轨道速度；(2) 两种情况下，地球的角速度。

分析：地球和太阳间的万有引力是有心力。取太阳参考系，将地球视为质点，则太阳中心是有心力的“力心”。有心力对“力心”的力矩为零，因此地球绕太阳中心运动的角动量守恒。

解：设地球质量为 m，在远日点的位矢大小为 r_1，速度的大小为 v_1，在近日点的位矢大小为 r_2，速度的大小为 v_2。根据角动量守恒，有

$$mv_1r_1=mv_2r_2$$

(1) 地球在近日点时的轨道速度

$$v_2=\frac{v_1r_1}{r_2}=3.03\times10^{4}\ \text{m}$$

（2）地球在远日点的角速度

$$\omega_1=\frac{v_1}{r_1}=1.93\times10^{-7}\ \mathrm{rad/s}$$

地球在近日点的角速度 $\omega_2=\dfrac{v_2}{r_2}=2.06\times10^{-7}\ \mathrm{rad/s}$

2-45. 角动量为 L,质量为 m 的地球人造卫星,在半径为 r 的圆轨迹上运行。试求它的动能、势能和总能量。

解:由角动量 $L=mvr$ 可得,卫星的轨道运行速率

$$v=\frac{L}{mr}$$

卫星动能为 $E_k=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{L^2}{2mr^2}$

设地球质量为 m_E,卫星在轨道的系统势能为

$$E_p=-G\frac{mm_E}{r}=-\frac{L^2}{mr^2}$$

总能量为 $E=E_k+E_p=-\dfrac{L^2}{2mr^2}$

*2-46. 地球同步卫星在发射初期沿椭圆轨道运行,距地面的近地点和远地点分别为 190 km 和 36 500 km。以后,卫星将变轨,在远地点处加速,成为沿圆形轨道运动的同步卫星。求:(1) 卫星沿椭圆轨道运行的周期;(2) 卫星沿圆形轨道运行的轨道半径和速率(地球半径为 6 371 km)。

分析:以地球为参考系,由同步卫星对地球中心的角动量守恒、开普勒第二定律和地球-卫星系统的机械能守恒等规律,可解得卫星在发射初期沿椭圆轨道的运行周期。

解:(1) 地球处于椭圆轨道的焦点,设地球质量为 m_E,卫星质量为 m,椭圆轨道近地点距地球中心 r_1,卫星速度为 $\boldsymbol{v}_1$,远地点距地球中心 r_2,速度为 $\boldsymbol{v}_2$,且有 $\boldsymbol{v}_1\perp\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_2\perp\boldsymbol{r}_2$。由角动量守恒,有

$$mv_1r_1=mv_2r_2=L \tag{1}$$

由地球-卫星系统的机械能守恒定律,有

$$\frac{1}{2}mv_1^2-G\frac{mm_E}{r_1}=\frac{1}{2}mv_2^2-G\frac{mm_E}{r_2}$$

即
$$v_1^2-v_2^2=2Gm_E\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \tag{2}$$

由开普勒第二定律(习题 2-41),有

$$\frac{dS}{dt}=\frac{L}{2m}=\frac{v_1r_1}{2}=\frac{v_2r_2}{2}$$

可得
$$v_1^2-v_2^2=4\left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}\right)\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 \tag{3}$$

由(2)式和(3)式,得
$$\left(\frac{dS}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}Gm_E\left(\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}\right)=Gm_E\frac{b^2}{4a} \tag{4}$$

式中 $a=\frac{1}{2}(r_1+r_2)$, $b=\sqrt{r_1r_2}$,S 为椭圆轨道所围面积,$S=\pi ab$。

设卫星沿椭圆轨道运行一周的时间为 T,应有

$$\frac{dS}{dt}=\frac{S}{T}=\frac{\pi ab}{T} \tag{5}$$

将(5)式代入(4)式,可得卫星运行周期为

$$T=\frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_E}}=\frac{\pi(r_1+r_2)^{3/2}}{\sqrt{2Gm_E}}$$

考虑到物体 m_0 在地球表面受引力为 $G\frac{m_Em_0}{R^2}=m_0g$,R 为地球半径,即有 $Gm_E=R^2g$。卫星运行周期可化简为

$$T=\frac{2\pi a^{3/2}}{R\sqrt{g}}=\frac{\pi(r_1+r_2)^{3/2}}{R\sqrt{2g}} \tag{6}$$

代入数据,$r_1=(6\ 371+190)\ \text{km}=6\ 561\ \text{km}$,$r_2=(6\ 371+36\ 500)\ \text{km}=42\ 871\ \text{km}$,$a=46\ 151.5\ \text{km}$,$R=6\ 371\ \text{km}$,可得

$$T=\frac{3.14\times(6\ 561\times10^3+42\ 871\times10^3)^{3/2}}{6\ 371\times10^3\times\sqrt{2\times9.8}}\ \text{s}=38\ 691\ \text{s}=10.75\ \text{h}$$

(2) 地球同步卫星的运行周期为 24 h,设圆形轨道半径为 x(轨道距地球中心)。在(6)式中,以 $T=24$ h,$a=x$ 代入,可得

$$x=\left(\frac{TR\sqrt{g}}{2\pi}\right)^{2/3}=\left(\frac{24\times3\ 600\times6\ 371\times10^3\times\sqrt{9.8}}{2\times3.14}\right)^{2/3}=42\ 222\ \text{km}$$

同步卫星离地球表面的高度为

$$h=x-R=35\ 851\ \text{km}$$

同步卫星绕地运行的速率为

$$v=\frac{2\pi x}{T}=\frac{2\times3.14\times4.22\times10^7}{24\times3\ 600}\ \text{m/s}=3.07\times10^3\ \text{m/s}$$

另解(2):地球引力提供卫星作圆周运动的向心力,有

$$G\frac{m_E m}{x^2}=m\frac{v^2}{x}$$

并有

$$G\frac{m_E m}{R^2}=mg$$

和

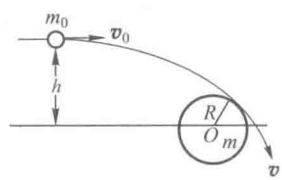
$$T=\frac{2\pi x}{v}$$

解上述方程,得

$$x=\left(\frac{TR\sqrt{g}}{2\pi}\right)^{2/3}$$

结果相同。

2-47. 有一不带动力的航天器,质量为 m_0,自远方以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 射向某一星球,如习题 2-47 图所示。如以 h 表示航天器与星球中心的垂直距离。求 h 最大值为多大时,航天器可以在星球上着陆。该星球的质量为 m,半径为 R。



习题 2-47 图

分析:无动力航天器接近星球时,仅受星球的引力作用。在此有心、保守力的作用下,航天器对星球中心的角动量守恒,并与星球系统的机械能守恒。受这些规律支配,航天器将以星球中心为焦点的椭圆轨道运行,h 的大小决定了轨道能否与星球表面相切,使航天器被星球俘获,实现着陆。

解:取星球参考系。由航天器对星球中心的角动量守恒,有

$$m_0v_0h=m_0vR$$

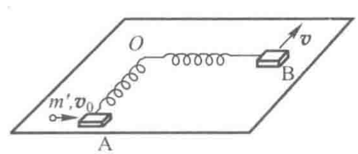
航天器与星球系统的机械能守恒,有

$$\frac{1}{2}m_0v_0^2+0=\frac{1}{2}m_0v^2-G\frac{m_0m}{R}$$

解以上两式,得

$$h=R\sqrt{1+\frac{2Gm}{Rv_0^2}}$$

2-48. 如习题 2-48 图所示,在光滑水平桌面上,有一质量为 m 的物体,物体与一轻弹簧相连,弹簧的另一端固定在桌面上 O 点,其劲度系数为 k。一质量为 m' 的子弹以速度 $\boldsymbol{v}_0$



习题 2-48 图

射向物体，并嵌入物体内。如开始时弹簧的长度为原长 l_0，子弹射入后，物体从 A 点运动到 B 点，此时弹簧长度为 l。求物体在 B 点的速度（大小及方向）。

分析：子弹射入物体的过程极短促且相互作用极强，而此时的弹簧处于原长状态，对物体无作用力，因而该过程可视作完全非弹性碰撞，两者的动量守恒；对子弹与物体在弹簧作用下的共同运动，以子弹、弹簧和物体为系统，满足机械能守恒条件；在共同运动过程中，弹簧拉力对 O 点的力矩为零，故子弹与物体对 O 点的角动量守恒。

解：设子弹在 A 点射入物体后，共同运动的速度为 v_A，由动量守恒，有

$$m'v_0=(m+m')v_A \tag{1}$$

设子弹与物体自 A 点运动到 B 点时的速度为 v_B，与 OB 连线方向成 θ 角。由机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}(m+m')v_A^2+0=\frac{1}{2}(m+m')v_B^2+\frac{1}{2}k\,(l-l_0)^2 \tag{2}$$

由角动量守恒，有

$$m'v_0l_0=(m+m')v_Bl\sin\theta \tag{3}$$

解以上方程组，得

$$v_B=\sqrt{\left(\frac{m'v_0}{m+m'}\right)^2-\frac{k\,(l-l_0)^2}{m+m'}}$$

$$\theta=\arcsin\frac{m'v_0l_0}{l\sqrt{(m'v_0)^2-k(m+m')(l-l_0)^2}}$$

2-49. 如习题 2-49 图所示，一球面摆，摆长为 l，摆球的质量为 m，开始时摆线与竖直线 OO' 成 θ 角，摆球的初速度垂直于摆线所在的竖直面。如果摆球在运动过程中摆线的张角 θ 最大为 90°，求摆球的初速度应是多少？小球到达 $\theta=$ 90°时的速度是多少？

分析：摆球在运动中只受摆线的拉力和重力，拉力不做功，故摆球－地球系统的机械能守恒；取铅垂线 OO' 为 z 轴，对 O 点，拉力的力矩为零，重力矩 M_G 垂直于 z 轴，沿 z 轴的分量 $M_{Gz}=0$，即 $L_z=$ 常量，故摆球绕 z 轴的转动角动量守恒。

解：设摆球的初速为 v_0，摆线张角 θ 为 90°时的速率为 v。取重力势能零点于 O 点处，由机械能守恒，有

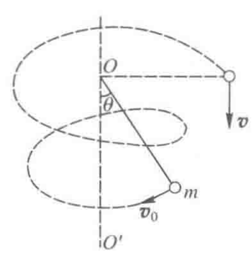
$$\frac{1}{2}mv_0^2-mgl\cos\theta=\frac{1}{2}mv^2$$

由 z 方向的角动量守恒，有

$$mv_0l\sin\theta=mvl$$

解以上两式，得

$$v_0=\sqrt{\frac{2gl}{\cos\theta}},\quad v=v_0\sin\theta=\sqrt{2gl\sin\theta\tan\theta}$$



习题 2-49 图

第三章　刚体和流体的运动

一、教学基本要求

1. 掌握刚体绕定轴的转动定律，理解转动惯量概念。
2. 理解刚体绕定轴转动中的能量关系。
3. 掌握刚体绕定轴转动的角动量守恒定律及其适用条件。
4. 理解理想液体的性质、定常流动的伯努利方程。

二、本章习题分类

1. 力矩的计算，转动定律的应用
2. 转动惯量的计算
3. 刚体转动中的功和能
4. 角动量定理和角动量守恒定律
5. 刚体的进动
6. 流体

三、习题分析与解答

1. 力矩的计算，转动定律的应用

3-1. 一飞轮直径为 0.30 m，质量为 5.00 kg，边缘绕有绳子，现用恒力拉绳子的一端，使其由静止均匀地加速，经 0.50 s 转速达 10 r/s。假定飞轮可看作实心圆柱体，求：(1) 飞轮的角加速度及在这段时间里转过的转数；(2) 拉力及拉力所做的功；(3) 拉动后 10 s 时飞轮的角速度及轮边缘上一点的速度和加速度。

解：(1) 由 $\omega=\omega_0+\alpha t$，得

$$\alpha=\frac{\omega}{t}=\frac{10\times2\times3.14}{0.5}\mathrm{rad/s^2}=1.26\times10^2\mathrm{rad/s^2}$$

飞轮转过的角度
$$\Delta\theta=\frac{1}{2}\alpha t^2=5\pi\ \mathrm{rad}$$

飞轮转过的转数
$$N=\frac{\Delta\theta}{2\pi}=2.5(\text{转})$$

（2）由转动定律　$M=FR=J\alpha=\left(\dfrac{1}{2}mR^2\right)\alpha$

可得拉力为　$F=\dfrac{1}{2}mR\alpha=47\ \text{N}$

拉力的功即拉力矩的功　$A=M\theta=FR\theta=111\ \text{J}$

（3）$t=10$ s 时，飞轮的角速度为

$$\omega=\omega_0+\alpha t=\alpha t=1.26\times10^3\ \text{rad/s}$$

飞轮边缘一点的速度　$v=R\omega=1.89\times10^2\ \text{m/s}$

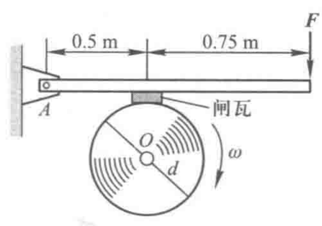
法向加速度　$a_n=\dfrac{v^2}{R}=2.38\times10^5\ \text{m/s}^2$

切向加速度　$a_t=R\alpha=18.9\ \text{m/s}^2$

总加速度大小　$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}\approx a_n=2.38\times10^5\ \text{m/s}^2$

方向几乎与 a_n 相同。

3-2. 飞轮的质量为 60 kg，直径为 0.50 m，转速为 1 000 r/min，现要求在 5 s 内使其制动，求制动力 F。假定闸瓦与飞轮之间的摩擦因数 $\mu=0.40$，飞轮的质量全部分布在轮的外周上。尺寸如习题 3-2 图所示。



习题 3-2 图

分析：制动杆作用在飞轮上的摩擦力，对飞轮 O 点的摩擦力矩使飞轮被制动。制动杆受飞轮通过闸瓦施加的反作用力 F_N' 和制动力 F，对 A 点的合力矩为零。分别对飞轮和制动杆作受力和力矩分析后求解。

解：飞轮的转动惯量为

$$J=mR^2=\frac{1}{4}md^2=3.75\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

在 5 s 内使飞轮制动，飞轮的角加速度为

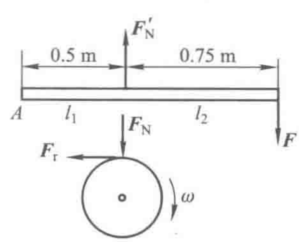
$$\alpha=\frac{\omega-\omega_0}{t}=-\frac{2\pi n}{t}=-20.9\ \text{rad/s}$$

分别对制动杆和飞轮作受力分析，其中 $F_N=F_N'$，如解图 3-2 所示。对制动杆的 A 点，因力矩平衡，有

$$F(l_1+l_2)-F_N'l_1=0 \qquad (1)$$

飞轮受摩擦力矩为

$$M=RF_r=\mu F_N\frac{d}{2} \qquad (2)$$



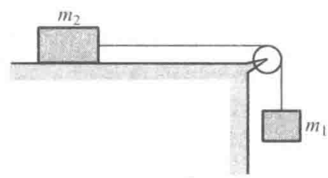
解图 3-2

由转动定律，有

$$M = J\alpha \tag{3}$$

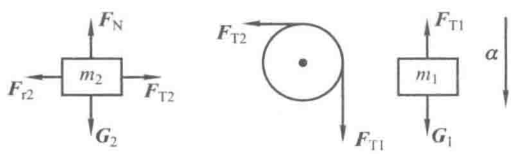
解以上方程，并代入数据，得 $F = \dfrac{l_1}{l_1 + l_2}\dfrac{md}{2\mu}\alpha = 314\ \text{N}$

3-3. 如习题 3-3 图所示，两物体 1 和 2 的质量分别为 m_1 与 m_2，滑轮的转动惯量为 J，半径为 r。(1) 如物体 2 与桌面间的摩擦因数为 μ，求系统的加速度 a 及绳中的张力（设绳子与滑轮间无相对滑动）；(2) 如物体 2 与桌面间为光滑接触，求系统的加速度 a 及绳中的张力。



习题 3-3 图

解：(1) 对两物体和滑轮的受力分析如解图 3-3 所示。设物体的加速度大小为 a，滑轮角加速度为 α，并设 m_1 向下为运动正方向。由牛顿运动定律可知



解图 3-3

$$m_1 g - F_{T1} = m_1 a \tag{1}$$

$$F_{T2} - F_{r2} = m_2 a,\ F_{r2} = \mu m_2 g \tag{2}$$

由转动定律可知

$$F_{T1} r - F_{T2} r = J\alpha \tag{3}$$

$$a = a_t = \alpha r \tag{4}$$

解得

$$a = \frac{(m_1 - \mu m_2)\ g}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

$$F_{T1} = \frac{m_1(m_2 + \mu m_2 + J/r^2)\ g}{m_1 + m_2 + J/r^2},\quad F_{T2} = \frac{m_2(\mu m_1 + m_1 + \mu J/r^2)\ g}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

(2) 将 $\mu = 0$ 代入以上各式，得

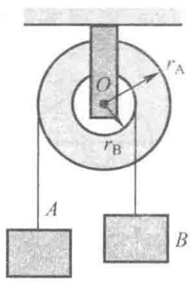
$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + J/r^2},\quad F_{T1} = \frac{m_1(m_2 + J/r^2)\ g}{m_1 + m_2 + J/r^2},\quad F_{T2} = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

3-4. 半径分别为 r_A 和 r_B 的圆盘，同轴地粘在一起，可以绕通过盘心且垂直盘面的水平光滑固定轴转动，对轴的转动惯量为 J，两圆盘边缘都绕有轻绳，绳

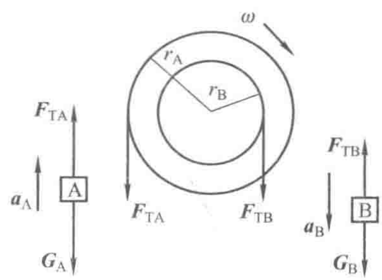
子下端分别挂有质量为 m_A 和 m_B 的物体 A 和物体 B，如习题 3-4 图所示。若物体 A 以加速度 a_A 上升。证明物体 B 的质量

$$m_B=\frac{Ja_A+m_Ar_A^2(g+a_A)}{r_Ar_Bg-r_B^2a_A}$$

证：设 A 的加速度大小为 a_A，方向向上，B 的加速度 a_B 方向向下，圆盘整体以顺时针为转动正方向，角加速度为 α。两边轻绳的拉力分别为 F_{TA} 和 F_{TB}。分别作 A 和 B 的受力图和圆盘整体受力矩的隔离图如解图 3-4 所示。对 A、B 和圆盘整体，分别有



习题 3-4 图



解图 3-4

$$F_{TA}-m_Ag=m_Aa_A$$

$$m_Bg-F_{TB}=ma_B$$

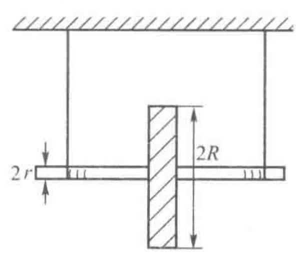
$$r_BF_{TB}-r_AF_{TA}=J\alpha$$

其中
$$\alpha=\frac{a_A}{r_A}=\frac{a_B}{r_B}$$

解上述方程，得
$$m_B=\frac{Ja_A+m_Ar_A^2(g+a_A)}{r_Ar_Bg-r_B^2a_A}$$

3-5. 如习题 3-5 图所示为麦克斯韦滚摆，转盘的质量为 m，半径为 R，盘轴的半径为 r，质量略去不计。求下降时的加速度和每根绳的张力。

解：对滚摆作受力分析，如解图 3-5 所示。设转盘的质量均匀分布，对质心轴的转动惯量为 $J=\frac{1}{2}mR^2$，轴心的加速度为 a。转盘两侧对称设置的绳中的张力 F_T 相同，根据牛顿运动定律和转动定律，有

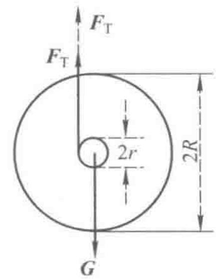


习题 3-5 图

$$mg-2F_T=ma$$

$$2F_Tr=J\alpha$$

$$a=r\alpha$$

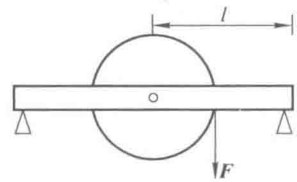


解图 3-5

可解得
$$a=\frac{mr^2}{J+mr^2}g=\frac{2r^2}{R^2+2r^2}g$$

$$F_T=\frac{J}{2(J+mr^2)}mg=\frac{R^2}{2(R^2+2r^2)}mg$$

3-6. 质量为 m、半径为 r 的均质圆盘,其中心装有固定轴,该轴套装在长为 $2l$、可不计质量的横梁的中心圆孔内,在圆盘的边缘绕以绳子,如习题 3-6 所示。圆盘转动时所受阻力矩可表示为 αF_N,α 是一常量,F_N 为转轴所受支撑力。证明:如果在绳上施以力 F 的作用,横梁左右两端所受的支撑力分别为



习题 3-6 图

$$\frac{1}{2}(F+mg)\left(1-\frac{\alpha}{l}\right) \text{和} \frac{1}{2}(F+mg)\left(1+\frac{\alpha}{l}\right)$$

又问:如果逐渐增大 F,横梁的左端是否会上翘。

分析:圆盘转动时转轴与横梁圆孔间有摩擦力的相互作用,该摩擦力与 F_N 有关。对圆盘作受力平衡分析后可求出 F_N,再由对横梁中心的力矩平衡求解。

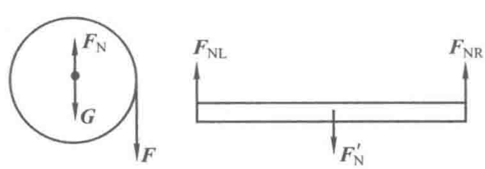
解:对圆盘和横梁的受力分析如解图 3-6 所示,其中 $F_N=F'_N$。对圆盘,有

$$F_N-mg-F=0 \tag{1}$$

得
$$F_N=mg+F$$

横梁中心受摩擦力矩为

$$\alpha F'_N=\alpha(mg+F)$$



解图 3-6

设横梁左右两端所受支撑力分别为 F_{NL} 和 F_{NR},有

$$F_{NL}+F_{NR}-F'_N=0 \tag{2}$$

横梁中心受力矩平衡,有 $F_{NL}l-F_{NR}l+\alpha F'_N=0$ (3)

解上述方程,可得 $F_{NL}=\frac{1}{2}(F+mg)\left(1-\frac{\alpha}{l}\right)$ (4)

$$F_{NR}=\frac{1}{2}(F+mg)\left(1+\frac{\alpha}{l}\right)$$

命题得证。

逐渐增大 F,对圆盘运用转动定律,应有

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{rF-\alpha F_N}{J}=\frac{rF-\alpha(F+mg)}{J}\geqslant 0 \tag{5}$$

式中 J 为圆盘的转动惯量。因 $l>r$,由(5)式可得

$$0\leqslant rF-\alpha(F+mg)<lF-\alpha(F+mg)=lF\left(1-\frac{\alpha}{l}\right)-\alpha mg \tag{6}$$

若横梁的左端会上翘,有 $F_{NL}\leqslant 0$,由(4)式可得

$$\left(1-\frac{\alpha}{l}\right)\leqslant 0$$

显然,这与(6)式相矛盾,使得$\frac{d\omega}{dt}<0$。所以,逐渐增大 F,横梁的左端是不会上翘的。

2. 转动惯量的计算

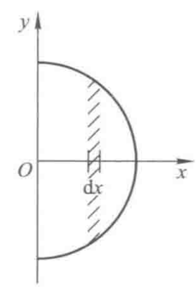
3-7. 一半圆形均匀薄板,质量为 m,半径为 R。当它以直径为轴转动时,转动惯量为多大?

解: 薄板的质量均匀分布,设质量密度为 σ,有

$$\sigma=\frac{m}{S}=\frac{2m}{\pi R^2}$$

如解图 3-7 所示,取平行于转轴 y 的狭长条质元 dm,有

$$dm=\sigma dS=2\sigma y dx=2\sigma\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

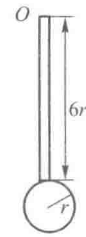


解图 3-7

据转动惯量定义

$$J=\int_0^m x^2 dm=\int_0^R 2\sigma x^2\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\sigma\frac{\pi R^4}{8}=\frac{1}{4}mR^2$$

3-8. 如习题 3-8 图所示，钟摆由一根均匀细杆和匀质圆盘构成，圆盘的半径为 r，质量为 $4m$，细杆长为 $6r$，质量为 m，试求这钟摆对端点 O 轴的转动惯量。



习题 3-8 图

分析：利用转动惯量的定义、可加性以及平行轴定理求解。

解：细杆对 O 轴的转动惯量为

$$J_1=\int_0^m l^2\mathrm{d}m=\int_0^{6r}\lambda l^2\mathrm{d}l=72\lambda r^3=12mr^2$$

圆盘对质心（圆心）轴的转动惯量为

$$J_{2C}=\frac{1}{2}(4m)r^2=2mr^2$$

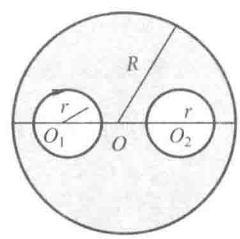
由平行轴定理，圆盘对 O 轴的转动惯量为

$$J_2=J_{2C}+(4m)(7r)^2=198mr^2$$

钟摆对端点 O 轴的转动惯量为

$$J=J_1+J_2=210mr^2$$

3-9. 如习题 3-9 图所示，在质量为 m、半径为 R 的匀质圆盘上，挖去半径为 r 的两个圆孔，孔心在半径的中点，求剩余部分对圆盘中心且与盘面垂直的轴线的转动惯量。（提示：根据转动惯量的可加性，设想在挖去的小孔处填上正、负质量同质的材料。这样就成为正质量的大圆盘和负质量的小圆盘组合的圆盘。这种方法称为补偿法或称负质量法。以后计算电场强度、磁场强度等均可用此法）。



习题 3-9 图

解：设正质量的大圆盘对中心轴的转动惯量为 J_1，两个负质量小圆盘对大圆盘中心轴的转动惯量为 J_2 和 J_3。有

$$J_1=\frac{1}{2}mR^2$$

$$J_2=J_3=-\left[\frac{1}{2}m'r^2+m'\left(\frac{R}{2}\right)^2\right]$$

其中

$$m'=\frac{m}{\pi R^2}\pi r^2=m\ \frac{r^2}{R^2}$$

所以，剩余部分对中心轴的转动惯量为

$$J=J_1+2J_2=\frac{1}{2}mR^2\left(1-\frac{r^2}{R^2}-2\ \frac{r^4}{R^4}\right)$$

3. 刚体转动中的功和能

3-10. 某冲床上飞轮的转动惯量为 $4.00\times10^3\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，当它的转速达到 30 r/min 时，它的转动动能是多少？每冲一次，其转速降到 10 r/min，求每冲一次飞轮对外所做的功。

解：转速 $n_1=30$ r/min 时的转动动能为

$$E_{k1}=\frac{1}{2}J\omega_1^2=\frac{1}{2}\times4.00\times10^3\times\left(\frac{2\pi\times30}{60}\right)^2\ \mathrm{J}=1.97\times10^4\ \mathrm{J}$$

转速 $n_2=10$ r/min 时的转动动能为

$$E_{k2}=\frac{1}{2}J\omega_1^2=\frac{1}{2}\times4.00\times10^3\times\left(\frac{2\pi\times10}{60}\right)^2\ \mathrm{J}=2.19\times10^3\ \mathrm{J}$$

由转动动能定理，外力矩对飞轮做功为

$$A=E_{k2}-E_{k1}=-1.75\times10^4\ \mathrm{J}$$

飞轮对外所做的功为

$$A'=-A=1.75\times10^4\ \mathrm{J}$$

3-11. 一脉冲星质量为 1.5×10^{30} kg，半径为 20 km，自旋转速为 2.1 r/s，并且以 $1.0\times10^{-15}\ \mathrm{r/s^2}$ 的变化率减慢。问它的转动动能以多大的变化率减小？如果这一变化率保持不变，这个脉冲星经过多长时间就会停止自旋？设脉冲星可看作匀质球体。

解：设脉冲星的质量为 m，自旋角速度为 $\omega=2\pi n$。转动动能为 $E_k=\frac{1}{2}J\omega^2$，其中 $J=\frac{2}{5}mR^2$，则转动动能对时间的变化率

$$\begin{aligned}\frac{dE_k}{dt}&=J\omega\frac{d\omega}{dt}=\frac{2}{5}mR^2\omega\frac{d\omega}{dt}\\&=\frac{2}{5}\times1.5\times10^{30}\times(20\times10^3)^2\times2\pi\times2.1\times2\pi\times(-1.0\times10^{-15})\ \mathrm{J/s}\\&=-1.99\times10^{25}\ \mathrm{J/s}\end{aligned}$$

对上式积分，有　$\int_{E_{k0}}^{E_k}dE_k=-1.99\times10^{25}\int_0^t dt$（SI 单位）

得 t 时刻的转动动能，为　$E_k(t)=E_{k0}-1.99\times10^{25}t$

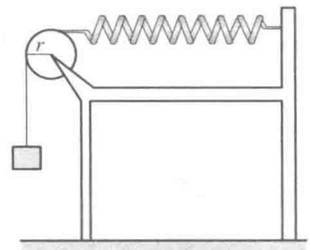
式中 E_{k0} 为计时开始时的转动动能

$$E_{k0}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)(2\pi n)^2=2.09\times10^{40}\ \mathrm{J}$$

停止自旋时的转动动能 $E_k=0$，所以

$$t=\frac{E_{k0}-0}{1.99\times10^{25}}=\frac{2.09\times10^{40}}{1.99\times10^{25}}=1.05\times10^{15}(\mathrm{s})$$

3-12. 如习题 3-12 图所示，弹簧的劲度系数 $k=2.0\times10^3$ N/m，轮子的转动惯量为 0.5 kg · m²，轮子半径 $r=30$ cm。当质量为 60 kg 的物体下落 40 cm 时其速率是多大？假设开始时物体静止而弹簧无伸长。



习题 3-12 图

分析：弹簧、轮子、物体和地球系统不受外力。绳与滑轮间的摩擦力和绳的张力都是成对内力。因绳与滑轮间无相对滑动、绳不可伸长，这两对内力的功都为零。所以，系统的机械能守恒。由牛顿运动定律和转动定律也可求解。

解 1：设下落物体的速度为 v，轮子的转速为$\omega=\dfrac{v}{r}$，因绳不可伸长，弹簧的伸长量即为物体下落的距离。选物体下落 40 cm 时的位置为重力势能零点，弹性势能零点于弹簧原长处。

由机械能守恒定律，有

$$\frac{1}{2}kh^2+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2=mgh$$

式中 h 为物体下落的高度，m 为物体的质量，J 为轮子的转动惯量。解上述方程可得

$$v=\sqrt{\frac{2mgh-kh^2}{m+J/r^2}}=1.51\ \mathrm{m/s}$$

解 2：受力分析如解图 3-12 所示，并设物体运动方向如图所示，有

$$mg-F_T=ma$$

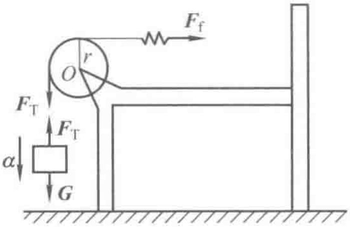
$$F_Tr-kxr=J\alpha$$

$$a=r\alpha$$

可解得
$$a=\frac{mg-kx}{m+J/r^2}$$

由 $a=\dfrac{dv}{dt}$，$v=\dfrac{dx}{dt}$，有

$$\frac{dv}{a}=\frac{dx}{v}$$

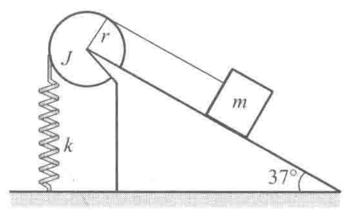


解图 3-12

即
$$v\mathrm{d}v = a\mathrm{d}x$$
$$\int_0^v v\mathrm{d}v = \int_0^x \frac{mg-kx}{m+J/r^2}\mathrm{d}x$$
解得
$$v=\sqrt{\frac{2mgh-kh^2}{m+J/r^2}}$$

从两种解法可见,第一种简便,这就是守恒定律的优越性。

3-13. 如习题3-13图所示,滑轮的转动惯量为 $J=0.5\ \mathrm{kg\cdot m^2}$,半径 $r=30\ \mathrm{cm}$,弹簧的劲度系数 $k=20\ \mathrm{N/m}$,重物的质量 $m=2.0\ \mathrm{kg}$。当此滑轮-重物系统从静止开始启动,开始时弹簧没有伸长。如摩擦可忽略,问物体能沿斜面滑下多远?当物体沿斜面滑下1.00 m时,它的速率有多大?



习题 3-13 图

分析:在物体沿固定光滑斜面下滑的过程中,由物体、弹簧、滑轮、地球构成系统的机械能守恒。求解时注意确定重力势能和弹性势能零点的位置。

解:取物体的初始位置为重力势能零点,弹簧的原长为弹性势能零点。因绳子不可伸长,所以重物沿斜面滑下的最大距离 x_M 即为弹簧的最大伸长量。

由机械能守恒定律,有　$0=\frac{1}{2}kx_M-mgx_M\sin\theta$

得物体能沿斜面滑下的最大距离为
$$x_M=\frac{2mg\sin\theta}{k}=1.18\ \mathrm{m}$$

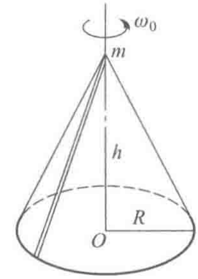
当物体沿斜面滑下 $x_0=1\ \mathrm{m}$ 时,有
$$0=\frac{1}{2}kx_0-mgx_0\sin\theta+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2$$

式中 $\omega=\frac{v}{r}$,得
$$v=\sqrt{\frac{2mgx_0\sin\theta-kx_0}{m+\frac{J}{r^2}}}=0.69\ \mathrm{m/s}$$

4. 角动量定理和角动量守恒定律

3-14. 如习题3-14图所示,一个高为 h、半径为 R 的圆锥体,可以绕其固定的竖直轴自由转动,转动惯量为 J_0,在其表面沿母线有一光滑的细槽。开始时,

锥体以角速度 ω_0 转动，此时，将质量为 m 的小滑块从槽顶无初速地释放，使其在槽内下滑。试求：滑块滑到达底边时圆锥体的角速度多大？滑块的速度为多大？



习题 3-14 图

解：在小滑块从槽顶下滑的过程中，圆锥体和小滑块对竖直轴的角动量守恒，机械能也守恒。设小滑块滑到达底边与圆锥体一起绕轴转动的角速度为 ω，速率为 v，有

$$J_0\omega_0=(J_0+mR^2)\ \omega$$

$$mgh+\frac{1}{2}J_0\omega_0^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J_0\omega^2$$

可解得

$$\omega=\frac{J_0}{J_0+mR^2}\omega_0$$

$$v=\sqrt{\frac{J_0}{m}(\omega_0^2-\omega^2)\ +2gh}=\sqrt{\frac{(2J_0+mR^2)\ J_0R^2\omega_0^2}{(J_0+mR^2)^2}+2gh}$$

3-15. 在自由旋转的水平圆盘边上，站一质量为 m 的人。圆盘的半径为 R，转动惯量为 J，角速度为 ω。如果这人由盘边走到盘心，求角速度的变化及此系统动能的变化。

分析：取人和圆盘为定轴转动系统。人与盘间的摩擦内力，不改变系统绕轴的角动量；系统所受重力也不会对绕垂直轴转动的角动量产生影响，故系统在水平面内绕轴转动的角动量守恒。

解：设人站在盘边缘时，与圆盘一起转动的角速度为 ω。此时系统的角动量为

$$L=(J+mR^2)\ \omega$$

当人走到盘心时，系统的角速度为 ω'，由于人已在转轴处，对转轴的转动惯量为零。所以，ω'就是圆盘的角速度。系统的角动量为

$$L'=J\omega'$$

系统角动量守恒，有

$$(J+mR^2)\ \omega=J\omega'$$

得

$$\omega'=\frac{J+mR^2}{J}\omega$$

角速度的变化为

$$\Delta\omega=\omega'-\omega=\frac{mR^2}{J}\omega$$

系统动能的变化为

$$\Delta E_k=\frac{1}{2}J\omega'^2-\frac{1}{2}(J+mR^2)\ \omega^2=\frac{1}{2}\frac{J+mR^2}{J}mR^2\omega^2$$

3-16. 在半径为 R、质量为 m 的静止水平圆盘上，站一质量为 m 的人。圆盘可无摩擦地绕通过圆盘中心的竖直轴转动。当这人开始沿着圆盘的边缘匀速地走动时，设他相对于圆盘的速度为 v，问圆盘将以多大的角速度旋转？当他走了一周回到原有位置时，圆盘将转过多少角度？

分析：与上题的情况相似，人和圆盘系统对转轴的角动量守恒。须注意守恒定律中的角速度 ω 相对同一惯性参考系，人对盘的角速度是相对角速度。

解：开始时人和圆盘系统的角动量为 $L_0=0$。人走动后，设圆盘对地的角速度为 ω，人对地的角速度为 ω'。根据运动的相对性，有

$$\omega'=\frac{v}{R}+\omega$$

由系统角动量守恒，有　$L_0=0=J\omega+mR^2\omega'$

式中 J 是圆盘对圆心竖直轴的转动惯量，$J=\frac{1}{2}mR^2$

解得圆盘的角速度为　$$\omega=-\frac{2}{3R}v$$

“-”表示圆盘转动方向与人走动方向相反。

将上式表示为　$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\frac{2}{3R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

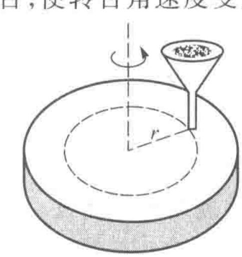
积分可得　$$\Delta\theta=-\frac{2}{3R}\Delta s$$

式中 Δs 是人在圆盘上走过的路程，$\Delta\theta$ 是圆盘相对地面转过的角度。

当 $\Delta s=2\pi R$ 时，有　$$\Delta\theta=-\frac{4}{3}\pi$$

即人沿圆盘边缘以 v 行走一周时，圆盘将反向转过 $4\pi/3$。

3-17. 如习题 3-17 图示所示，转台绕中心竖直轴以角速度 ω_0 作匀速转动。转台对该轴的转动惯量 $J=5\times10^{-5}\ \mathrm{kg\cdot m^2}$。现有砂粒以 1 g/s 的速度落到转台，并粘在台面形成一半径 $r=0.1$ m 的圆。试求砂粒落到转台，使转台角速度变为 $\omega_0/2$ 所花的时间。



习题 3-17 图

分析：转台和落下的砂粒所受重力及相互作用力，在转动平面内对竖直轴的力矩为零，故系统的角动量守恒。随着砂粒的下落，对竖直轴的转动惯量将增大，角速度变变小。

解：取转台和落下的砂粒为系统。设 t 时刻落下砂粒的质量为 m，有

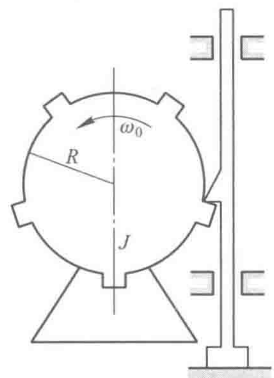
$$m=kt$$

式中 $k=0.001\ \mathrm{kg/s}$。

由角动量守恒,有 $$J\omega_0=(J+mr^2)\ \omega$$

令 $\omega=\frac{1}{2}\omega_0$,可解得 $$t=\frac{J(\omega_0-\omega)}{kr^2\omega}=5\ \mathrm{s}$$

3-18. 如习题 3-18 图所示的打桩装置,半径为 R 的带齿轮转盘绕中心轴的转动惯量为 J,转动角速度为 ω_0,夯锤的质量为 m,开始处于静止状态,当转盘与夯锤碰撞后,问夯锤的速度能有多大?



习题 3-18 图

分析:以转盘与夯锤为系统。在碰撞过程中,由于相互作用的冲击内力很大,可将夯锤所受重力对转盘中心轴的力矩忽略,因而系统在碰撞过程中对转轴的角动量守恒。

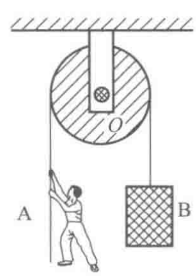
解:设碰撞后夯锤与转盘有相同的角速度 ω,将夯锤视作质点。由系统的角动量守恒可知

$$J\omega_0=(mR^2+J)\omega$$

得 $$\omega=\frac{J\omega_0}{mR^2+J}$$

则夯锤的速度为 $$v=R\omega=\frac{JR\omega_0}{mR^2+J}$$

3-19. 一轻绳绕过一定滑轮,滑轮轴光滑,滑轮的质量为 $m/4$,均匀分布在其边缘上。绳子的一端有一质量为 m 的人 A 抓住了绳端,而在绳的另一端系了一质量为 $m/2$ 的重物 B,如习题 3-19 图所示。设人从静止开始相对绳以匀速向上爬时,绳与滑轮间无相对滑动,求重物 B 上升的加速度?(已知滑轮对过滑轮中心且垂直于轮面的轴的转动惯量 $J=mR^2/4$。)

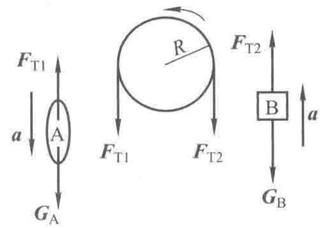


习题 3-19 图

分析:区别于轻滑轮,当计及滑轮质量时,滑轮两边绳子的张力不等,两个拉力的合力矩使滑轮转动;因绳子不可伸长,人和重物具有相同大小的速度和加速度值。

在质点系的角动量定理中,所有物体的角动量均相对同一定轴,均相对惯性参考系。

解 1:人相对绳子往上运动时,其对地加速度可能是向下的。设人对地加速度的大小为 a,方向向下,重物对地的加速度 a 向上。设定滑轮的半径为 R 作逆时针转动,角加速度为 α。两边绳的拉力分别为 F_{T1} 和 F_{T2}。人、重物和滑轮的受力及力矩分析如解图 3-19 所示,分别有



解图 3-19

$$m_A g - F_{T1} = m_A a$$
$$F_{T2} - m_B g = m_B a$$
$$RF_{T1} - RF_{T2} = J\alpha$$
$$a = R\alpha$$

式中 $J=\dfrac{m}{4}R^2$, $m=m_A=2m_B$。解上述方程,得

$$a=\frac{2}{7}g$$

$a>0$ 表明加速度的方向与假定方向一致,即重物的加速度是向上的。

解 2:取人、轻绳、重物和滑轮为系统。系统所受外力对滑轮轴的力矩为

$$M=m_A gR-m_B gR=\frac{1}{2}mgR$$

设人相对绳的速度为 u,重物相对地的上升速度为 v,则人相对地的速度为 $(u-v)$。系统对滑轮轴的角动量为

$$L=m_B vR+J\omega-m_A(u-v)R=mR\left(\frac{7}{4}v-u\right)$$

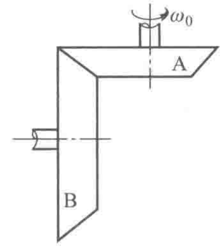
由角动量定理 $M=\dfrac{dL}{dt}$,有

$$\frac{1}{2}mgR=\frac{d}{dt}\left[mR\left(\frac{7}{4}v-u\right)\right]=\frac{7}{4}mR\frac{dv}{dt}$$

所以,重物 B 上升的加速度为　$a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{2}{7}g$

两种解法的结果一致。

3-20. 如习题 3-20 图所示,一对伞形齿轮 A 和 B,其圆半径分别为 r_1 和 r_2,对通过各自的对称轴的转动惯量为 J_1 和 J_2。开始时 A 轮以角速度 ω_0 转动,然后与 B 轮正交啮合,求啮合后两轮的角速度。



习题 3-20 图

分析:啮合时两轮间的相互作用力成对产生,作用时间短、变化大,对各自的转轴产生冲力矩,从而改变各自的

转动状态。啮合后两轮边缘具有相同的线速度。

解:设轮齿的啮合时间为 Δt,相互作用力为 F。啮合后 A 轮的角速度为 ω_1,B 轮的角速度为 ω_2。根据角动量定理,有

$$-r_1 F\Delta t = J_1(\omega_1 - \omega_0)$$

$$r_2 F\Delta t = J_2\omega_2$$

两轮边缘的线速度相同　　$r_1\omega_1 = r_2\omega_2$

解以上各式,得　　$\omega_1 = \dfrac{J_1\omega_0 r_2^2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2}$,　$\omega_2 = \dfrac{J_1\omega_0 r_1 r_2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2}$

3-21. 一个人站在一竹筏的一端用力向垂直于筏身方向水平跳出去,筏由于受到反冲作用就要旋转起来。假定人的质量为 $m=60$ kg,筏的质量 $m'=500$ kg,筏长10 m,人相对于岸的起跳速度为 3 m/s。求竹筏所获得的角速度(假定竹筏的转动惯量近似地可以用细杆的公式来计算,水的摩擦可以忽略不计)。

分析:在水平面内,人和竹筏系统不受外力,也不受外力矩,因而系统的动量和角动量都守恒;人和竹筏的质心都将反向平动,并且竹筏将绕平动着的质心轴转动。

解 1:在水平面内,人和竹筏系统的动量守恒。设人相对于岸的起跳速度为 v,筏心相对岸的速度为 v_C,有

$$0 = mv + m'v_C \tag{1}$$

解得筏心的平动速度为　　$v_C = -\dfrac{m}{m'}v = -0.36$ m/s

式中负号表示筏心的平动方向与人跳离竹筏的方向相反。

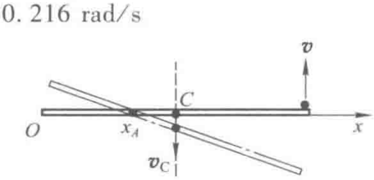
在水平面内,系统对筏心轴的角动量守恒。设竹筏在人跳离后的角速度为 ω,有

$$0 = mv\,\frac{l}{2} + J_C\omega \tag{2}$$

式中 J_C为竹筏对质心轴的转动惯量 $J_C = \dfrac{1}{12}m'l^2$

竹筏绕质心轴转动的角速度为　　$\omega = -\dfrac{6m}{m'l}v = -0.216$ rad/s

式中负号表示竹筏的转动方向与人跳离的方向相反。



解图 3-21

解 2:如解图 3-21 所示,在人跳离竹筏瞬间,系统有一瞬时静止的垂直转轴 x_A,设筏身

绕 x_A 轴以角速度 ω' 转动，取坐标轴 Ox 沿竹筏。

因角动量守恒，有

$$0=mv(l-x_A)+J_A\omega' \tag{2$'$}$$

式中 J_A 为筏身对 x_A 轴的转动惯量，可由平行轴定理得到

$$J_A=J_C+m'\left(\frac{l}{2}-x_A\right)^2$$

因 x_A 瞬时静止，筏心的平动速度为

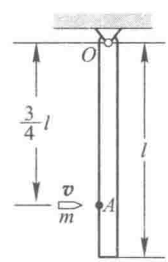
$$v_C=\left(\frac{l}{2}-x_A\right)\omega' \tag{3}$$

解(1) 式、(2)$'$式和(3) 式，可得

$$x_A=\frac{l}{3},\quad \omega'=\omega=-\frac{6m}{m'l}v$$

两种解法所得结果一致。

3-22. 一长 $l=0.40$ m 的均匀木棒，质量 $m'=1.00$ kg，可绕水平轴 O 在竖直平面内转动，开始时棒自然竖直地悬垂。现有质量 $m=8$ g 的子弹以 $v=200$ m/s 的速率从 A 点射入棒中，假定 A 点与 O 点的距离为 $3l/4$，如习题 3-22 图所示。求：(1) 棒开始运动时的角速度；(2) 棒的最大偏转角。



习题 3-22 图

分析：子弹与棒的运动由两个过程组成：1. 子弹射入瞬间，为完全非弹性的碰撞过程，由子弹和棒构成的系统所受外力对轴的力矩为零，系统对轴的角动量守恒。需注意的是在这个过程中轴对棒有作用力，不满足动量守恒条件。2. 子弹和棒一起摆动的过程，仍取子弹和棒为系统，在摆动中只有重力做功，可由动能定理求出最大摆角。若取子弹、棒和地球为系统，则因系统不受外力以及系统内无非保守内力做功，系统的机械能守恒。

解：(1) 取子弹和棒为系统。碰撞前系统对轴的角动量就是作匀速直线运动的子弹对轴的角动量，为

$$L_0=\frac{3}{4}lmv$$

碰撞后系统对轴的角动量为

$$L=J\omega=\left[m\left(\frac{3}{4}l\right)^2+\frac{1}{3}m'l^2\right]\omega$$

ω 为子弹射入棒后二者开始共同运动的角速度。

因角动量守恒,有 $$L=L_0$$

得
$$\omega=\frac{3mvl}{4J}=8.89\ \mathrm{rad/s}$$

(2) 取系统不变,因摆动过程中只有重力做功,利用动能定理求最大偏转角。设棒从竖直位置开始的最大偏转角为 θ,则棒的质心上升的高度 h_1 为

$$h_1=\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}l\cos\theta$$

子弹上升的高度 h_2 为 $$h_2=\frac{3}{4}l-\frac{3}{4}l\cos\theta$$

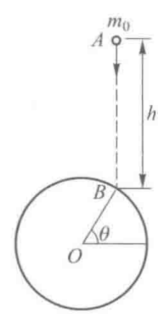
到最大摆角时,重力做负功而系统静止。对系统运用动能定理,有

$$-mgh_2-m'gh_1=0-\frac{1}{2}J\omega^2$$

得
$$\cos\theta=\frac{2m'gl+3mgl-2J\omega^2}{2m'gl+3mgl}=-0.076$$

$$\theta=94°21'$$

3-23. 如习题 3-23 图所示,质量为 m、半径为 R 的匀质圆柱,可绕其水平轴线自由转动。今有质量 m_0($m_0\ll m$)的黏性小球从 A 点自由下落,击中圆柱边缘的 B 处,已知 A、B 两点的距离为 h,OB 与水平成 θ 角。试求:(1) 小球击中圆柱后,圆柱刚开始转动时的角速度。(2) 当小球随圆柱一起转到最低点时的角速度。



习题 3-23 图

分析:黏性小球击中圆柱边缘的 B 处将随之转动。在击中圆柱边缘瞬间,小球对转轴的重力矩可略,小球、圆柱系统对转轴的角动量守恒。由此可求解问题(1)。一起转动后的角速度,可利用机械能守恒定律求解。

解:(1) 小球自 h 高度下落的速率为

$$v=\sqrt{2gh}$$

小球和圆柱对转轴的角动量守恒,有

$$m_0vR\cos\theta=(J+m_0R^2)\ \omega$$

式中 J 为匀质圆柱对质心轴的转动惯量

$$J=\frac{1}{2}mR^2$$

解得刚开始转动时的角速度为

$$\omega=\frac{m_0R\cos\theta}{J+m_0R^2}\sqrt{2gh}=\frac{2m_0\cos\theta}{(m+2m_0)R}\sqrt{2gh}$$

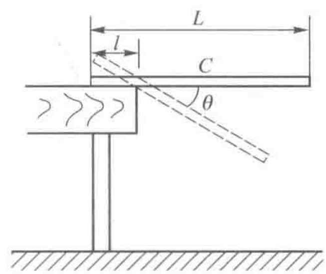
（2）取小球、圆柱和地球为系统，以小球转到的最低点为重力势能零点，并设转到最低点时的角速度为 ω'。由系统的机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}(J+m_0R^2)\ \omega^2+m_0gR(1+\sin\theta)=\frac{1}{2}(J+m_0R^2)\ \omega'^2$$

解得小球在最低点时随圆柱转动的角速度为

$$\omega'=\sqrt{\omega^2+\frac{4m_0(1+\sin\theta)g}{(m+2m_0)R}}=\sqrt{\frac{8m_0^2gh\cos^2\theta}{(m+2m_0)^2R^2}+\frac{4m_0(1+\sin\theta)g}{(m+2m_0)R}}$$

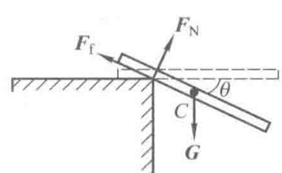
*3-24. 将一根长为 L、质量为 m 的均匀杆上长为 $l(l<L/2)$ 的一段搁在桌边，另一端用手托住，使杆处于水平状态，如习题 3-24 图所示。现释放手托的一端。试求：当杆转过多大角度时，杆开始偏离桌边？设杆与桌边间的摩擦因数为 μ。



习题 3-24 图

分析：杆的悬空部分长于搁在桌面的部分，被释放时，杆受的摩擦力随杆的倾斜角度变化。在摩擦力小于最大静摩擦力时，杆在重力作用下将以桌的边缘为轴线转动；当摩擦力达到发生滑动的临界值，即 $F_f=\mu F_N$ 时，杆开始滑离桌边。从杆绕定轴的转动和质心作圆周运动的规律入手，求得函数 $F_f=F_f(\theta)$ 后，即可求解本题。

解：杆被释放时的受力情况为：重力 G（作用于杆的质心）、摩擦力 $\boldsymbol{F}_f$ 和支持力 $\boldsymbol{F}_N$，如解图 3-24 所示。无滑动时，杆以桌的边缘为轴转动，而杆的质心以半径 $a=\left(\frac{L}{2}-l\right)$ 作圆周运动。由转动定律，有



解图 3-24

$$mga\cos\theta=J\alpha \tag{1}$$

式中 J 为杆绕桌的边缘轴的转动惯量。由平行轴定理可知

$$J=J_C+ma^2=\frac{1}{12}mL^2+ma^2$$

圆周运动的法向方程 $\quad F_f-mg\sin\theta=ma\omega^2 \quad$ (2)

圆周运动的切向方程 $\quad mg\cos\theta-F_N=ma\alpha \quad$ (3)

由(1)式、(3)式,得
$$F_N=\frac{J_C}{J}mg\cos\theta \tag{4}$$

代回(3)式,解得
$$\alpha=\frac{a}{J}mg\cos\theta=\frac{d\omega}{dt}$$

利用 $\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\omega\frac{d\omega}{d\theta}$,对上式积分,有
$$\int_0^{\omega}\omega d\omega=\int_0^{\theta}\frac{a}{J}mg\cos\theta d\theta$$

得
$$\omega^2=\frac{2a}{J}mg\sin\theta$$

利用机械能守恒,同样可得上式。

由(2)式,得
$$F_f=\frac{J+2ma^2}{J}mg\sin\theta \tag{5}$$

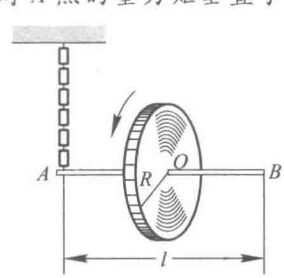
这就是要求的函数 $F_f=F_f(\theta)$。

杆开始滑动的临界条件是 $F_f=\mu F_N$,令开始滑动时的临界角为 θ_C,由(4)式、(5)式两式,得
$$\theta_C=\arctan\left[\frac{\mu J_C}{J+2ma^2}\right]=\arctan\left(\frac{\mu L^2}{10L^2-36Ll+36l^2}\right)$$

5. 刚体的进动

3-25. 半径 R 为 30 cm 的轮子,装在一根长为 $l=40$ cm 的轴的中部,并可绕其转动,轮和轴的质量共 5 kg,系统的回转半径为 25 cm,轴的一端 A 用一根链条挂起,如果原来轴在水平位置,并使轮子以 $\omega_{自}=12$ rad/s 的角速度旋转,方向如习题 3-25 图所示,求:(1) 该轮自转的角动量;(2) 作用于轴上的外力矩;(3) 系统的进动角速度,并判断进动方向。

分析:系统自转角动量的方向沿轴线由 A 向 B,对 A 点的重力矩垂直于 AB 轴向里。重力矩使系统的自转角动量获得增量,其方向与重力矩方向相同。所以,自转角动量的大小不变而方向变化,系统将绕通过链条悬挂点的竖直轴进动。从题图的上方往下看,系统的回转方向沿逆时针,回转轴垂直于 AB。



习题 3-25 图

在系统的进动中,连接 A 点的链条会有一定角度的倾斜,其拉力的水平分量提供系统质心作

圆周运动的向心力。

解:(1) 该轮(轮和轴系统)自转的角动量为

$$L=J\omega=mr_{回}^2\,\omega_{自}=5\times0.25^2\times12\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}=3.75\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

式中 $r_{回}^2$ 为系统的回转半径,m 为轮子和轴系统的质量。

(2) 轴上的外力矩即重力矩为

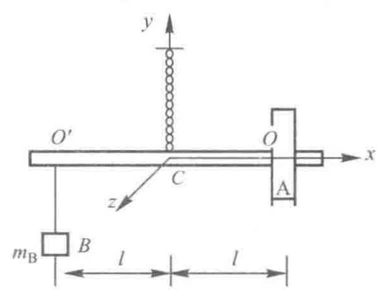
$$M=mg\,\frac{l}{2}=9.8\ \mathrm{N\cdot m}$$

(3) 进动的角速度为

$$\omega_{\mathrm{P}}=\frac{M}{J\omega_{自}\sin 90^\circ}=2.61\ \mathrm{rad/s}$$

进动方向向上。

3-26. 一简易杠杆回转仪,A 是质量为 m_A 的回转体,绕自转轴 OO' 的角动量为 $\boldsymbol{L}=L\boldsymbol{i}$,B 为平衡块,如习题 3-26 图所示。在自转轴的中点以悬绳垂直悬吊,A 和 B 距悬线的距离均为 l。该装置如以进动角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 在水平面内旋转,且 $\boldsymbol{\Omega}=\Omega\boldsymbol{j}$,试求:(1) 系统对悬点 C 的合力矩方向;(2) 平衡块的质量 m_B。



习题 3-26 图

解:(1) 悬点 C 所受合力矩为 A、B 两物体所受重力对 C 的力矩之矢量和,大小为

$$M=m_Agl-m_Bgl$$

根据 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向,由 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{L}$ 可以判断系统对悬点 C 的合力矩方向为 $-\boldsymbol{k}$。

(2) 由于 $\boldsymbol{L}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$ 相垂直,因而有

$$M=m_Agl-m_Bgl=\Omega L$$

解得

$$m_B=m_A-\frac{\Omega L}{gl}$$

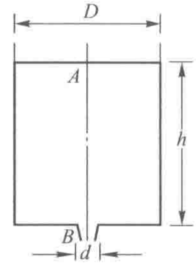
6. 流体

3-27. 一直径为 D 的大型圆筒水槽,水深为 h,底面上开有一直径为 d 的小孔。(1) 若水深不变,求水从底面小孔流出的流速;(2) 若水深随底面小孔流出的流量而减少,求任意时刻水从底面小孔流出的流量。

分析:将水槽内水的流动视为定常流动,运用伯努利方程解题。

解:如解图 3-27 所示,选水槽底为水平参考面,取流线 AB,在此流线上运用伯努利方程,对于 A、B 两点,有

$$p_A+\frac{1}{2}\rho v_A^2+\rho gh=p_B+\frac{1}{2}\rho v_B^2$$



解图 3-27

因 A、B 两点都与大气相接触,故有 $p_A=p_B=p_0$,于是有

$$v_B^2-v_A^2=2gh$$

(1) 据题意,水面的高度不变,即 $v_A\approx 0$,可得

$$v_B=\sqrt{2gh}$$

(2) 设任意时刻的水深为 y,运用伯努利方程和连续性方程,有

$$v_B^2-v_y^2=2gy$$

和
$$v_BS_B=v_yS_y,\quad 即\ v_B\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2=v_y\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2$$

可得到,任意时刻水从底面小孔流出的质量流量为

$$Q=\rho v_BS_B=\rho\pi v_B\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\rho\pi\sqrt{2gh}\frac{D^2d^2}{\sqrt{D^4-d^4}}$$

当 $D\gg d$ 时,有
$$Q=\rho\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\sqrt{2gh}$$

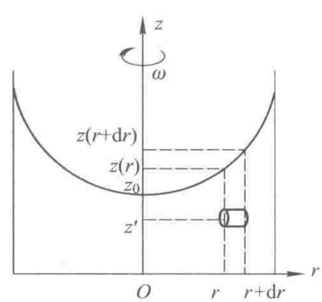
3-28. 在重力场中有一个绕中心竖直轴以匀角速度 ω 旋转着的圆筒容器,该容器内盛有密度为 ρ 的不可压缩性流体。试求:(1) 液体表面的状态;(2) 液体内的压力分布。

分析:圆筒旋转时,液体受惯性力作用向周边散开,形成稳定的旋转对称凹面。在与圆筒容器一起旋转的参考系内,液体及液面均静止不动,可利用力的平衡求得液面形状和液体内的压力分布。

解:(1) 如解图 3-28 所示,在圆筒参考系内取坐标轴 Oz 沿圆筒的转轴,径向坐标为 r,原点 O 位于筒底。设液面最低处坐标为 z_0,在流体内 z' 处取一小体元 $dm=\rho dSdr$,dS 为沿径向的截面积。由小体元沿径向的受力平衡,有

$$p(r)dS+(\rho dSdr)r\omega^2-p(r+dr)dS=0 \qquad (1)$$

式中$(\rho dSdr)r\omega^2$ 是惯性力。



解图 3-28

在竖直方向,坐标(r,z')处有平衡方程

$$p(r)-p_0-\rho g[z(r)-z']=0 \qquad (2)$$

式中 $z(r)$ 是 r 处液面的高度，p_0 为大气压强。同理，在 $(r+\mathrm{d}r, z')$ 处有

$$p(r+\mathrm{d}r)-p_0-\rho g[z(r+\mathrm{d}r)-z']=0 \tag{3}$$

式中 $z(r+\mathrm{d}r)$ 是 $r+\mathrm{d}r$ 处液面的高度。将(2)式、(3)式两式代入(1)式，即得

$$z(r+\mathrm{d}r)-z(r)=\frac{\omega^2}{g}\rho r\mathrm{d}r$$

即
$$\mathrm{d}z=\frac{r\omega^2}{g}\mathrm{d}r$$

对上式积分，有
$$\int_{z_0}^{z}\mathrm{d}z=\frac{\omega^2}{g}\int_0^r r\mathrm{d}r$$

得
$$z=z_0+\frac{\omega^2}{2g}r^2$$

这是一抛物线方程。所以，匀角速旋转圆筒内液体的表面是旋转抛物面。

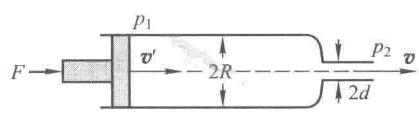
(2) 将问题(1)的结果代入(2)式，可得液体内的压力分布为

$$p(r)=p_0+\rho g\left[\frac{\omega^2}{2g}r^2+(z_0-z')\right]$$

式中 (z_0-z') 为液面下的深度，令 $h=z_0-z'$，上式可写为

$$p(r)=p_0+\frac{1}{2}\rho\omega^2r^2+\rho gh$$

3-29. 如习题 3-29 图所示为一装有喷嘴的水枪，在活塞上施加力 F 时，水枪内部的水可以从喷嘴中喷出。设水枪的半径为 R，喷嘴半径为 d。求施加力 F 时，水的喷出速度。



习题 3-29 图

分析：对水枪沿轴线上的两点：活塞和喷嘴处，运用伯努利方程和连续性方程求解。

解：
$$p_1+\frac{1}{2}\rho v'^2=p_2+\frac{1}{2}\rho v^2 \tag{1}$$

并有
$$p_1=p_0+\frac{F}{S_1},\quad p_2=p_0,\quad v'S_1=vS_2 \tag{2}$$

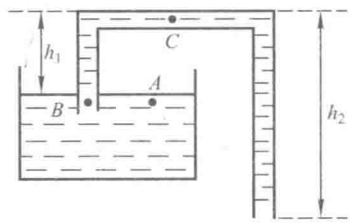
解得
$$v=\sqrt{\frac{2F}{\rho S_1\left(1-\dfrac{S_2^2}{S_1^2}\right)}}=\sqrt{\frac{2F}{\rho\pi R^2\left(1-\dfrac{d^4}{R^4}\right)}}$$

3-30. 在如图所示的虹吸管(syphon)装置中，已知 h_1 和 h_2。试问：(1) 当截

面均匀的虹吸管下端被塞住时，A、B 和 C 处的压强各为多大？（2）当虹吸管下端开启时，A、B 和 C 处的压强又各为多少？这时水流出虹吸管的速率有多大？

分析：理想流体满足连续性方程 $Sv=$常量，在截面均匀的虹吸管内部，水的流速处处相等。以出水口的水平面为参考平面，作流线连接 ABC 点至出水口，运用伯努利方程求解本题。

解：如习题 3-30 图所示，取出水口的水平面为参考平面，作流线连接 ABC 点至出水口。设 p_0为大气压，在虹吸管下端开启情况下，对此流线上运用伯努利方程，对 A、B 两点，有



习题 3-30 图

$$p_A+\frac{1}{2}\rho v_A^2+\rho g(h_2-h_1)=p_B+\frac{1}{2}\rho v_B^2+\rho g(h_2-h_1) \tag{1}$$

对 A、C 两点，有

$$p_A+\frac{1}{2}\rho v_A^2+\rho g(h_2-h_1)=p_C+\frac{1}{2}\rho v_C^2+\rho g h_2 \tag{2}$$

对 A 和出水口 D 两点，有

$$p_A+\frac{1}{2}\rho v_A^2+\rho g(h_2-h_1)=p_D+\frac{1}{2}\rho v_D^2 \tag{3}$$

式中 $p_A=p_D=p_0$。

（1）当虹吸管下端被塞住时，$v_A=v_B=v_C=0$。由（1）式和（2）式可得

$$p_A=p_B=p_0,\quad p_C=p_0-\rho g h_1$$

（2）当虹吸管下端开启时，$v_A\approx 0, v_B=v_C=v_D=v, p_A=p_D=p_0$。解上述（1）式、（2）式和（3）式，可得

$$p_A=p_0,\quad p_B=p_0-\rho g(h_2-h_1),\quad p_C=p_0-\rho g h_2$$

$$v=\sqrt{2g(h_2-h_1)}$$

第四章　相对论基础

一、教学基本要求

1. 理解狭义相对论基本原理和洛伦兹坐标变换式。

2. 理解狭义相对论的时空观及其与经典力学时空观的差异。理解同时性的相对性、长度收缩和时间膨胀概念。

3. 理解狭义相对论中质量和速度、质量和能量的关系。

二、本章习题分类

1. 相对论时间和长度的计算

2. 相对论速度变换

3. 相对论动力学问题

三、习题分析与解答

（下列各题中光速均以 $c=3.0\times10^8$ m/s 计算，假设在 $t=t'=0$ 时，两惯性参考系 S、S′原点重合。）

1. 相对论时间和长度的计算

4-1. 一粒子在 S 系中沿 Ox 轴作匀速直线运动，在 $t_1=\frac{2}{3}\times10^{-8}$ s 时刻，粒子位于 $x_1=1.0$ m 处；在 $t_2=\frac{5}{3}\times10^{-8}$ s 时刻，粒子位于 $x_2=3.0$ m 处。若另一参考系 S′相对于 S 系以恒定速度 $u=\frac{4}{5}c$ 沿 x 方向运动。求(1) 在 S′系中观测到粒子的时空坐标；(2) 粒子在这两参考系中的平均速度。

解：(1) 应用洛伦兹变换，S′系中粒子的时空坐标为

$$x_1'=\frac{x_1-ut_1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}=\frac{1-\frac{4}{5}\times3\times10^8\times\frac{2}{3}\times10^{-8}}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}\ \text{m}=-1\ \text{m}$$

$$t_1'=\frac{t_1-\frac{ux_1}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}=\frac{\frac{2}{3}\times10^{-8}-\frac{\frac{4}{5}\times1}{3\times10^8}}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}\ \text{s}=\frac{2}{3}\times10^{-8}\ \text{s}$$

$$x_2'=\frac{x_2-ut_2}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}=\frac{3-\frac{4}{5}\times3\times10^8\times\frac{5}{3}\times10^{-8}}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}\ \text{m}=-\frac{5}{3}\ \text{m}$$

$$t_2'=\frac{t_2-\frac{ux_2}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}=\frac{\frac{5}{3}\times10^{-8}-\frac{\frac{4}{5}\times3}{3\times10^8}}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}\ \text{s}=\frac{13}{9}\times10^{-8}\ \text{s}$$

(2) 粒子在 S 系中的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{3-1}{\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)\times10^{-8}}\ \text{m/s}=2\times10^8\ \text{m/s}$$

粒子在 S′系中的平均速度为

$$\bar{v}'=\frac{x_2'-x_1'}{t_2'-t_1'}=\frac{-\frac{5}{3}-(-1)}{\left(\frac{13}{9}-\frac{2}{3}\right)\times10^{-8}}\ \text{m/s}=-\frac{6}{7}\times10^8\ \text{m/s}$$

可见,粒子在 S′系中的平均速度不满足伽利略变换,

$$\bar{v}'\neq\bar{v}-\bar{u}=\left(2-\frac{4}{5}\times3\right)\times10^8\ \text{m/s}=-\frac{2}{5}\times10^8\ \text{m/s}$$

4-2. 一米尺沿 Oy 轴方向放置,有三个观测者分别在三个参考系中对尺长作了测量:(1) A 是沿着 Ox 轴的正方向以速度 $u=0.8c$ 运动的参考系;(2) B 是沿着 Oy 轴的负方向以速度 $u=0.8c$ 运动的参考系;(3) C 是沿着与 Ox 轴成 45° 角的方向以速度 $u=0.8c$ 运动的参考系。对这些观测者而言,他们各自测得的长度是多少?

分析:"长度收缩"效应发生在沿运动长度的方向上。

解: 取相对米尺静止的参考系为 S 系,在 S 系中米尺的长度为 $L_0=1.0$ m。

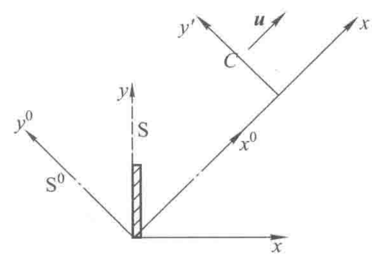
(1) 米尺沿 Oy 轴方向放置,参考系 A 沿 Ox 轴运动。在 A 的运动方向上米

尺没有相对运动,因而 A 系中观测的结果是米尺长度不变,为 $L_A = L_0 = 1\ \text{m}$。

(2) 米尺的放置方向平行于参考系 B 的运动方向,B 系中的观测结果将有"长度收缩"效应。米尺的"固有长度"$L_0 = 1.0\ \text{m}$,有

$$L_B = L_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = 1.0\times\sqrt{1-0.8^2}\ \text{m} = 0.6\ \text{m}$$

(3) 保持米尺的放置方位不变,将 S 系的坐标轴逆时针转过 45°角,以 S^0 系表示。在参考系 C 中,取坐标系的轴 $O'x'$ 和 $O'y'$ 轴分别平行于 S^0 系的 Ox^0 和 Oy^0 轴。参考系 C 以速度 u 沿 x^0x' 轴运动,如解图 4-2 所示。



解图 4-2

在相对米尺静止的 S^0 系中,米尺在 Ox^0 和 Oy^0 轴上的长度分别为 $L_x = L_0\cos 45°$ 和 $L_y = L_0\cos 45°$。在参考系 C 中,观测者将测得 L_x 有"收缩"效应,而 L_y 长度不变。

在参考系 C 的 $O'x'$ 轴测得的长度为

$$L_{x'} = L_x\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = 1.0\times\cos 45°\sqrt{1-0.8^2}\ \text{m} = 0.3\sqrt{2}\ \text{m}$$

在参考系 C 的 $O'y'$ 轴测得的长度不变为

$$L_{y'} = L_y = 1.0\times\cos 45°\ \text{m} = 0.5\sqrt{2}\ \text{m}$$

C 系中的观测者测得"米尺"的长度为

$$L_C = \sqrt{L_{x'}^2+L_{y'}^2} = \sqrt{(0.3\sqrt{2})^2+(0.5\sqrt{2})^2}\ \text{m} = 0.82\ \text{m}$$

4-3. 在惯性系 S′中静止的一个圆形轨道,其方程为

$$x'^2+y'^2=a^2,\quad z'=0$$

试求:在相对 S′系以速度 u 运动的惯性系 K 中的观察者将会测得怎样的图像?

分析:圆形轨道相对 S′静止,S 系中观测时,由"长度收缩"效应可知,该圆形在相对运动方向上的长度将变短,在垂直于运动方向上的长度不变。因此,S 系中将测得一个运动着的椭圆图形。

解: t 时刻,S′系中静止圆轨道上坐标为(x',y',z')的某点,在 S 系中的坐标值,可由洛伦兹坐标变换得到,

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-\left(\dfrac{u}{c}\right)^2}},\quad y'=y,\quad z'=z=0$$

代入 S′系的轨道方程,得

$$\frac{(x-ut)^2}{a^2\left[1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right]}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

在 S 系中,这是一个匀速运动着的椭圆,半长轴为 a,半短轴为 $a\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}$,椭圆中心 O'相对 S 系原点 O 的移动速度为 u。半短轴 $a\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}$ 正是半径 a(固有长度)在 x 方向上的运动长度。

4-4. 一根米尺静止在 S′系中,与 $O'x'$轴成 30°角。如果在 S 系中测得米尺与 Ox 轴成 45°角。试求 S′系的速率 u,又在 S 系中测得米尺的长度是多少?

解 1:已知米尺长 $L=1$ m,$\theta'=30°$,$\theta=45°$。令米尺的两端点分别为 a 和 b,在 S′系中

$$\Delta x'=x_b'-x_a'=L\cos\theta',\quad \Delta y'=y_b'-y_a'=L\sin\theta'$$

在 S 系中对 S′系中静止米尺的两端点坐标测量,必须同时进行,即 $t_a=t_b$。根据洛伦兹变换,有

$$\Delta x'=x_b'-x_a'=\frac{(x_b-x_a)-u(t_b-t_a)}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}},\quad \Delta y'=\Delta y$$

设米尺在 S 系中的长度为 l,有

$$\Delta x=x_b-x_a=l\cos\theta$$

和

$$l^2=\Delta x^2+\Delta y^2$$

解上述方程,可得

$$l=\frac{L\sin\theta'}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ m}=0.707\text{ m}$$

$$u=c\sqrt{1-\left(\frac{l\cos\theta}{L\cos\theta'}\right)^2}=c\sqrt{\frac{2}{3}}=0.816c$$

解 2:米尺在 $O'x'$轴上的投影长度为

$$\Delta x'=L\cos\theta'$$

这是固有长度,在 S 系中测得的长度为

$$\Delta x=\Delta x'\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}$$

米尺在 $O'y'$轴上的投影长度不变,为

$$\Delta y'=\Delta y=L\sin\theta'$$

在 S 系中测得米尺的长度为

$$l=\sqrt{\Delta x^{2}+\Delta y^{2}}=\sqrt{\Delta x'^{2}\left(1-\left(\frac{u}{c}\right)^{2}\right)+\Delta y^{2}}$$

在 S 系中，有
$$\tan\theta=\tan 45°=\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

由以上方程，解得 $u=\sqrt{\frac{2}{3}}c=0.816c$，　$l=\sqrt{2\Delta y^{2}}=0.707\ \mathrm{m}$

4-5. 两艘相向飞行的飞船原长都是 L，地面观测者测得飞船的长度都为 $L/2$，则两艘飞船相对地面的速度多大？其中一艘飞船中乘员测得另一艘飞船的长度是多少？

分析：利用“长度收缩”效应，可求得飞船相对地面的速度；在确定 S、S′参考系和研究对象后，利用速度变换关系，求得两飞船间的相对运动速度，再次由“长度收缩”效应求得一艘飞船中乘员测得另一艘飞船的长度。

解：由“长度收缩”效应，有 $\frac{L}{2}=L\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^{2}}$

得
$$u=\frac{\sqrt{3}}{2}c$$

将两艘飞船分别记为 A 和 B，设地面为 S 系，飞船 A 为 S′系，以速度 $u=\frac{\sqrt{3}}{2}c$ 沿 xx' 正向飞行，飞船 B 在 S 系中沿 xx' 反向飞行，其速度为 $v_x=-\frac{\sqrt{3}}{2}c$。

飞船 B 在 S′系中的速度为

$$v'_x=\frac{v_x-u}{1-\frac{v_x u}{c^{2}}}=-\frac{4\sqrt{3}}{7}c$$

B 飞船中乘员测得 A 飞船的长度是

$$L'=L\sqrt{1-\left(\frac{v'_x}{c}\right)^{2}}=\frac{1}{7}L$$

4-6. 远方的一颗星以 $0.8c$ 的速度离开我们，接受到它辐射出来的闪光按 5 昼夜的周期变化，求固定在此星上的参考系测得的闪光周期。

分析：以测量者“我们”为 S 系，星为 S′系。S′系中的闪光周期是同一地点，先后发生两事件的时间间隔，为“固有时”。在 S 系，这两事件发生在两个不同

的地点,由这两处的钟给出的时间间隔大于“固有时”。固定在S系的一个接收器所测得的闪光周期是以光速传递到的两次闪光的时间间隔。

解:设星固定在S′系的原点O',接收器静止在S系的原点O。S′系相对S系以速度$0.8c$沿x轴正向运动,x、x'轴重合,$t=t'=0$时O、O'重合,并由O'发出第一个闪光。

在S′系中,从计时开始到测得第二次闪光的时间间隔是“固有时”τ_0。由“时间延缓”,在S系的两只钟测得的时间间隔为

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \beta=\frac{u}{c}$$

在S系中,第二次闪光的发生地坐标为

$$x=u\tau=\frac{u\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

O接收到相邻二次闪光的时间间隔(即S系接收器所记录的闪光周期)是

$$\Delta t=\tau+\frac{x}{c}=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}(1+\beta)=5(\text{昼夜})$$

得
$$\tau_0=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta}\Delta t=\frac{5}{3}(\text{昼夜})$$

在星上测得其自身的闪光周期为5/3昼夜。

4-7. 假设宇宙飞船从地球射出,沿直线到达月球,距离是3.84×10^8 m,它的速率在地球上被量得为$0.30c$。根据地球上的时钟,这次旅行花多长时间?根据宇宙飞船所在参考系的测量,地球和月球的距离是多少?怎样根据这个算得的距离,求出宇宙飞船上时钟所读出的旅行时间?

分析:以地球为S系,月球位于S系Ox轴上,地-月距离在S系中是“固有长度”。飞船为S′系,相对S系沿x轴正方向运动,飞船的钟记录“离开地球”和“到达月球”两事件的时间间隔为“固有时”。

解:设地球为S系,位于坐标原点O,月球位于x轴上L_0处。飞船为S′系并位于O',$t=t'=0$时OO'重合。地球上的时钟显示的旅行时间为

$$\Delta t=\frac{L_0}{u}=\frac{3.84\times10^8}{0.3\times3\times10^8}\ \text{s}=4.27\ \text{s}$$

在飞船上测量地、月距离L时,S系的L_0是固有长度,由“长度收缩”效应,有

$$L=L_0\sqrt{1-\beta^2}=3.66\times10^8\ \text{m}$$

飞船上的时钟显示的旅行时间为

$$\Delta t'=\frac{L}{u}=\frac{3.66\times10^{8}}{0.3\times3\times10^{8}}\ \mathrm{s}=4.07\ \mathrm{s}$$

用“时间延缓”效应，同样可验证 $\Delta t'<\Delta t$。

4-8. 在 S 系中观察到两个事件同时发生在 Ox 轴上，其间距离是 1 m，在 S′系中观察这两个事件之间的空间距离是 2 m，求在 S′系中这两个事件的时间间隔。

分析：在 S 系中同时测得的两事件发生地间距 $\Delta x=1$ m 是“运动长度”，两事件在 S′系中的距离 $\Delta x'=2$ m 是“固有长度”。根据“长度收缩”效应，可得到两参考系相对运动的速度 u。由于“同时性的相对性”，在 S 系中同时发生的两事件，在 S′系中不同时，$\Delta t'$ 可由洛伦兹变换求得。

解：设 S′系相对于 S 系以速度 u 沿 x 轴正向运动。根据“长度收缩”效应，有

$$\Delta x'=\frac{\Delta x}{\sqrt{1-\beta^{2}}},\quad \beta=\frac{u}{c}$$

得 S′相对于 S 的运动速度

$$u=c\sqrt{1-\left(\frac{\Delta x}{\Delta x'}\right)^{2}}=c\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}c$$

由洛伦兹变换

$$\Delta t'=\frac{\Delta t-\frac{u}{c^{2}}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^{2}}}$$

式中 $\Delta t=0$，得两事件在 S′系中的时间间隔为

$$\Delta t'=\left|\frac{-\frac{u}{c^{2}}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^{2}}}\right|=\frac{1}{c}\sqrt{(\Delta x')^{2}-(\Delta x)^{2}}=5.77\times10^{-9}\ \mathrm{s}$$

4-9. 在 S 系中观察到的两事件发生在空间同一地点，第二事件发生在第一事件以后 2 s。在另一相对 S 系运动的 S′系中观察到第二事件是在第一事件 3 s 之后发生的，求在 S′系中测量两事件之间的位置距离。

解：设 S′系相对于 S 系以速度 u 沿 x 轴正向运动。两事件发生在 S 系的同一地点，其时间间隔 Δt 是“固有时”，由“时间延缓”，得

$$\Delta t'=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^{2}}}=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^{2}}}\tag{1}$$

将 $\Delta t=2\ \text{s}$，$\Delta t'=3\ \text{s}$ 代入上式，可得 S′系相对 S 系的运动速度 u。

两事件在 S′系中先后发生在不同地点，由洛伦兹变换得两事件的空间间隔为

$$\Delta x'=x'_2-x'_1=\frac{\Delta x-u\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2}$$

令 $\Delta x=0$，并解（1）式和（2）式，得

$$\Delta x'=-u\Delta t'=-c\sqrt{(\Delta t')^2-(\Delta t)^2}=-6.71\times10^8\ \text{m}$$

在 S′系中测量两事件的位置距离为 6.71×10^8 m。若 S′系相对 S 系以速度 u 沿 x 轴负向运动，该距离值不变。

4-10. 在地面上有一长 100 m 的跑道，运动员从起点跑到终点，用时 10 s。现从以 $0.8c$ 速率沿跑道向前飞行的飞船参考系中观测：（1）跑道有多长？（2）求运动员跑过的距离和所用的时间；（3）运动员的平均速度多大？

分析：对地面参考系 S 而言，跑道长度就是“固有长度”，在飞船参考系 S′测得的该长度会“缩短”。把运动员视作质点，问题可归结为：将 S 系中运动质点的时空坐标，变换为 S′系的时空坐标，可由洛伦兹变换求解。

解：已知地面参考系 S 中“固有长度”$l_0=\Delta x=100$ m，运动员起跑和到达终点两事件的时间间隔 $\Delta t=10$ s。

（1）由“长度收缩”效应，有

$$l'=l_0\sqrt{1-\beta^2},\quad \beta=\frac{u}{c}=0.8$$

可解得，飞船测得跑道长为　$l'=100\sqrt{1-0.8^2}\ \text{m}=60\ \text{m}$

（2）由洛伦兹变换，在飞船参考系中，运动员起跑和到达终点两事件的

空间间隔为　$$\Delta x'=\frac{\Delta x-u\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{100-0.8c\times10}{\sqrt{1-0.8^2}}\ \text{m}=-4.0\times10^9\ \text{m}$$

时间间隔为　$$\Delta t'=\frac{\Delta t-\dfrac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{10-\dfrac{0.8}{c}\times100}{\sqrt{1-0.8^2}}\ \text{s}=16.6\ \text{s}$$

在飞船参考系中观测的结果是：运动员沿 $O'x'$ 反方向运动（式中负号）；起跑和到达终点两事件发生地点的间距，远大于在“同时测量”要求下所得的跑道长度；$\Delta t'>0$ 表明，两个具有因果关联事件的时间顺序不会因参考系而颠倒。

（3）运动员在地面参考系 S 中的平均速度

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{100}{10}\ \text{m/s}=10\ \text{m/s}$$

运动员在飞船参考系 S′中的平均速度

$$\overline{v}'=\frac{\Delta x'}{\Delta t'}=\frac{-4.0\times10^{9}}{16.6}\ \mathrm{m/s}=-2.4\times10^{8}\ \mathrm{m/s}$$

利用洛伦兹速度变换式,可得相同结果

$$\overline{v}'=\frac{\overline{v}-u}{1-\frac{\overline{v}u}{c^{2}}}=\frac{10\ \mathrm{m/s}-0.8c}{1-\frac{10\mathrm{m/s}\times0.8c}{c^{2}}}=-2.4\times10^{8}\ \mathrm{m/s}$$

2. 相对论速度变换

4-11. 地球上一观察者,看见一飞船 A 以速度 2.5×10^{8} m/s 从他身边飞过,另一飞船 B 以速度 2.0×10^{8} m/s 跟随 A 飞行。求:(1) A 上的乘客看到 B 的相对速度;(2) B 上的乘客看到 A 的相对速度。

解:(1) 设地球为 S 系,飞船 A 为 S′系,以飞船 B 为运动质点。已知 S′系相对 S 系的速度为 $u=2.5\times10^{8}$ m/s,飞船 B 在 S 系中的速度为 $v_x=2.0\times10^{8}$ m/s。根据洛伦兹速度变换,飞船 B 在 S′系中的速度为

$$v_x'=\frac{v_x-u}{1-\frac{v_x u}{c^{2}}}=\frac{(2.0-2.5)\times10^{8}}{1-\frac{2.0\times10^{8}\times2.5\times10^{8}}{(3\times10^{8})^{2}}}\ \mathrm{m/s}=-1.125\times10^{8}\ \mathrm{m/s}$$

飞船 A 上的乘客观测到飞船 B 向后方远离而去。

(2) 设地球为 S 系,飞船 B 为 S′系,以飞船 A 为运动质点。已知 S′系相对 S 系的速度为 $u=2.0\times10^{8}$ m/s,飞船 A 在 S 系中的速度为 $v_x=2.5\times10^{8}$ m/s。与解(1) 方法相同,飞船 A 在 S′系中的速度为

$$v_x'=\frac{v_x-u}{1-\frac{v_x u}{c^{2}}}=\frac{(2.5-2.0)\times10^{8}}{1-\frac{2.5\times10^{8}\times2.0\times10^{8}}{(3\times10^{8})^{2}}}\ \mathrm{m/s}=1.125\times10^{8}\ \mathrm{m/s}$$

飞船 B 上的乘客观测到飞船 A 向前方远去。

4-12. 地球上的观测者发现一艘以速率 $u=0.6c$ 向东航行的宇宙飞船,将在 5 s 后同一个以速率 $v=0.8c$ 向西飞行的彗星相碰。(1) 飞船中的人们测得彗星将以多大速率向他们靠近?(2) 按照飞船上的钟,还有多少时间可供他们离开原来的航线?

分析:在确定地球、飞船和彗星三者关系后,可由洛伦兹速度变换求解问题(1)。“发现飞船”和“与彗星相碰”两事件的时间间隔,对地球参考系而言是发生在两地;

对飞船参考系则在一地点发生。因而,问题(2)可由“时间延缓”效应求解。

解:设地球为 S 参考系,飞船为 S′参考系。已知彗星在 S 系中的速度为 $v=-0.8c$。

(1) 由洛伦兹速度变换,在飞船参考系 S′中彗星的速度为

$$v'_x=\frac{v_x-u}{1-\dfrac{v_x u}{c^2}}=\frac{(-0.8-0.6)c}{1+0.8\times0.6}=-0.95c$$

(2) 对飞船参考系,“发现飞船”和“与彗星相碰”两事件的时间间隔是“固有时”,由“时间延缓”效应,有

$$\Delta t'=\Delta t\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}=5\sqrt{1-0.6^2}\ \text{s}=4\ \text{s}$$

对问题(2)的另解:设“发现飞船”时 S、S′系原点 O、O'重合,$t=t'=0$。在 S 系中,发生 O'“与彗星相碰”事件的地点为 $x=ut$,据洛伦兹变换,有

$$t'=\frac{t-\dfrac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{u}{c}\right)^2}}=\frac{t-\dfrac{u^2t}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{u}{c}\right)^2}}=\frac{5(1-0.6^2)}{\sqrt{1-0.6^2}}\ \text{s}=4\ \text{s}$$

4-13. 一光源在 S′系的原点 O'发出一光束,其传播方向在 $x'y'$平面内并与 $O'x'$轴成 θ'角。试求在 S 系中测得此光束的传播方向,并证明在 S 系中此光束的速率仍为 c。

解:光束在 S′系中的传播速度 $\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{c}$,沿 $O'x'$的分量为 $v'_x=c\cos\theta'$,沿 $O'y'$的分量为 $v'_y=c\sin\theta'$。设 S′系相对 S 系以 u 沿 Ox 运动。由洛伦兹速度变换,在 S 系中光速的两个分量分别为

$$v_x=\frac{v'_x+u}{1+\dfrac{v'_x u}{c^2}}=\frac{c\cos\theta'+u}{1+\dfrac{c\cos\theta' u}{c^2}}=\frac{c(\cos\theta'+\beta)}{1+\beta\cos\theta'}$$

$$v_y=\frac{v'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\dfrac{v'_x u}{c^2}}=\frac{c\sin\theta'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\dfrac{c\cos\theta' u}{c^2}}=\frac{c\sin\theta'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta'},\quad \beta=\frac{u}{c}$$

此光束在 S 系中的传播方向为

$$\theta=\arctan\frac{v_y}{v_x}=\arctan\frac{\sin\theta'\sqrt{1-\beta^2}}{\cos\theta'+\beta}$$

在 S 系中此光束的传播速率为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\frac{c}{1+\beta\cos\,\theta'}\sqrt{(\cos\,\theta'+\beta)^2+\sin^2\,\theta'(1-\beta^2)}=c$$

3. 相对论动力学问题

4-14. 设航天器的静止质量为 100 t,当它以速度 $v=11.2$ km/s 飞行时,它的质量增加了多少?

分析:利用相对论动能关系和 $v\ll c$ 时的动能表式求解。

解:据相对论动能关系,有

$$E_k=mc^2-m_0c^2=(m-m_0)c^2=\Delta mc^2$$

在 $v\ll c$ 时,由质速关系,将上式展开,有

$$E_k=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)=m_0c^2\left[\left(1+\frac{v^2}{2c^2}+\frac{3v^4}{8c^4}+\cdots\right)-1\right]\approx\frac{1}{2}m_0v^2$$

由此,得

$$\Delta m=\frac{m_0v^2}{2c^2}=\frac{100\times10^3\times(11.2\times10^3)^2}{2\times(3\times10^8)^2}\ \text{kg}=7\times10^{-5}\ \text{kg}$$

这是个可以忽略的量。

4-15. 某人测得一静止棒长为 l,质量为 m,于是求得此棒线密度为 $\rho=\frac{m}{l}$。假定此棒以速度 v 在棒长方向上运动,此人再测棒的线密度应为多少?若棒在垂直长度方向上运动,它的线密度又为多少?

分析:本题涉及两个相对论效应:沿棒长方向运动时的"长度收缩"效应和运动物体的"质速关系"。

解:设棒沿 x 轴放置,棒相对观测者沿 x 轴运动。

(1) 棒长 l 是固有长度.观察者测得棒在运动方向(x 轴)的长度为

$$l'=l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{1}$$

运动质量为

$$m'=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2}$$

则线密度为

$$\rho'=\frac{m'}{l'}=\frac{m}{l\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}=\frac{\rho}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

(2) 棒在垂直于长度的方向上(沿 y 轴或 z 轴)运动时,观察者测得的长度不变,即 $l''=l$,但棒的质量即运动质量仍由(2)式所示。所以,线密度为

$$\rho''=\frac{m''}{l''}=\frac{m}{l\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\frac{\rho}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

4-16. 设电子的速度为(1) 1.0×10^8 m/s;(2) 2.0×10^8 m/s,试计算电子的动能各是多少?如用经典力学公式计算电子动能又各为多少?

解:设 $v_1=1.0\times10^8$ m/s,$v_2=2.0\times10^8$ m/s,取电子的静止质量 $m_0=9.11\times10^{-31}$ kg。

由相对论的动能表达式,得

$$E_{K1}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v_1^2}{c^2}}}-m_0c^2=4.97\times10^{-15}\ \text{J}$$

$$E_{K2}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v_2^2}{c^2}}}-m_0c^2=28.0\times10^{-15}\ \text{J}$$

用经典力学公式 $E_K=\dfrac{1}{2}m_0v^2$,得

$$E_{K1}=\frac{1}{2}m_0v_1^2=4.56\times10^{-15}\ \text{J}$$

$$E_{K2}=\frac{1}{2}m_0v_2^2=18.2\times10^{-15}\ \text{J}$$

4-17. 要使电子的速率从 1.2×10^8 m/s 增加到 2.4×10^8 m/s,必须做多少功?

分析:在相对论中,动能定理成立,但动能表达式与经典表达式不同。

解:由相对论的动能定理,有

$$\begin{aligned}A&=E_{k2}-E_{k1}=(m_2c^2-m_0c^2)-(m_1c^2-m_0c^2)\\&=(m_2-m_1)c^2=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}\right)\\&=9.11\times10^{-31}\times(3\times10^8)^2\times0.56\ \text{J}=4.6\times10^{-14}\ \text{J}\end{aligned}$$

4-18. 两个氘核组成一个氦核。试计算氦核放出的结合能(用 J 和 eV 表

示）。已知它们的静止质量分别为：氘核 $m_D=2.013\ 55\ \mathrm{u}$，氦核 $m_{He}=4.001\ 5\ \mathrm{u}$，$1\ \mathrm{u}=1.66\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$。

解：

$$\begin{aligned}\Delta E&=(\Delta m)c^2=(2m_D-m_{He})c^2\\&=(2\times2.013\ 55\mathrm{u}-4.001\ 5\mathrm{u})c^2\\&=(2\times2.013\ 55-4.001\ 5)\times1.66\times10^{-27}\times(3\times10^8)^2\ \mathrm{J}\\&=3.825\times10^{-12}\ \mathrm{J}=23.88\ \mathrm{MeV}\end{aligned}$$

4-19. 太阳由于向四面空间辐射能量，辐射功率为 3.6×10^{26} W，求太阳每秒钟损失多少质量？

分析：太阳的辐射功率，即单位时间内辐射的能量。由总能量守恒可知，辐射的能量对应系统的静止质量变化。

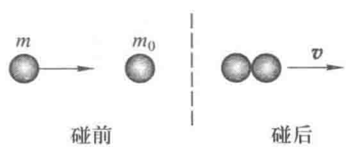
解：由

$$P=\frac{\Delta E}{\Delta t}=\frac{(\Delta m)c^2}{\Delta t}$$

可得

$$\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{P}{c^2}=\frac{3.6\times10^{26}}{(3\times10^8)^2}\ \mathrm{kg/s}=4.0\times10^9\ \mathrm{kg/s}$$

4-20. 如习题 4-20 图所示，一个静止质量为 m_0，动能为 $5m_0c^2$ 的粒子与另一个静止质量也为 m_0 的静止粒子发生完全非弹性碰撞。碰撞后复合粒子的静止质量为 m_0'，并以速度 v 运动。（1）碰撞前系统的总动量是多少？（2）碰撞前系统的总能量是多少？（3）复合粒子的速度 v 是多少？（4）给出静止质量为 m_0' 与 m_0 之间的关系。



习题 4-20 图

分析：在两粒子的碰撞过程中，系统的总能量和总动量守恒。应用相对论动量-能量关系和系统总能量求解。

解：由运动粒子的总能量与动量关系

$$E^2=(pc)^2+(m_0c^2)^2 \tag{1}$$

可得，碰撞前运动粒子的动量为

$$p=\frac{1}{c}\sqrt{E^2-(m_0c^2)^2} \tag{2}$$

其中，总能量 E 为

$$E=E_k+m_0c^2 \tag{3}$$

式中 E_k 为运动粒子的动能。

（1）设碰撞前系统内运动粒子的总能量为 E_{10}，据题意和（3）式，有

$$E_{10}=5m_0c^2+m_0c^2=6m_0c^2$$

由（2）式可知，碰撞前运动粒子的总动量 p_{10} 为

$$p_{10}=\frac{1}{c}\sqrt{E_{10}^2-(m_0c^2)^2}=\sqrt{35}\,m_0c$$

由于碰撞前系统内另一粒子静止，$p_{20}=0$。所以，碰撞前粒子系统的总动量为

$$p_0=p_{10}+p_{20}=\sqrt{35}\,m_0c$$

（2）碰撞前系统的总能量 E_0 应为两个粒子的总能量之和，即

$$E_0=E_{10}+E_{20}=6m_0c^2+m_0c^2=7m_0c^2$$

（3）设碰撞后复合粒子的动量为 p，总能量为 E，质量为 m'，运动速度为 v。由动量守恒，有

$$p=m'v=p_0$$

由总能量守恒，有

$$E=m'c^2=E_0$$

所以

$$v=\frac{p}{E}c^2=\frac{p_0}{E_0}c^2=\frac{\sqrt{35}\,m_0c}{7m_0c^2}c^2=0.85c$$

（4）复合粒子的静止质量为 m_0'，由（1）式得

$$m_0'c^2=\sqrt{E^2-(pc)^2}=\sqrt{E_0^2-(p_0c)^2}=\sqrt{14}\,m_0c^2$$

复合粒子的静止质量为

$$m_0'=\sqrt{14}\,m_0$$

由 $m_0'>2m_0$ 可知，碰撞前后粒子系统的静止质量不守恒，碰撞前运动粒子的部分动能转化为复合粒子的质量。

4-21. 质量为 m_0 的一个受激原子，静止在参考系 S 中，因发射一个光子而反冲，原子的内能减少了 ΔE，而光子的能量为 $h\nu$。试证：

$$h\nu=\Delta E\left(1-\frac{\Delta E}{2m_0c^2}\right)$$

分析：在受激原子发射一个光子后反冲的整个过程中，系统的总能量和总动量守恒。原子内能的减少量 ΔE 对应原子静能之差。

解：设反冲原子的质量为 m，静止质量为 m'，运动能为 mc^2，反冲速度为 v。

由能量守恒可知

$$m_0c^2=h\nu+mc^2 \tag{1}$$

由动量守恒可知

$$0=p_{原子}+p_{光子}=-mv+\frac{h\nu}{c} \tag{2}$$

对反冲原子，运用能量-动量关系，有

$$(mc^2)^2=(mv)^2c^2+m'^2c^4 \tag{3}$$

式中

$$m=\frac{m'}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \beta=\frac{v}{c}$$

原子内能的变化

$$\Delta E=(m_0-m')c^2 \tag{4}$$

将(1)式和(2)式代入(3)式，消去 m，得

$$(m_0^2-m'^2)\ c^2=2m_0h\nu$$

化简上式并利用(4)式，得

$$\Delta E(m_0+m')=2m_0h\nu$$

即

$$h\nu=\frac{\Delta E}{2}\left(1+\frac{m'}{m_0}\right)=\Delta E\left(1-\frac{\Delta E}{2m_0c^2}\right)$$

由结果可见，发射光子的能量小于原子内能的变化量 ΔE(原子静能之差)。其原因在于 ΔE 除发射光子外，还有一部分转换为反冲原子的动能。

4-22. 在北京正负电子对撞机中，电子可以被加速到 2.8 GeV(1 GeV = 10^9 eV)，(1) 这种电子的速率和光速相比相差多少？(2) 这样的一个电子动量多大？(3) 这种电子在周长为 240 m 的储存环内绕行时，它受的向心力多大？需要多大的偏转磁场(利用洛伦兹公式 $F=qvB$ 计算)。

分析：电子被加速所获得的能量为动能 E_k，本题中的 E_k 远大于电子的静止能 $E_0=0.512$ MeV。

解：(1) 设加速电子的速度为 v，已知动能 $E_k=2.8\times10^9$ eV，由相对论动能关系和质速关系，有

$$E_k=E-E_0=mc^2-m_0c^2$$

式中

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \beta=\frac{v}{c}$$

由于 $E_k\gg E_0$，故有

$$E_k\approx E=mc^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

可得

$$v=c\sqrt{1-\frac{E_0^2}{E_k^2}}$$

所以，有

$$c-v=c\left(1-\sqrt{1-\frac{E_0^2}{E_k^2}}\right)=3\times10^8\times\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{5.12\times10^5}{2.8\times10^9}\right)^2}\right)\ \text{m/s}=5\ \text{m/s}$$

这种电子的速率已非常接近光速。

(2) 由电子的总能量与动量关系

$$E^2=(pc)^2+E_0^2$$

得电子动量

$$p=\frac{1}{c}\sqrt{E^2-E_0^2}\approx\frac{1}{c}E_k$$

$$=\frac{1.6\times10^{-19}}{3\times10^8}\times2.8\times10^9\ \text{kg}\cdot\text{m/s}=1.49\times10^{-18}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

（3）周长为 $L=240\ \mathrm{m}$，储存环的半径为

$$R=\frac{L}{2\pi}$$

电子受的向心力为

$$F=m\frac{v^2}{R}\approx\frac{mc^2}{R}\approx\frac{2\pi E_k}{L}$$

$$=\frac{2\pi\times1.6\times10^{-19}\times2.8\times10^9}{240}\ \mathrm{N}=1.17\times10^{-11}\ \mathrm{N}$$

由洛伦兹力公式，得 $$B=\frac{F}{qv}\approx\frac{F}{qc}=\frac{1.17\times10^{-11}}{1.6\times10^{-19}\times3\times10^8}\ \mathrm{T}=0.24\ \mathrm{T}$$

第二篇

热学

第五章　气体动理论
第六章　热力学基础

第五章　气体动理论

一、教学基本要求

1. 了解气体分子热运动的统计规律和统计研究方法。了解宏观量与微观量之间的区别与联系。

2. 掌握平衡状态概念,理想气体物态方程。

3. 理解压强、温度、内能概念,能量按自由度均分定理。

4. 理解麦克斯韦速率分布率,三种统计速率。了解玻耳兹曼分布律。

5. 了解气体分子平均碰撞频率和平均自由程概念。了解真实气体、范德瓦耳斯方程。

二、本章习题分类

1. 气体物态方程
2. 理想气体的压强、温度和内能
3. 气体分子的统计规律
4. 分子平均碰撞频率和平均自由程
5. 范德瓦耳斯方程

三、习题分析与解答

1. 气体物态方程的应用

5-1. 有一水银气压计,当水银柱为 0.76 m 高时,管顶离水银液面为 0.12 m,管的截面积为 $2.0\times10^{-4}\ m^2$。当有少量氦气混入水银管内顶部,水银柱高下降为 0.60 m,此时温度为 27 ℃。试计算有多少质量的氦气在管顶?(氦气的摩尔质量为 0.004 kg/mol,0.76 m 水银柱压强为 1.013×10^5 Pa。)

解:设管内氦气的压强为 p,管的截面为 S,水银的密度为 ρ。已知大气压强 $p_0=1.013\times10^5$ Pa,氦气混入前、后的水银柱高度分别为 $l_1=0.76$ m 和 $l_2=0.60$ m。氦气混入前,由水银柱受力平衡,有

$$p_0S=\rho gSl_1$$

可得水银密度 $$\rho=\frac{p_0}{gl_1}$$

氦气混入后，由水银柱受力平衡，有

$$p_0S=pS+\rho gSl_2$$

可得 $$p=\rho g(l_1-l_2)=\frac{p_0}{l_1}(l_1-l_2)$$

氦气占据体积 $V=V_0+\Delta V=S(l_0+l_1-l_2)$

式中 $l_0=0.12$ m。由理想气体物态方程

$$pV=\frac{m}{M}RT$$

得 $$\begin{aligned} m&=M\frac{pV}{RT}=M\frac{p_0S(l_1-l_2)(l_0+l_1-l_2)}{l_1RT}\\ &=0.004\times\frac{1.33\times10^5\times2\times10^{-4}\times(0.76-0.60)\times(0.12+0.76-0.60)}{0.76\times8.31\times(273+27)}\ \text{kg}\\ &=1.92\times10^{-6}\ \text{kg}\end{aligned}$$

5-2. 一体积为 1.0×10^{-3} m^3的容器中，含有 4.0×10^{-5} kg 氦气和 4.0×10^{-5} kg 氢气，它们的温度为 30 ℃，试求容器中混合气体的压强。

分析：平衡状态下混合气体（内部无化学反应）的总压强为各组分理想气体分压强之和。

解：设氦气和氢气的分压强分别为 p_1和 p_2。已知氦气和氢气的质量为 $m_1=m_2=4.0\times10^{-5}$ kg，摩尔质量分别为 $M_{He}=4\times10^{-3}$ kg/mol，$M_{H_2}=2\times10^{-3}$ kg/mol。由理想气体物态方程，得

$$p_1V=\frac{m_1RT}{M_{He}},\qquad p_2V=\frac{m_2RT}{M_{H_2}}$$

总压强 $$\begin{aligned} p&=p_1+p_2=\frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{M_{He}}+\frac{m_2}{M_{H_2}}\right)=\frac{RTm_1}{V}\left(\frac{1}{M_{He}}+\frac{1}{M_{H_2}}\right)\\ &=\frac{8.31\times(273+30)\times4.0\times10^{-5}}{1.0\times10^{-3}}\left(\frac{1}{4\times10^{-3}}+\frac{1}{2\times10^{-3}}\right)\ \text{Pa}\\ &=7.56\times10^4\ \text{Pa}\end{aligned}$$

5-3. 一个封闭的圆筒，内部被导热的、不漏气的可移动活塞隔为两部分。最初，活塞位于筒中央，圆筒两侧的长度 $l_1=l_2$。当两侧各充以 T_1、p_1与 T_2、p_2的相同气体后，问平衡时活塞将在什么位置上（即 l_1/l_2是多少）？已知 $p_1=1.013\times$

10^5 Pa, $T_1=680$ K, $p_2=2.026\times10^5$ Pa, $T_2=280$ K。

分析：当导热活塞两侧的气体处于平衡状态时，有相同的温度和压强。

解：设活塞左、右两侧充入气体的质量分别为 m_1 和 m_2，初态分别为 $(p_1、V_1、T_1)$ 和 $(p_2、V_2、T_2)$，平衡时的终态分别为 $(p、V_1'、T)$ 和 $(p、V_2'、T)$，气体的摩尔质量为 M，活塞面积为 S。根据理想气体物态方程，有

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{m_1}{M}R=\frac{pV_1'}{T},\quad \frac{p_2V_2}{T_2}=\frac{m_2}{M}R=\frac{pV_2'}{T}$$

因 $l_1=l_2$，有 $V_1=V_2$。可得

$$\frac{V_1'}{V_2'}=\frac{l_1'S}{l_2'S}=\frac{p_1T_2}{p_2T_1}$$

所以，有

$$\frac{l_1'}{l_2'}=\frac{p_1T_2}{p_2T_1}=\frac{7}{34}$$

$l_1'<l_2'$，活塞移向左侧。

5-4. 一高压钢瓶的容积为 32 L，储有压强为 1.3×10^7 Pa 的氧气，按规定瓶内氧气降到 10^6 Pa 时就得充气，以免其他气体混入而必须洗瓶。今有一车间每天需用 10^5 Pa 的氧气 400 L，问一瓶氧气能用几天？（温度保持不变）

分析：利用等温条件下理想气体的物态方程，将新瓶氧气总量、瓶内应剩余量和每天使用量，按质量或各压强时的体积换算后求解。

解：按氧气质量换算求解。设新瓶氧气总质量为 m_0，压强为 p_0，瓶内按规定应剩余氧气质量为 m_s，压强为 p_s，两者都占据瓶内空间 V；每天使用氧气质量为 m'，压强和体积分别为 p' 和 V'。根据理想气体物态方程，在温度为 T 时，有

$$m'=M\frac{p'V'}{RT}$$

可供使用量为

$$\Delta m=m_0-m_s=M\frac{(p_0-p_s)V}{RT}$$

可以使用的天数为

$$\frac{\Delta m}{m'}=\frac{m_0-m_s}{m'}=\frac{(p_0-p_s)V}{p'V'}$$

$$=\frac{(1.3\times10^7-1\times10^6)\times32}{1\times10^5\times400}\text{天}=9.6\text{ 天}$$

2. 理想气体的压强、温度和内能

5-5. 氢气分子的质量 3.35×10^{-27} kg，如果单位体积内的分子数 $n=1.033\times$

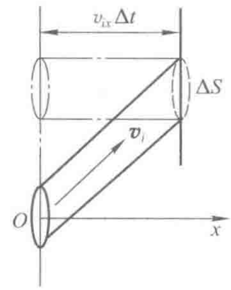
$10^{25}\ m^{-3}$,这些氢分子以与墙面法线成 45°角的方向、$v=1.7\times10^3$ m/s 的速率对墙面作完全弹性碰撞。试求这些氢气分子作用在墙面上的压强。(提示:在墙面上取面元 ΔS,以 ΔS 为底、v 为轴线、$v\Delta t$ 为高,作一斜柱体,求出柱体内的分子数,这就是在 Δt 内与 ΔS 相碰的分子数)

分析:分子持续不断地与墙面作完全弹性碰撞,对墙面施加了平均冲力,垂直作用于单位面积上的平均冲力形成了压强。

解:设氢气分子质量为 m_i,速度为 $\boldsymbol{v}_i$,撞击的墙面面积为 ΔS。一个氢分子一次垂直撞墙后,传递给墙面的动量为

$$\Delta p=2m_iv_{ix}=2m_iv_i\cos\theta$$

在 Δt 时间内,分子平移距离为 $v_{ix}\Delta t$。在墙上以 ΔS 为底、$v_{ix}\Delta t$ 为高,作一柱体,如解图 5-5 中虚线所示。这柱体内的全部分子在 Δt 时间内都将撞击墙面的 ΔS。柱体内的分子数为



解图 5-5

$$n\Delta V=nv_{ix}\Delta t\Delta S$$

在 Δt 时间内传递给墙面的动量为

$$\Delta P=n\Delta V\Delta p=nv_{ix}\Delta t\Delta S\Delta p=\Delta F\Delta t$$

式中 ΔF 为 Δt 时间内,柱体内所有分子施于墙面的平均冲力。这些氢气分子作用在墙面上的压强为

$$\frac{\Delta F}{\Delta S}=\frac{\Delta P}{\Delta t\Delta S}=nv_{ix}\Delta p=2nm_iv_{ix}^2=2nm_iv_i^2\cos^2\theta$$

$$=2\times1.0\times10^{25}\times3.35\times10^{-27}\times(1.7\times10^3)^2\times\cos^2 45°\ \text{Pa}=1.0\times10^5\ \text{Pa}$$

5-6. 温度为 27 ℃的氦气、氧气和氨气。试求:(1) 一个分子(设为刚性分子)的平均平动动能和平均总动能;(2) 1 g 的这种气体的内能;(3) 1 mol 的这种气体的内能。

解:(1) 一个分子的平均平动动能 $\bar{\varepsilon}_t$ 和平均总动能 $\bar{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}_t+\bar{\varepsilon}_r$

氦气:$i=3$, $\bar{\varepsilon}_t=\bar{\varepsilon}=\dfrac{3}{2}kT=\dfrac{3}{2}\times1.38\times10^{-23}\times(273+27)\ \text{J}=6.21\times10^{-21}\ \text{J}$

氧气:$i=t+r=3+2=5$, $\bar{\varepsilon}_t=\dfrac{3}{2}kT=6.21\times10^{-21}\ \text{J}$

$$\bar{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}_t+\bar{\varepsilon}_r=\frac{5}{2}kT=10.35\times10^{-21}\ \text{J}$$

氨气:$i=t+r=3+3=6$, $\bar{\varepsilon}_t=\dfrac{3}{2}kT=6.21\times10^{-21}\ \text{J}$

$$\bar{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}_t+\bar{\varepsilon}_r=\frac{6}{2}kT=12.42\times10^{-21}\ \mathrm{J}$$

（2）$m=1$ g 的这种气体的内能

氦气：　$E_{He}=\frac{m}{M_{He}}\frac{3}{2}RT=\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}\times8.31\times300\ \mathrm{J}=0.935\times10^3\ \mathrm{J}$

氧气：　$E_{O_2}=\frac{m}{M_{O_2}}\frac{5}{2}RT=\frac{1}{32}\times\frac{5}{2}\times8.31\times300\ \mathrm{J}=0.195\times10^3\ \mathrm{J}$

氨气：　$E_{NH_3}=\frac{m}{M_{NH_3}}\frac{6}{2}RT=\frac{1}{17}\times\frac{6}{2}\times8.31\times300\ \mathrm{J}=0.440\times10^3\ \mathrm{J}$

（3）1 mol 的这种气体的内能

氦气：　$E_{He}=1\ \mathrm{mol}\times\frac{3}{2}RT=\frac{3}{2}\times8.31\times300\ \mathrm{J}=3.74\times10^3\ \mathrm{J}$

氧气：　$E_{O_2}=1\ \mathrm{mol}\times\frac{5}{2}RT=\frac{5}{2}\times8.31\times300\ \mathrm{J}=6.23\times10^3\ \mathrm{J}$

氨气：　$E_{NH_3}=1\ \mathrm{mol}\times\frac{6}{2}RT=\frac{6}{2}\times8.31\times300\ \mathrm{J}=7.48\times10^3\ \mathrm{J}$

5-7. 容器内贮有 1 mol 的某种气体，今从外界输入 2.09×10^2 J 热量，测得其温度升高 10 K。求该气体分子的自由度。

分析：容器的容积不变，从外界输入的热量全部转化为理想气体分子内能的增量。

解：设气体分子的自由度为 i。外界输入的热量 Q 全部转化为理想气体分子内能的增量，即 $Q=\Delta E$，温度为 T 时，1 mol 理想气体的内能为

$$E=\frac{i}{2}RT\quad（\text{SI 单位}）$$

内能的增量为　$\Delta E=\frac{i}{2}R\Delta T$

得气体分子的自由度　$i=\frac{2Q}{R\Delta T}=\frac{2\times2.09\times10^2}{8.31\times10}=5$

该气体分子是双原子分子。

5-8. 水蒸气分解为同温度的氢气和氧气，即 $H_2O\rightarrow H_2+\frac{1}{2}O_2$，也就是 1 mol 的水蒸气可分解成同温度的 1 mol 氢气和$\frac{1}{2}$mol 氧气。当不计振动自由度时，求

此过程中内能的增量。

分析:将水蒸气、氢气和氧气都视为理想气体。理想气体的分子数一定时,其内能仅与温度有关。水蒸气分解为同温度的氢气和氧气,由于分子数增多而使内能增加。

水分子中氢和氧原子的结合相当稳定,将水蒸气分解为氢气和氧气的过程需要外界输入能量,这部分能量转化为系统增加的内能。

氢气是一种清洁能源,利用太阳能把水分解为燃料电池所必需的氧和氢的技术将成为“人类的理想技术之一”。

解:水蒸气的自由度 $i=6$,温度为 T 时 1 mol 水蒸气的内能为

$$E_1=\frac{6}{2}RT=3RT \quad (\text{SI 单位})$$

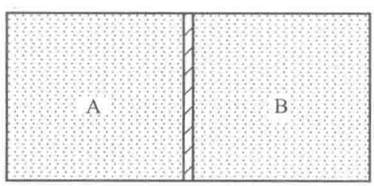
1 mol 氢气($i=5$)和 0.5 mol 氧气($i=5$)在温度为 T 时的内能为

$$E_2=\frac{5}{2}RT+\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}RT=\frac{15}{4}RT$$

内能的增量为

$$\Delta E=E_2-E_1=\frac{3}{4}RT$$

5-9. 一容器的体积为 $2V_0$,用绝热板将其隔成相等的两部分,如习题 5-9 图所示。设 A 内储有 1 mol 的单原子气体,B 内储有2 mol的双原子气体。A、B 两部分的压强均为 p_0。(1) 求 A、B 内两气体的内能;(2) 现抽去绝热板,求两种气体混合后达到平衡状态时的温度和压强。



习题 5-9 图

分析:抽去绝热板后,A、B 两部分气体因热运动而将弥散于整个容器中,最终达到均匀混合的平衡状态。这个状态,是通过气体分子间的弹性碰撞实现的。从整体而言,A、B 两部分气体的总内能既无损耗也无增量,即保持不变(假定混合过程中不发生化学反应)。理想气体的内能是温度的单值函数,由此可求得混合后气体的温度,压强则可由物态方程求得。

解:(1) 由内能表式 $E=\nu\dfrac{i}{2}RT$ 和物态方程 $pV=\nu RT$,可得 A、B 内两气体的

内能分别为

$$E_{\mathrm{A}}=\nu_{\mathrm{A}}\frac{3}{2}RT_{\mathrm{A}}=\frac{3}{2}p_0V_0$$

和

$$E_{\mathrm{B}}=\nu_{\mathrm{B}}\frac{5}{2}RT_{\mathrm{B}}=\frac{5}{2}p_0V_0$$

其中 $\nu_{\mathrm{A}}=1,\nu_{\mathrm{B}}=2$。

(2) 设混合气体的温度为 T,有

混合前

$$E_0=E_{\mathrm{A}}+E_{\mathrm{B}}=\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)p_0V_0=4p_0V_0$$

混合后

$$E=\nu_{\mathrm{A}}\frac{3}{2}RT+\nu_{\mathrm{B}}\frac{5}{2}RT=\left(1\times\frac{3}{2}+2\times\frac{5}{2}\right)RT=\frac{13}{2}RT(\text{SI 单位})$$

因混合前后气体的总内能保持不变,即 $E_0=E$,因此有

$$T=\frac{8}{13}\frac{p_0V_{\mathrm{m}}}{R}$$

由理想气体的物态方程,得

$$p=\frac{\nu RT}{V}=(\nu_{\mathrm{A}}+\nu_{\mathrm{B}})\frac{RT}{2V_0}=\frac{12}{13}p_0$$

5-10. 储有氧气的容器以速率 v 作直线运动,现使容器突然停止。(1) 容器中氧气的温度将上升多少?(2) 气体分子的平均平动动能和转动动能各增加多少?(以摩尔质量 M 和阿伏伽德罗常量 N_{A} 表示。)

分析:容器内气体的温度是大量分子无规则热运动的平均效果。在容器相对惯性系作匀速直线运动的情况下,所有分子的热运动都叠加了一个整体定向运动的速度,并未增加或减少分子间碰撞的机会。因此,容器内的气体分子仍然处于平衡状态,温度不会变化。

当容器突然停止运动,分子定向运动的动能将通过与器壁及分子间的碰撞而转换为热运动的能量。热平衡后,容器内气体的温度、压强、内能都有所增加。内能的增量按分子的自由度均分。

解:设容器内氧气质量为 m,氧气的摩尔质量为 M。氧气的自由度 $i=5$。

(1) 分子定向运动的动能将全部转化为气体内能的增量,有

$$\frac{1}{2}mv^2=\Delta E=\frac{m}{M}\frac{i}{2}R\Delta T$$

得

$$\Delta T=\frac{M}{5R}v^2$$

(2) 氧气分子平均平动动能的增量为

$$\Delta\bar{\varepsilon}_{t}=\frac{3}{2}k\Delta T=\frac{3}{2}\frac{R}{N_{A}}\frac{M}{iR}v^{2}=\frac{3M}{10N_{A}}v^{2}$$

平均转动动能的增量为 $\Delta\bar{\varepsilon}_{r}=\frac{2}{2}k\Delta T=k\Delta T=\frac{M}{5N_{A}}v^{2}$

3. 气体分子的统计规律

5-11. 求压强为 1.013×10^{5} Pa、质量为 2 g、容积为 1.54×10^{-3} m^{3}的氧气分子的最概然速率、平均速率及方均根速率。

解:利用理想气体的物态方程,改写 v_p、$\bar{v}$ 和$\sqrt{\overline{v^2}}$表式,可得

$$v_{p}=\sqrt{\frac{2RT}{M}}=\sqrt{\frac{2pV}{m}}=\sqrt{\frac{2\times1.013\times10^{5}\times1.54\times10^{-3}}{2\times10^{-3}}}\ \mathrm{m/s}=3.95\times10^{2}\ \mathrm{m/s}$$

$$\bar{v}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}=\sqrt{\frac{8pV}{\pi m}}=\sqrt{\frac{8\times1.013\times10^{5}\times1.54\times10^{-3}}{3.14\times2\times10^{-3}}}\ \mathrm{m/s}=4.46\times10^{2}\ \mathrm{m/s}$$

$$\sqrt{\overline{v^{2}}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}=\sqrt{\frac{3pV}{m}}=\sqrt{\frac{3\times1.013\times10^{5}\times1.54\times10^{-3}}{2\times10^{-3}}}\ \mathrm{m/s}=4.84\times10^{2}\ \mathrm{m/s}$$

5-12. 设 N 个粒子系统的速率分布函数为

$$\mathrm{d}N_v=K\mathrm{d}v \qquad (v_0>v>0,K\text{ 为常量})$$

$$\mathrm{d}N_v=0 \qquad (v>v_0)$$

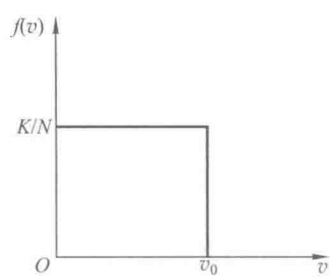
(1) 画出分布函数图;(2) 用 N 和 v_0定出常量 K;(3) 用 v_0表示出算术平均速率和方均根速率。

分析:速率分布函数应满足归一化条件,即 $\int_0^{\infty}f(v)\,\mathrm{d}v=1$,由此确定分布函数的归一化常数。得到归一化了的速率分布函数 $f(v)$后,由统计规律求得算术平均速率和方均根速率。

解:(1) 设速率分布函数为 $f(v)$,有 $\frac{\mathrm{d}N}{N}=f(v)\,\mathrm{d}v$,根据题意有

$$f(v)=\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}v}=\begin{cases}K/N, & v_0>v>0\\ 0, & v>v_0\end{cases}$$

分布函数 $f(v)$ 如解图 5-12 所示。



解图 5-12

(2) 按归一化条件,有

$$\int_0^{v_0} f(v)\,dv = \int_0^{v_0} \frac{K}{N} dv = 1$$

得归一化常数

$$K = \frac{N}{v_0}$$

所以，归一化了的速率分布函数为

$$f(v) = \begin{cases} 1/v_0, & v_0 > v > 0 \\ 0, & v > v_0 \end{cases}$$

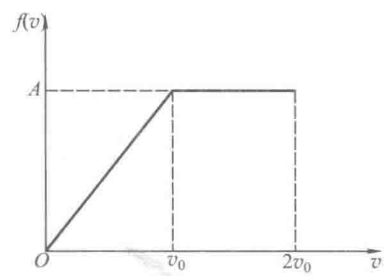
（3）算术平均速率为

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} vf(v)\,dv = \int_0^{v_0} v\frac{1}{v_0} dv = \frac{v_0}{2}$$

方均根速率为

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \left[\int_0^{\infty} v^2 f(v)\,dv\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^{v_0} v^2 \frac{1}{v_0} dv\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{v_0}{\sqrt{3}}$$

5-13. 设某系统中 N 个粒子的速率分布曲线如习题 5-13 图所示。试求：（1）常量 A 以 v_0 表示；（2）速率在 $0 \sim v_0$ 之间、$1.5\,v_0 \sim 2\,v_0$ 之间的粒子数；（3）粒子的平均速率；（4）速率在 $0 \sim v_0$ 之间粒子的平均速率。



习题 5-13 图

分析：求得归一化的分布函数，是求解其他问题的前提。

解：（1）据题图，可得到分布函数为

$$f(v) = \begin{cases} Av/v_0, & (0 \leqslant v \leqslant v_0) \\ A, & (v_0 \leqslant v \leqslant 2v_0) \\ 0, & (2v_0 \leqslant v) \end{cases}$$

分布函数须满足归一化条件，有

$$\int_0^{\infty} f(v)\,dv = \int_0^{v_0} \frac{Av\,dv}{v_0} + \int_{v_0}^{2v_0} A\,dv + \int_{2v_0}^{\infty} 0\,dv = 1$$

得

$$A = \frac{2}{3v_0}$$

所以，归一化的分布函数为

$$f(v) = \begin{cases} 2v/3v_0^2, & (0 \leqslant v \leqslant v_0) \\ 2/3v_0, & (v_0 \leqslant v \leqslant 2v_0) \\ 0, & (2v_0 \leqslant v) \end{cases}$$

(2) 由 $f(v)\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}N}{N}$ 可得，速率在 $0\sim v_0$ 之间的粒子数为

$$N_{0\sim v_0}=\int_0^{v_0}Nf(v)\,\mathrm{d}v=\int_{v_0}^{2v_0}N\frac{2v}{3}\mathrm{d}v=\frac{1}{3}N$$

速率在 $1.5v_0\sim 2v_0$ 之间的粒子数为

$$N_{1.5v_0\sim 2v_0}=\int_{1.5v_0}^{2v_0}N\frac{2}{3v_0}\mathrm{d}v=\frac{1}{3}N$$

(3) 所有粒子的平均速率为

$$\overline{v}=\int_0^{\infty}vf(v)\,\mathrm{d}v=\int_0^{v_0}v\frac{2v}{3v_0^2}\mathrm{d}v+\int_{v_0}^{2v_0}v\frac{2}{3v_0}\mathrm{d}v=\frac{11}{9}v_0$$

(4) 速率在 $0\sim v_0$ 之间粒子的平均速率为

$$\overline{v}_{0\sim v_0}=\frac{\int_0^{v_0}v\mathrm{d}N}{N_{0\sim v_0}}=\frac{\int_0^{v_0}vNf(v)\,\mathrm{d}v}{\int_0^{v_0}Nf(v)\,\mathrm{d}v}=\frac{\int_0^{v_0}vf(v)\,\mathrm{d}v}{\int_0^{v_0}f(v)\,\mathrm{d}v}=\frac{\int_0^{v_0}v^2\mathrm{d}v}{\int_0^{v_0}v\mathrm{d}v}=\frac{2}{3}v_0$$

5-14. 导体中自由电子的运动类似于气体分子的运动，电子气中电子最大速率 v_{F} 叫做费米速率。设导体中共有 N 个自由电子，电子速率在 v 与 $v+\mathrm{d}v$ 之间的概率为

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=\begin{cases}\dfrac{4\pi v^2A\mathrm{d}v}{N}, & v_{\mathrm{F}}>v>0\\ 0, & v>v_{\mathrm{F}}\end{cases}$$

式中 A 为常量。(1) 由归一化条件求 A；(2) 证明电子气中电子的平均动能 $\overline{\varepsilon}=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}m_{\mathrm{e}}v_{\mathrm{F}}^2\right)=\frac{3}{5}E_{\mathrm{F}}$，此处 E_{F} 叫做费米能。

解：(1) 由归一化条件，有

$$\int_0^{\infty}f(v)\,\mathrm{d}v=\int_0^{v_{\mathrm{F}}}\frac{4\pi v^2A\mathrm{d}v}{N}=1$$

得

$$A=\frac{3N}{4\pi v_{\mathrm{F}}^3}$$

(2) 平均动能

$$\overline{\varepsilon}=\frac{1}{2}m_{\mathrm{e}}\overline{v^2}=\frac{1}{2}m_{\mathrm{e}}\int_0^{\infty}v^2f(v)\,\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}m_{\mathrm{e}}\int_0^{v_{\mathrm{F}}}\frac{4\pi v^2A\mathrm{d}v}{N}=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}m_{\mathrm{e}}v_{\mathrm{F}}^2\right)=\frac{3}{5}E_{\mathrm{F}}$$

5-15. 求速度大小在 v_p 与 $1.01\,v_p$ 之间的气体分子数占总分子数的百分率。(提示:先把麦克斯韦速率分布函数改写成 $f(v)\Delta v=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{v^2}{v_p^3}e^{-\left(\frac{v}{v_p}\right)^2}\Delta v$。)

分析:分布函数 $f(v)$ 曲线在某一速率区间 Δv 下的面积,表示速率在该区间内的分子数占总分子数的百分比,即 $f(v)\Delta v=\frac{\Delta N}{N}$。对麦克斯韦速率分布律改写后可简化计算。

解:速率在 $v\to v+\Delta v$ 区间内的分子数占总分子数的比率为

$$\frac{\Delta N}{N}=f(v)\Delta v$$

麦克斯韦速率分布函数为

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2$$

最概然速率为
$$v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

用 v_p 表式改写 $f(v)\Delta v$,可得

$$f(v)\Delta v=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{v}{v_p}\right)^2e^{-\left(\frac{v}{v_p}\right)^2}\left(\frac{\Delta v}{v_p}\right)$$

令 $W=\frac{v}{v_p}$,$\Delta W=\frac{\Delta v}{v_p}$,上式又可写为

$$f(v)\Delta v=\frac{4}{\sqrt{\pi}}W^2e^{-W^2}\Delta W$$

显然,当 $v=v_p$ 时,$W=W_p=1$;$\Delta v=0.01v_p$ 时,$\Delta W=\Delta W_p=0.01$。所以,在 $v_p\to 1.01v_p$ 速率区间内的分子数,占总分子数的百分数为

$$\frac{\Delta N_p}{N}=f(v_p)\Delta v=f(W_p)\Delta W=\frac{4}{\sqrt{\pi}}W_p^2e^{-W_p^2}\Delta W$$

$$=\frac{4}{\sqrt{\pi}}e^{-1}\times 0.01=0.83\%$$

5-16. 求氢气在 300 K 时分子速率在 v_p-10 m/s 与 v_p+10 m/s 之间的分子数所占百分率。

分析:速率区间相对 v_p 对称,$\Delta v=20$ m/s,在此速率区间内的分子数占总分子数的百分比,近似为矩形面积 $f(v_p)\Delta v=\frac{\Delta N_p}{N}$。求解方法与题 5-15 类似。

解:温度 $T=300$ K 时,氢气的最概然速率为

$$v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m_0}}=1\ 597\ \mathrm{m/s}$$

用 v_p改写麦克斯韦速率分布律,得

$$f(v)\Delta v=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{v}{v_p}\right)^2 e^{-\left(\frac{v}{v_p}\right)^2}\left(\frac{\Delta v}{v_p}\right)$$

当 $v=v_p$时,$f(v_p)\Delta v$ 就是高为$f(v_p)$、宽为 Δv 的矩形面积,即

$$f(v_p)\Delta v=\frac{4}{\sqrt{\pi}}e^{-1}\left(\frac{\Delta v}{v_p}\right)$$

代入 $v_p=1\ 597\ \mathrm{m/s}$,$\Delta v=20\ \mathrm{m/s}$

可得 $$\frac{\Delta N}{N}=f(v_p)\Delta v=\frac{4}{\sqrt{\pi}}e^{-1}\left(\frac{20}{1\ 597}\right)=1.04\%$$

5-17. 试计算下列气体在大气中的逃逸速度与方均根速度之比:H_2,He,H_2O,N_2,O_2。设大气的温度为 290 K,已知地球半径 $R\approx 6\ 400$ km。根据计算结果讨论在地球大气里的主要成分。

分析:处于地球表面的质点,能够脱离地球束缚所需的最小速度,为逃逸速度,也即第二宇宙速度。用此模型,将理想气体分子视作质点,作大致估算。

解:质点的逃逸速度为 $u=\sqrt{2gR_E}=11.2\times10^3\ \mathrm{m/s}$

理想气体分子的方均根速率为 $\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$

两者的比值为 $$\gamma=\frac{u}{\sqrt{\overline{v^2}}}=\sqrt{\frac{2MR_E g}{3RT}}$$

γ 值越小,气体分子的逃逸概率越大。相同温度条件下,分子质量小的气体逃逸概率大;同种气体分子,温度越高逃逸概率越大。

$$\sqrt{\overline{v^2_{H_2}}}=\sqrt{\frac{3RT}{M_{H_2}}}=\sqrt{\frac{3\times8.31\times290}{2\times10^{-3}}}\ \mathrm{m/s}=1.90\times10^3\ \mathrm{m/s},\gamma_{H_2}=5.89$$

$$\sqrt{\overline{v^2_{He}}}=\sqrt{\frac{3RT}{M_{He}}}=\sqrt{\frac{3\times8.31\times290}{4\times10^{-3}}}\ \mathrm{m/s}=1.34\times10^3\ \mathrm{m/s},\gamma_{He}=8.36$$

$$\sqrt{\overline{v^2_{H_2O}}}=\sqrt{\frac{3RT}{M_{H_2O}}}=\sqrt{\frac{3\times8.31\times290}{1.8\times10^{-2}}}\ \mathrm{m/s}=6.34\times10^2\ \mathrm{m/s},\gamma_{H_2O}=17.67$$

$$\sqrt{\overline{v_{N_2}^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M_{N_2}}}=\sqrt{\frac{3\times8.31\times290}{2.8\times10^{-2}}}\ \mathrm{m/s}=5.08\times10^2\ \mathrm{m/s},\gamma_{N_2}=22.05$$

$$\sqrt{\overline{v_{O_2}^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M_{O_2}}}=\sqrt{\frac{3\times8.31\times290}{3.2\times10^{-2}}}\ \mathrm{m/s}=4.75\times10^2\ \mathrm{m/s},\gamma_{O_2}=23.58$$

在地球形成初期的高温阶段所产生的各种气体分子,就已开始逃逸地球,如H_2等质量小的气体的逃逸量应大于如O_2等质量大的。当前,大气层温度虽已大为降低,但由麦克斯韦气体分子速率分布可知,在同一温度下,仍有一些分子速率大于逃逸速率,H_2的逃逸概率仍大于O_2的。在大气高层的散逸层中,温度高而气体稀薄,分子碰撞概率低,H_2更容易逃逸。这些都可粗略解释现今地球大气的主要成分以N_2,O_2等大质量分子居多的状况。

5-18. 求上升到什么高度处,大气压强减到地面的75%?设空气的温度为0 ℃,空气的摩尔质量为0.028 9 kg/mol。

分析:气体分子在重力场中按高度的分布满足玻耳兹曼分布律。在等温条件下,理想气体的压强随高度变化。

解:由
$$p=p_0e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$
可得
$$h=-\frac{RT}{Mg}\ln\frac{p}{p_0}=-\frac{8.31\times273}{0.0289\times9.8}\ln\frac{3}{4}\ \mathrm{km}=2.30\ \mathrm{km}$$

5-19. 当地面上的气压为1.013×10^5 Pa、温度为0 ℃时,求下面所给高度处的压力(假定可以不考虑因高度而引起的温度改变)。(1) 500 m;(2) 4 000 m;(3) 20 km。

解:由$p=p_0e^{-\frac{Mgh}{RT}}$,式中$p_0=1.013\times10^5$ Pa,$T=273$ K,空气$M=0.0289$ kg/mol,可得

(1) $h_1=500$ m时,$p_1=1.013\times10^5\times e^{-\frac{0.0289\times9.8\times500}{8.31\times273}}$ Pa$=9.517\times10^4$ Pa

(2) $h_2=4\,000$ m时,$p_2=1.013\times10^5\times e^{-\frac{0.0289\times9.8\times4\,000}{8.31\times273}}$ Pa$=6.148\times10^4$ Pa

(3) $h_3=20$ km时,$p_3=1.013\times10^5\times e^{-\frac{0.0289\times9.8\times20\,000}{8.31\times273}}$ Pa$=8.342\times10^4$ Pa

4. 分子平均碰撞频率和平均自由程

5-20. 真空管的真空度为1.33×10^{-3} Pa,试求在27 ℃时单位体积中的分子数及分子平均自由程。设分子的有效直径为3.0×10^{-10} m。

解:根据理想气体物态方程　　$p=nkT$

可得气体分子数密度　　$n=\dfrac{p}{kT}=3.21\times10^{17}\ \mathrm{m}^{-3}$

分子的平均自由程　　$\overline{\lambda}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}=\dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}=7.79\ \mathrm{m}$

5-21. 设氮分子的有效直径为 10^{-10} m。(1) 求氮气在标准状态下的平均碰撞次数;(2) 如果温度不变,气压降到 1.33×10^{-4} Pa,则平均碰撞次数又为多少?

解:标准状态为 $p_0=1.013\times10^5$ Pa,$T_0=273$ K,氮气的摩尔质量 $M=0.028$ kg/mol。

(1) $\overline{Z}=\sqrt{2}\pi d^2 n\overline{v}=\dfrac{\sqrt{2}\pi d^2 p}{kT}\sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m_0}}=4d^2 pN_A\sqrt{\dfrac{\pi}{MRT}}=5.43\times10^8\ \mathrm{s}^{-1}$

(2) $p=1.33\times10^{-4}$ Pa,$T=T_0=273$ K 时,

$$\overline{Z}=\sqrt{2}\pi d^2 n\overline{v}=4d^2 pN_A\sqrt{\frac{\pi}{MRT}}=0.71\ \mathrm{s}^{-1}$$

5-22. 在温度 0 ℃和压强 1.0×10^5 Pa 下,空气密度是 $1.293\ \mathrm{kg/m^3}$,$\overline{v}=4.6\times10^2$ m/s,$\overline{\lambda}=6.4\times10^{-8}$ m,求黏度。

解:气体的黏度

$$\eta=\frac{1}{3}\rho\overline{\lambda}\,\overline{v}=\frac{1}{3}\times1.293\times6.4\times10^{-8}\times4.6\times10^2\ \mathrm{Pa\cdot s}=1.27\times10^{-5}\ \mathrm{Pa\cdot s}$$

5-23. 由实验测定在标准状态下,氧气的扩散系数为 $1.87\times10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}$,根据这数据计算氧分子的平均自由程和分子的有效直径。

解: 气体的扩散系数为 $D=\dfrac{1}{3}\overline{v}\,\overline{\lambda}$,算术平均速率为 $\overline{v}=\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}$,代入分子的平均自由程表达式,得

$$\overline{\lambda}=\frac{3D}{\overline{v}}=3D\sqrt{\frac{\pi M_{O_2}}{8RT}}=1.32\times10^{-7}\mathrm{m}$$

分子的有效直径为

$$d=\sqrt{\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\,\overline{\lambda}p}}=2.52\times10^{-10}\ \mathrm{m}$$

5-24. 保温瓶胆两壁间相距 0.4 cm，抽真空后，其残余气体的温度设为 27 ℃，已知空气分子的有效直径约为 3.0×10^{-10} m。问瓶胆间的压强为多大时空气的导热系数才会比它在大气压下的数值为小。

分析：气体分子间、与瓶胆两壁间的频繁碰撞，导致热能的传递并散失。为降低保温瓶胆的导热性能，除了在瓶胆壁涂有反热辐射层外，还需“抽真空”降低压强，以增大气体分子的平均自由程。当平均自由程 $\overline{\lambda}$ 的理论值大于两壁间距 l 时，分子实际的平均自由程应取 l。

解：取

$$\overline{\lambda}=l\leqslant\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

得

$$p\leqslant\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 l}=\frac{1.38\times10^{-23}\times(273+27)}{\sqrt{2}\times3.14\times(3.0\times10^{-10})^2\times4\times10^{-3}}\ \mathrm{Pa}=2.6\ \mathrm{Pa}$$

5. 范德瓦耳斯方程

5-25. 试用范德瓦耳斯方程计算密闭于容器内质量为 2.2 kg 的 CO_2 的压强。设容积为 30×10^{-3} m³，温度为 27 ℃。如把 CO_2 视为理想气体，结果又如何？已知 CO_2 的范德瓦耳斯常量 $a=0.36\ \mathrm{Pa\cdot m^6/mol^2}$，$b=43\times10^{-6}\ \mathrm{m^3/mol}$。

分析：范德耳斯方程考虑了气体分子之间的引力作用，表现为内压强 $p_i=\frac{m^2}{M^2}\frac{a}{V^2}$。由范德耳斯方程计算所得的压强应小于由理想气体物态方程计算的结果。

解：已知 $M=44\times10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot mol^{-1}}$ 由范德瓦耳斯方程

$$\left(p+\frac{m^2}{M^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V-\frac{m}{M}b\right)=\frac{m}{M}RT$$

解得

$$p=\frac{RT}{\frac{M}{m}V-b}-\frac{m^2}{M^2}\frac{a}{V^2}=3.48\times10^6\ \mathrm{Pa}$$

由理想气体物态方程

$$p'V=\frac{m}{M}RT$$

解得

$$p'=\frac{m}{M}\frac{RT}{V}=4.16\times10^6\ \mathrm{Pa}$$

$$p'>p$$

*5-26. 1 mol 物质的范德瓦耳斯方程为

$$\left(p+\frac{a}{V_{\mathrm{m}}^2}\right)(V_{\mathrm{m}}-b)=RT$$

求临界点的温度 T_{c}、压强 p_{c} 和体积 V_{mc}。(提示:临界点位于等温线的拐点处,根据拐点的数学条件:$\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V_{\mathrm{m}}}\right|_{V_{\mathrm{c}}}=0$ 和 $\left.\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}V_{\mathrm{m}}^2}\right|_{V_{\mathrm{c}}}=0$ 可以求得。)

分析:在 $p-V$ 图上,范德瓦耳斯等温线的拐点对应临界点。利用拐点的数学特征,求出常量 a 和 b 与等温线拐点处 p_{c} 和 V_{mc} 间的关系,代回范德瓦耳斯方程可建立起 p_{c}、V_{mc} 和 T_{c} 间的关系,从而解得 T_{c}。

解: 1 mol 物质的临界等温线方程为

$$\left(p+\frac{a}{V_{\mathrm{m}}^2}\right)(V_{\mathrm{m}}-b)=RT_{\mathrm{c}}$$

式中 V_{m} 为 1 mol 气体可被压缩的体积,T_{c} 为临界温度。在拐点处,要求临界等温线方程满足条件:

$$\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V_{\mathrm{m}}}\right|_{V_{\mathrm{c}}}=0 \quad 和 \quad \left.\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}V_{\mathrm{m}}^2}\right|_{V_{\mathrm{c}}}=0$$

将 a 和 b 作为未知数,解得

$$a=3V_{\mathrm{m}}^2p_{\mathrm{c}}, \quad b=\frac{1}{3}V_{\mathrm{m}}$$

将上述 a 和 b 代回临界的范德瓦耳斯等温线方程,可得到 T_{c}、p_{c} 和 V_{m} 三者关系为

$$p_{\mathrm{c}}V_{\mathrm{m}}=\frac{3}{8}RT_{\mathrm{c}}$$

由此得到用 a 和 b 表示的 p_{c}、V_{mc} 和 T_{c},分别为

$$p_{\mathrm{c}}=\frac{a}{27b^2}, \quad V_{\mathrm{mc}}=3b, \quad T_{\mathrm{c}}=\frac{8a}{27Rb}$$

第六章　热力学基础

一、教学基本要求

1. 理解热力学第零定律，掌握热力学第一定律，掌握在典型过程中功、热量、内能改变量的计算方法。

2. 掌握简单循环过程的热机效率或制冷系数的计算方法。

3. 了解可逆过程和不可逆过程，了解卡诺定理。

4. 理解热力学第二定律及其统计意义。理解熵增加原理和熵的玻耳兹曼表达式。

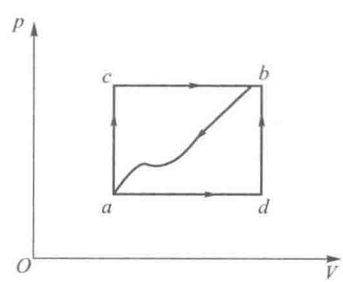
二、本章习题分类

1. 热力学第一定律
2. 循环过程及热机效率和制冷系数
3. 热力学第二定律和熵的计算

三、习题分析与解答

1. 热力学第一定律的应用

6-1. 一系统由如习题 6-1 图所示的状态 a 沿 acb 到达状态 b 时，吸收了热量 350 J，同时对外做功 126 J。（1）如沿 adb 进行时，系统做功 42 J，问这过程吸收了多少热量？（2）当系统由状态 b 沿曲线 ba 返回状态 a 时，外界对系统做功 84 J，问这过程系统是吸热还是放热？量值是多少？



习题 6-1 图

分析：系统的始、末状态确定后，内能的增量也就确定了，功和热量因过程不同而异。将热力学第一定律 $Q=\Delta E+A$ 用于各过程求解。

解：由 acb 过程的热量和功，可得到系统在状态 a 和 b 的内能增量。

$$\Delta E_{ab}=E_b-E_a=Q_{acb}-A_{acb}=(350-126)\text{ J}=224\text{ J}$$

（1）对 adb 过程，有

$$Q_{adb}=\Delta E_{ab}+A_{adb}=(224+42)\text{ J}=266\text{ J}$$

（2）对 ba 过程，有

$$Q_{ba}=\Delta E_{ba}+A_{ba}=-\Delta E_{ab}+A_{ba}=(-224-84)\text{ J}=-308\text{ J}$$

$Q_{ba}<0$，表示系统在由状态 b 返回状态 a 的过程中，向外界放出热量。

6-2. 1 mol 单原子理想气体从 300 K 加热至 350 K，（1）容积保持不变；（2）压强保持不变。问在这两过程中各吸收了多少热量？增加了多少内能？对外做了多少功？

解：单原子理想气体自由度 $i=3$，$C_{V,\mathrm{m}}=\dfrac{3}{2}R$。

（1）等体升温过程：

$$A_V=0,\quad Q_V=\Delta E=\frac{3}{2}\nu R(T_2-T_1)=\nu C_{V,\mathrm{m}}\Delta T=6.23\times10^2\text{ J}$$

（2）等压膨胀过程：

$$\Delta E=\nu C_{V,\mathrm{m}}(T_2-T_1)=6.23\times10^2\text{ J}$$

$$A_p=p(V_2-V_1)=R(T_2-T_1)=4.16\times10^2\text{ J}$$

$$Q_p=\Delta E+A=1.039\times10^3\text{ J}$$

或者

$$Q_p=C_{p,\mathrm{m}}\Delta T=\left(\frac{3}{2}+1\right)R(T_2-T_1)=1.039\times10^3\text{ J}$$

6-3. 压强为 1.0×10^5 Pa，体积为 0.008 2 m^3 的氮气，从初始温度 300 K 加热到 400 K，如加热时（1）体积不变；（2）压强不变，问各做功多少？需热量多少？哪一个过程所需热量大？为什么？

解：已知氮气自由度 $i=5$，$C_{V,\mathrm{m}}=\dfrac{5}{2}R$，$C_{p,\mathrm{m}}=\dfrac{7}{2}R$。设 $p_1=1.0\times10^5$ Pa，$V_1=$ 0.008 2 m^3，$T_1=300$ K，$T_2=400$ K。

（1）等体过程中，$A_V=0$，由热力学第一定律和理想气体物态方程，有

$$Q_V=\Delta E=\frac{m}{M}C_{V,\mathrm{m}}\Delta T$$

$$=\frac{p_1V_1}{RT_1}C_{V,\mathrm{m}}(T_2-T_1)=6.83\times10^2\text{ J}$$

（2）等压过程

$$Q_p=\frac{m}{M}C_{p,\mathrm{m}}\Delta T=\frac{p_1V_1}{RT_1}C_{p,\mathrm{m}}(T_2-T_1)=9.57\times10^2\text{ J}$$

$$A_p=Q_p-\Delta E=2.74\times10^2\text{ J}$$

可见

$$Q_p>Q_V$$

在两过程中，氮气始、末状态温度的变化 ΔT 是相同的，因此内能的增量相同，均为 $\Delta E=6.83\times10^2$ J。在等压膨胀过程中，氮气吸收的热量 Q_p 除提高内能外，还对外界做了功。

6-4. 将 500 J 的热量传给标准状态下 2 mol 的氢气。(1) 若体积不变，问此热量如何转化？氢气的温度及压强变为多少？(2) 若温度不变，问此热量如何转化？氢气的压强及体积各变为多少？(3) 若压强不变，问此热量如何转化？氢气的温度及体积各变为多少？

解：标准状态下 2 mol 氢气的宏观参量为 $p_0=1.013\times10^5$ Pa，$T_0=273$ K，$V_0=44.8\times10^{-3}$ m^3。分子的自由度 $i=5$。

(1) 在等体过程中 $A_V=0$，氢气吸收的热量全部转化为内能的增量。所以

$$Q_V=\Delta E=\frac{m}{M}C_{V,m}\Delta T=2\times\frac{5}{2}R\Delta T=5R\Delta T \quad \text{(SI 单位)}$$

得
$$\Delta T=\frac{Q_V}{5R}=\frac{500}{5\times8.31}\ \text{K}=12\ \text{K}$$

$$T=T_0+\Delta T=(273+12)\text{K}=2.85\times10^2\ \text{K}$$

$$p=\frac{m}{M}\frac{RT}{V_0}=2\times\frac{8.31\times285}{44.8\times10^{-3}}\ \text{Pa}=1.057\times10^5\ \text{Pa}$$

(2) 在等温过程中 $\Delta E=0$，氢气吸收的热量全部转化为对外界做功。由

$$Q_T=A_T=\frac{m}{M}RT_0\ln\frac{V}{V_0}=2\times8.31\times273\times\ln\frac{V}{V_0}=4.537\times10^3\times\ln\frac{V}{V_0}$$

得
$$V=V_0e^{\frac{Q_T}{4.537\times10^3}}=44.8\times10^{-3}\times e^{0.11}=0.05(\text{m}^3)$$

由物态方程，等温过程满足
$$p_0V_0=pV$$

所以
$$p=\frac{V_0}{V}p_0=\frac{44.8\times10^{-3}}{0.05}\times1.013\times10^5\ \text{Pa}=9.07\times10^4\ \text{Pa}$$

(3) 在等压过程中，氢气吸收的热量一部分用于对外做功，另一部分使氢气的内能增加。由

$$Q_p=\frac{m}{M}C_{p,m}\Delta T=2\times\frac{7}{2}R\Delta T=7R\Delta T \quad \text{(SI 单位)}$$

得
$$T=T_0+\Delta T=T_0+\frac{Q_p}{7R}=2.82\times10^2(\text{K})$$

由物态方程，可有
$$p\Delta V=\frac{m}{M}R\Delta T$$

得
$$V=V_0+\Delta V=V_0+\frac{1}{p}\frac{m}{M}R\Delta T=V_0+\frac{2Q_p}{7p}=4.6\times10^{-2}\ \mathrm{m}^3$$

6-5. 有一定量的理想气体，其压强按 $p=\frac{c}{V^2}$ 的规律变化，c 是常量。求气体从 V_1 增加到 V_2 所做的功。该理想气体的温度是升高还是降低？

分析：已知 $p(V)$ 关系，按功的定义 $A=\int_{V_1}^{V_2}p\mathrm{d}V$ 可求得功。根据理想气体的物态方程和系统的初、末状态，确定该理想气体在体积增大的过程中，温度是升高还是降低的。

解：系统对外做功 $A=\int_{V_1}^{V_2}p\mathrm{d}V=\int_{V_1}^{V_2}\frac{c}{V^2}\mathrm{d}V=c\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right)$

由理想气体物态方程和 $p(V)$ 关系，有
$$pV=\frac{m}{M}RT,\quad p=\frac{c}{V^2}$$

得 $T(V)$ 关系为
$$T=\frac{M}{m}\frac{c}{RV}$$

气体体积分别为 V_1 和 V_2 时的温度为
$$T_1=\frac{M}{m}\frac{c}{RV_1},\quad T_2=\frac{M}{m}\frac{c}{RV_2}$$

即
$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{V_2}{V_1}$$

因为 $V_1<V_2$，所以 $T_2<T_1$，气体的温度会降低。

6-6. 1 mol 氢，在压强为 1.0×10^5 Pa，温度为 20 ℃时，其体积为 V_0。今使它经以下两种过程达同一状态：(1) 先保持体积不变，加热使其温度升高到 80 ℃，然后令它作等温膨胀，体积变为原来的 2 倍；(2) 先使它作等温膨胀至原体积的 2 倍，然后保持体积不变，加热到 80 ℃。试分别计算以上两种过程中吸收的热量，气体对外做的功和内能的增量，并作出 $p-V$ 图。

解：氢气的自由度 $i=5$。据题意，在 $p-V$ 图上表示的各过程曲线如解图 6-6 所示。对各过程运用热力学第一定律 $Q=\Delta E+\int p\mathrm{d}V$，有

(1) $a\to b$ 是等体过程，

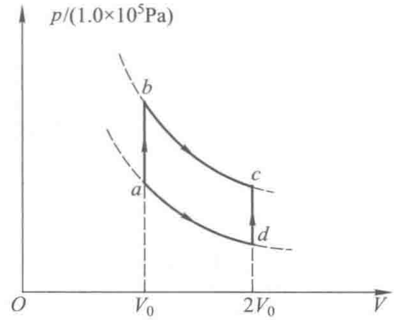
$Q_V=\Delta E=C_{V,\mathrm{m}}\Delta T$

$$=\frac{5}{2}\times 8.31\times 60\ \text{J}=1.246\times 10^{3}\ \text{J}$$

$b\to c$ 是等温过程，

$$Q_T=A_T=RT_2\ln\frac{2V_0}{V_0}$$

$$=8.31\times(273+80)\times\ln 2\ \text{J}=2.033\times 10^{3}\ \text{J}$$



解图 6-6

所以，在 $a\to b\to c$ 过程中，氢气吸收的热量为

$$Q_1=Q_V+Q_T=(1\ 246+2\ 033)\ \text{J}=3.279\times 10^{3}\ \text{J}$$

对外界做功为

$$A_1=A_T=2.033\times 10^{3}\ \text{J}$$

内能的增量为　$\Delta E_1=1.246\times 10^{3}\ \text{J}$

（2）在 $a\to d\to c$ 过程中，氢气先作等温膨胀，然后作等体升压过程。吸收的热量为

$$Q_2=Q_T+Q_V=\nu RT_1\ln\frac{2V_0}{V_0}+\nu C_{V,\text{m}}\Delta T=2.933\times 10^{3}\ \text{J}$$

在等温膨胀过程中，对外界做功为

$$A_2=A_T=\nu RT_1\ln\frac{2V_0}{V_0}=1.687\times 10^{3}\ \text{J}$$

在等体升压过程中，内能的增量为

$$\Delta E_2=C_{V,\text{m}}\Delta T=\nu C_{V,\text{m}}(T_2-T_1)=1.246\times 10^{3}\ \text{J}$$

虽然氢气所经历的过程不同，但由于始、末状态相同，因而内能的增量 ΔE 相同，Q 和 A 则与过程有关。

6-7. 理想气体作绝热膨胀，由初状态 (p_0,V_0) 至末状态 (p,V)。（1）试证明在此过程中气体所做功为

$$A=\frac{p_0V_0-pV}{\gamma-1}$$

（2）设 $p_0=1.0\times 10^{6}\ \text{Pa}$，$V_0=0.001\ \text{m}^3$，$p=2.0\times 10^{5}\ \text{Pa}$，$V=0.003\ 16\ \text{m}^3$，气体的 $\gamma=1.4$，试计算气体所做的功为多少焦耳？

解：（1）绝热过程满足方程　$p_0V_0^{\gamma}=pV^{\gamma}=C$

在由初状态 (p_0,V_0) 至末状态 (p,V) 的绝热膨胀过程中，理想气体对外界做功

$$A=\int p\text{d}V=\int_{V_0}^{V}\frac{p_0V_0^{\gamma}}{V^{\gamma}}\text{d}V$$

$$=\frac{p_0V_0^{\gamma}}{(-\gamma+1)}\frac{1}{V^{\gamma-1}}\bigg|_{V_0}^{V}=\frac{p_0V_0^{\gamma}}{\gamma-1}\left(\frac{1}{V_0^{\gamma-1}}-\frac{1}{V^{\gamma-1}}\right)$$

$$=\frac{p_0V_0-pV}{\gamma-1}$$

（2）代入数据，得 $A=9.20\times10^2\ \mathrm{J}$

6-8. 在标准状态下，14 g 氮气分别通过等温过程和绝热过程将体积压缩为原来的一半。画出这两过程的 $p-V$ 图，并计算这两过程中，气体所做的功、吸收的热量以及其内能的改变。

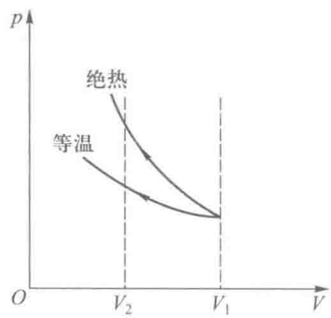
解:(1) 在等温压缩过程中，系统内能不变，外界对系统做的功全部转化为系统向外界放出的热量。系统对外界做功为

$$A_T=-\int_{V_1}^{V_2}p\mathrm{d}V=-\frac{m}{M}RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V}=-\frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$=-\frac{14}{28}\times8.31\times273\times\ln\frac{1}{2}\ \mathrm{J}=-7.86\times10^2\ \mathrm{J}$$

吸收的热量为 $Q_T=A_T=-7.86\times10^2\ \mathrm{J}$

内能的改变为 $\Delta E=0$



解图 6-8

（2）在绝热压缩过程中，系统与外界无热量交换，外界对系统做的功使系统内能增加。吸收的热量为

$$Q=0$$

内能的改变为 $$\Delta E=\frac{m}{M}C_{V,\mathrm{m}}(T_2-T_1)$$

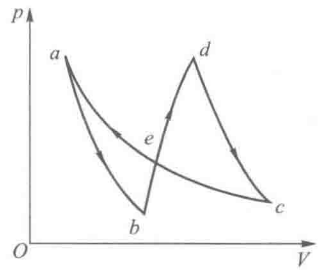
将绝热方程写为 $T_2=T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$，其中 $\gamma=\frac{C_{p,\mathrm{m}}}{C_{V,\mathrm{m}}}=1.4$，代入上式，有

$$\Delta E=\frac{m}{M}C_{V,\mathrm{m}}T_1\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}-1\right]=\frac{14}{28}\times\frac{5}{2}\times8.31\times273\times(2^{0.4}-1)\ \mathrm{J}=9.06\times10^2\ \mathrm{J}$$

得系统对外界做功为 $A_Q=-\Delta E=-9.06\times10^2\ \mathrm{J}$

6-9. 如习题 6-9 图所示，一定量的气体，经历如下的变化过程：ab、dc 是绝热过程，cea 是等温过程。已知系统在 cea 过程中放热 100 J，$eabe$ 的面积为 30 J，$edce$ 的面积为 70 J。试问在 bed 过程中系统吸热还是放热？热量是多少？

分析：由题图可知，在过程 $abdcea$ 构成的大循环中，内含两个子循环，$edce$ 为正循环，$eabe$ 为逆循环。对大循环而言，系统内能不变，所围总面积为对外做的总功，即两子循环面积之差。根据热力学第一定律，可以求得系统与外界交换的总热量，而与外界有热量交换的过程除已知的 cea 外，就是待求的 bed 了。



习题 6-9 图

解：气体系统在大循环过程内能的增量 $\Delta E=0$，吸收的总热量 Q 在数值上与对外做的总功 A 相等，有

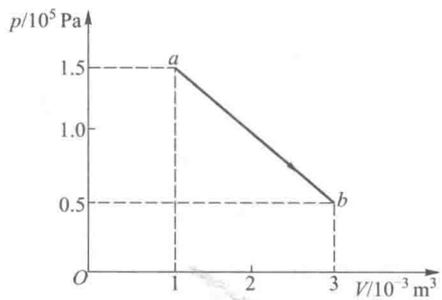
$$Q=A=S_{edce}+S_{eabe}=(70-30)\ \mathrm{J}=40\ \mathrm{J}$$

而
$$Q=Q_{cea}+Q_{bed}=-100\ \mathrm{J}+Q_{bed}=40\ \mathrm{J}$$

所以，得
$$Q_{bed}=(40+100)\ \mathrm{J}=140\ \mathrm{J}$$

即在 bed 过程中系统从外界吸收热量 140 J。

6-10. 0.1 mol 的单原子理想气体，经历一准静态直线过程 ab，如习题 6-10 图所示。(1) 气体在过程中所做的功、吸收的热量和内能的变化？*(2) 气体在过程中的最高温度是多少？在 $p-V$ 图中的哪一点？*(3) 讨论气体在过程中经历每一微小变化时，气体是否总是吸热？



习题 6-10 图

分析：在沿直线 ab 进行的过程中，气体的温度连续变化。由直线方程和气体的物态方程可得到函数 $T=T(V)$，并求得最高温度；根据热力学第一定律的微分形式，可分别就气体体积变化的每一阶段作出吸、放热的判断。

解：(1) 根据功的定义 $A=\int p\mathrm{d}V$，气体在 ab 膨胀过程做的功，就是 $p-V$ 图中 ab 直线下的梯形面积，为

$$A_{ab}=\frac{1}{2}(p_a+p_b)(V_b-V_a)=\frac{1}{2}\times(1.5+0.5)\times10^5\times(3-1)\times10^{-3}\ \mathrm{J}=200\ \mathrm{J}$$

由理想气体物态方程　$p_aV_a=\nu RT_a$，　$p_bV_b=\nu RT_b$

可得 $T_a=T_b=180.5\ \mathrm{K}$，$ab$ 过程始末状态的温度相同，故内能增量 $\Delta E_{ab}=0$。

由热力学第一定律，可得热量

$$Q_{ab}=\Delta E_{ab}+A_{ab}=0+200\ \mathrm{J}=200\ \mathrm{J}$$

（2）$p-V$ 图中的直线 ab 可表示为

$$p=\alpha-\beta V \tag{1}$$

代入 p_a、V_a 和 p_b、V_b 值后，可得 $\alpha=2\times10^5\ \mathrm{Pa}$，$\beta=0.5\times10^8\ \mathrm{Pa/m^3}$。

将理想气体物态方程 $pV=\nu RT$ 代入直线方程，消去 p，得到函数 $T=T(V)$，即

$$T=\frac{1}{\nu R}(\alpha V-\beta V^2) \tag{2}$$

这是系统压强 p 在随体积 V 线性下降的过程中，温度 T 随体积 V 的变化关系。不难看出，T 存在极值。

令 $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V}=0$ 可得，在气体体积膨胀到 $V=V_T=\dfrac{\alpha}{2\beta}=2\times10^{-3}\ \mathrm{m^3}$ 时，系统温度有最高值 T_M，即

$$T_\mathrm{M}=\frac{1}{\nu R}\left(\frac{\alpha^2}{2\beta}-\frac{\alpha^2}{4\beta}\right)=\frac{\alpha^2}{4\nu R\beta}=\frac{(2\times10^5)^2}{4\times0.1\times8.31\times0.5\times10^8}\ \mathrm{K}=240.7\ \mathrm{K}$$

可见，在 ab 过程的中点处体积为 V_T 时，气体具有最高温度 $T_\mathrm{M}=240.7\ \mathrm{K}$。

（3）将热力学第一定律运用于微过程，有

$$\mathrm{d}Q=\mathrm{d}E+\mathrm{d}A=\nu C_{V,\mathrm{m}}\mathrm{d}T+p\mathrm{d}V \tag{3}$$

对(2)式微分，得 $\mathrm{d}T=\dfrac{1}{\nu R}(\alpha-2\beta V)\mathrm{d}V$，与(1)式一并代入(3)式，有

$$\mathrm{d}Q=\nu\ \frac{3}{2}R\left(\frac{\alpha-2\beta V}{\nu R}\right)\mathrm{d}V+(\alpha-\beta V)\mathrm{d}V=\left(\frac{5}{2}\alpha-4\beta V\right)\mathrm{d}V$$

即

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}=\frac{5}{2}\alpha-4\beta V \tag{4}$$

(3)式也可用过程的摩尔热容表示为

$$C_\mathrm{m}=\frac{\mathrm{d}Q}{\nu\mathrm{d}T}=\left(\frac{5}{2}+\frac{\beta V}{\alpha-2\beta V}\right)R \tag{5}$$

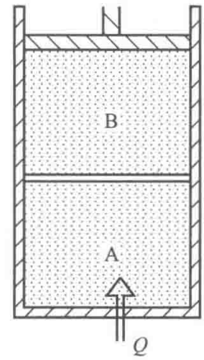
在 ab 膨胀过程中，始终有 $\mathrm{d}V>0$，由(4)式可知，$\mathrm{d}Q$ 的正、负即可表示系统是吸热或放热，由 $\mathrm{d}Q=0$ 可得，转折点 $V_Q=2.5\times10^{-3}\ \mathrm{m^3}$。当 $V_a<V<V_Q$ 时，$\mathrm{d}Q>0$，系统吸热；当 $V_Q<V<V_b$ 时，$\mathrm{d}Q<0$，系统放热。

系统的温度在 ab 膨胀过程中，有最大值 T_M 在 $V_T=2.0\times10^{-3}\ \mathrm{m^3}$ 处。摩尔热容 C_m 随 $\mathrm{d}Q$ 和 $\mathrm{d}T$ 的比值而变化，详情见表 6-10。

表 6-10

V	$V_a<V<V_T$	V_T	$V_T<V<V_Q$	V_Q	$V_Q<V<V_b$
$\mathrm{d}Q$	>0	>0	>0	0	<0
$\mathrm{d}T$	>0	0	<0	<0	<0
C_m	>0	∞	<0	0	>0

6-11. 一气缸除底部导热外，其余部分都是绝热的，被一隔板分成相等的两部分 A 和 B，如习题 6-11 图所示，其中各盛有 1 mol 的氮气。初始温度都是 0 ℃，压强 1.0×10^5 Pa。今将 335 J 的热量缓慢地供给 A 处气体。气缸顶部活塞上的压强始终保持在 1.0×10^5 Pa。求 A、B 两部分温度的改变及吸收的热量。(1) 若隔板固定而导热；(2) 若隔板可自由滑动且绝热。



习题 6-11 图

解：(1) 隔板固定而导热：A、B 两部分的初始状态相同 ($T_0=273$ K、$p_0=1.0\times10^5$ Pa、V_0)。因隔板导热，A、B 的温度同步变化至末态 T，因而两部分的 ΔT 相同。

A 处吸收热量 $Q=335$ J，同时向 B 传热 Q_B，净吸热为 Q_A。因隔板固定，A 作等体的升温、升压过程，有

$$Q_A=\frac{m}{M}C_{V,m}\Delta T,\quad C_{V,m}=\frac{i}{2}R,\quad i=5$$

B 处吸热 Q_B，作等压的膨胀、升温过程，有

$$Q_B=\frac{m}{M}C_{p,m}\Delta T,\quad C_{p,m}=\frac{i+2}{2}R$$

由以上两式，得 $$Q=Q_A+Q_B=\frac{m}{M}(C_{V,m}+C_{p,m})\Delta T$$

解得 $$\Delta T=\frac{Q}{\frac{m}{M}(C_{V,m}+C_{p,m})}=\frac{335}{1\times\left(\frac{5}{2}+\frac{7}{2}\right)\times8.31}\text{ K}=6.72\text{ K}$$

$$Q_B=\frac{m}{M}C_{p,m}\Delta T=1\times\frac{7}{2}\times8.31\times6.72\text{ J}=195\text{ J}$$

$$Q_A=\frac{m}{M}C_{V,m}\Delta T=1\times\frac{5}{2}\times8.31\times6.72\text{ J}=140\text{ J}$$

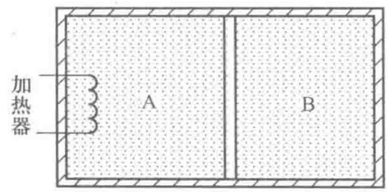
(2) 隔板可自由滑动且绝热：因隔板绝热，热量 Q 完全被 A 吸收；又因隔板可自由滑动，A 将对 B 做功；由于 B 的压强恒定，故 A 对 B 的功与 B 对外界的功相等。因而 A 经历的是等压膨胀过程，B 的状态无任何变化，整体平稳移动。所以，有

$$Q_A=Q=\frac{m}{M}C_{p,m}\Delta T_A$$

A 的温度变化为 $$\Delta T_A=\frac{Q}{\frac{m}{M}C_{p,m}}=\frac{335}{1\times\frac{7}{2}\times8.31}\text{ K}=11.5\text{ K}$$

6-12. 一绝热容器，中间由一无摩擦的绝热的可活动的活塞隔开，如习题 6-12

图所示。A、B 两部分各储有 0.05 m^3的双原子分子理想气体,最初的压强都是 1.0×10^5 Pa,温度都是 0 ℃。现在 A 中缓慢加热,直至 B 中的气体压缩到 2.5×10^5 Pa。试问:(1) 两部分气体各自的温度是多少? (2) A 种气体在整个过程中吸收的热量是多少?



习题 6-12 图

分析:A 吸热对 B 做功,B 经历的是绝热压缩过程。两部分气体的初态相同,由于活塞的性能,末态时,两部分有相同的压强,不同的温度和体积。由绝热过程方程和热力学第一定律,可得到末态参量以及热量、内能和功。

解:(1) A、B 的初始状态相同($T_0=273$ K、$p_0=1.0\times10^5$ Pa、$V_0=0.05$ m^3)。已知 B 的末态压强 $p_B=2.5\times10^5$ Pa,对绝热压缩过程,运用方程 $p^{\gamma-1}T^{-\gamma}=C$,($\gamma=1.4$)可得 B 的末态温度

$$T_B=T_0\left(\frac{p_B}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}=273\times2.5^{\frac{2}{7}}\ \mathrm{K}=273\times1.3\ \mathrm{K}=355\ \mathrm{K}$$

由 $pV^{\gamma}=C'$,可得 B 的末态体积

$$V_B=V_0\left(\frac{p_0}{p_B}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=0.05\times2.5^{-\frac{5}{7}}\mathrm{m}^3=0.05\times0.52\ \mathrm{m}^3=0.026\ \mathrm{m}^3$$

因而,A 的末态体积为

$$V_A=2V_0-V_B=(2\times0.05-0.026)\mathrm{m}^3=0.074\ \mathrm{m}^3$$

由理想气体物态方程,A 的末态温度为

$$T_A=\frac{p_AV_A}{\nu R}=\frac{p_BV_A}{p_0V_0}T_0=\frac{2.5\times10^5\times0.074}{1.0\times10^5\times0.05}\times273\ \mathrm{K}=1\ 010\ \mathrm{K}$$

(2) A 种气体内能的增量 ΔE_A可由 ΔT_A得到,对 B 做的功可由 B 的绝热过程得到,再由热力学第一定律,得到 A 的吸热 Q。A 对 B 的功,由绝热过程的功可得

$$A=\frac{p_BV_B-p_0V_0}{\gamma-1}=\frac{(2.5\times0.026-1.0\times0.05)\times10^5}{1.4-1}\ \mathrm{J}=0.38\times10^4\ \mathrm{J}$$

A 的内能增量为 $\Delta E_A=\nu C_{V,m}\Delta T_A=\nu\frac{5}{2}R(T_A-T_0)=\frac{5}{2}\frac{p_0V_0}{T_0}(T_A-T_0)$

$$=\frac{5\times1.0\times10^5\times0.05}{2\times273}\times(1\ 010-273)\ \mathrm{J}=3.37\times10^4\ \mathrm{J}$$

A 吸热 Q 为 $\qquad Q=\Delta E_A+A=(3.37+0.38)\times10^4\ \mathrm{J}=3.75\times10^4\ \mathrm{J}$

6-13. 一高压容器中含有未知气体,可能是 N_2 或 Ar。在 298 K 时取出试样,从 $5\times10^{-3}\ m^3$ 绝热膨胀到 $6\times10^{-3}\ m^3$,温度降到 277 K。试判断容器中是什么气体?

分析:已知气体始、末状态的温度和体积,利用绝热过程的 $T-V$ 关系,求得 γ,由气体分子的自由度判断气体类别。

解:气体初、末态的温度和体积分别为

$$T_1=298\ K,\quad V_1=5\times10^{-3}\ m^3;\quad T_2=277\ K,\quad V_2=6\times10^{-3}\ m^3。$$

连接两状态的绝热方程为

$$T_1V_1^{\gamma-1}=T_2V_2^{\gamma-1},\quad 即\ \frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

取对数后,可得

$$\gamma=\frac{\ln\dfrac{T_2V_1}{T_1V_2}}{\ln\dfrac{V_1}{V_2}}$$

代入数据,可解得

$$\gamma=1.4$$

因为

$$\gamma=\frac{C_{p,m}}{C_{V,m}}=\frac{i+2}{i}$$

所以,$i=5$,为双原子分子气体 N_2。

6-14. (1) 有 $10^{-6}\ m^3$ 的 373 K 的纯水,在 1.013×10^5 Pa 的压强下加热,变成 $1.671\times10^{-3}\ m^3$ 的同温度的水蒸气。水的汽化热是 2.26×10^6 J/kg。问水变气后,内能改变多少? (2) 在标准状态下,10^{-3} kg 的 273 K 的冰化为同温度的水,试问内能改变多少? 标准状态下水与冰的比体积各为 $10^{-3}\ m^3/kg$ 与 $1.1\times10^{-3}\ m^3/kg$。冰的熔解热为 3.34×10^5 J/kg。

解:(1) 已知纯水的汽化热 $\lambda=2.26\times10^6$ J/kg,纯水的质量为

$$m=\rho V=1\times10^3\times1\times10^{-6}\ kg=1\times10^{-3}\ kg$$

纯水完全汽化需吸热

$$Q=\lambda m=2.26\times10^6\times1.0\times10^{-3}\ J=2.26\times10^3\ J$$

完全汽化后的水蒸气在等压条件下对外界做功

$$A=p\Delta V=1.013\times10^5\times(1.671\times10^{-3}-1\times10^{-6})\ J=1.69\times10^2\ J$$

由热力学第一定律,水变汽后,内能改变

$$\Delta E=Q-A=(2.26\times10^3-1.69\times10^2)\ J=2.09\times10^3\ J$$

(2) 已知冰的熔解热 $L=3.34\times10^5$ J/kg,$m=1\times10^{-3}$ kg 的冰化为同温度的

水,需吸热

$$Q=Lm=3.34\times10^{5}\times1\times10^{-3}\ \mathrm{J}=3.34\times10^{2}\ \mathrm{J}$$

常压下,冰化为水后因体积变化而对外做的功为

$$A=p\Delta V=1.013\times10^{5}\times\left(1\times10^{-3}-\frac{11}{10}\times10^{-3}\right)\times1\times10^{-3}\ \mathrm{J}=-1.01\times10^{-2}\ \mathrm{J}$$

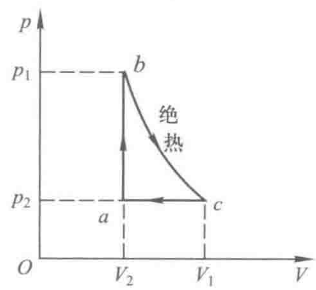
内能改变

$$\Delta E=Q-A=(3.34\times10^{2}+1.01\times10^{-2})\ \mathrm{J}=3.34\times10^{2}\ \mathrm{J}$$

2. 循环过程及热机效率和制冷系数

6-15. 设有一以理想气体为工作物质的热机循环,如习题 6-15 图所示,试证明其效率为

$$\eta=1-\gamma\frac{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)-1}{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)-1}$$



习题 6-15 图

解:在 $a\to b$ 等体过程中,系统从外界吸收的热量为

$$Q_V=\frac{m}{M}C_{V,\mathrm{m}}(T_b-T_a)$$

在 $c\to a$ 等压压缩过程中,系统放出热量的大小为

$$|Q_p|=\frac{m}{M}C_{p,\mathrm{m}}(T_c-T_a).$$

热机循环效率为

$$\eta=1-\frac{|Q_2|}{Q_1}=1-\frac{|Q_p|}{Q_V}=1-\frac{C_{p,\mathrm{m}}(T_c-T_a)}{C_{V,\mathrm{m}}(T_b-T_a)}=1-\gamma\frac{(T_c-T_a)}{(T_b-T_a)}$$

由理想气体物态方程 $$pV=\frac{m}{M}RT$$

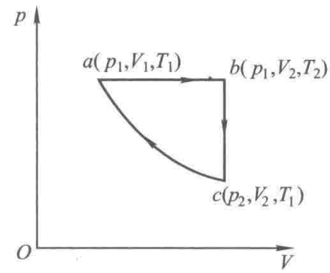
得 $$T_c-T_a=\frac{M}{mR}(p_cV_c-p_aV_a)=\frac{M}{mR}(p_2V_1-p_2V_2)$$

$$T_b-T_a=\frac{M}{mR}(p_bV_b-p_aV_a)=\frac{M}{mR}(p_1V_2-p_2V_2)$$

所以,该热机的循环效率为

$$\eta=1-\gamma\frac{p_2V_1-p_2V_2}{p_1V_2-p_2V_2}=1-\gamma\frac{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)-1}{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)-1}$$

6-16. 有 25 mol 的某种单原子气体，作习题 6-16 图所示的循环过程，其中 ac 为等温过程。$p_1=4.15\times10^5$ Pa，$V_1=2.0\times10^{-2}$ m^3，$V_2=3.0\times10^{-2}$ m^3。求：(1) 各过程中的热量、内能改变以及所做的功；(2) 循环的效率。



习题 6-16 图

解：在 $a\to b$ 等压过程中，有 $p_1=p_2$。利用理想气体物态方程可求出 T_1 和 T_2。

$$p_1V_1=\frac{m}{M}RT_1,\quad p_1V_2=\frac{m}{M}RT_2$$

得
$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{T_2}{T_1}$$

所以
$$T_1=\frac{Mp_1V_1}{mR}=40\ \text{K},\quad T_2=\frac{V_2}{V_1}T_1=60\ \text{K}$$

(1) 在 $a\to b$ 等压膨胀过程中，系统从外界吸收热量为

$$Q_p=\frac{m}{M}C_{p,\text{m}}(T_2-T_1)=10.4\times10^3\ \text{J}$$

内能的增量为

$$\Delta E=\frac{m}{M}C_{V,\text{m}}(T_2-T_1)=6.23\times10^3\ \text{J}$$

对外界做功为
$$A_p=Q_p-\Delta E=4.17\times10^3\ \text{J}$$

在 $b\to c$ 等体降压过程中，$A_V=0$，系统向外界放出热量，内能减小，有

$$Q_V=\Delta E=\frac{m}{M}C_{V,\text{m}}(T_1-T_2)=-6.23\times10^3\ \text{J}$$

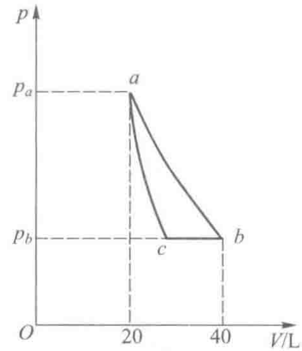
在 $c\to a$ 等温压缩过程中，系统向外界放出热量，内能不变，$\Delta E=0$。有

$$Q_T=A_T=\frac{mRT_1}{M}\ln\frac{V_1}{V_2}=-3.37\times10^3\ \text{J}$$

(2) 在整个循环过程中，系统从外界吸收热量为 Q_p，向外界放出热量为 $|Q_V|+|Q_T|$。所以，循环效率为

$$\eta=1-\frac{|Q_2|}{Q_1}=1-\frac{|Q_V|+|Q_T|}{Q_P}=1-\frac{(6.23+3.37)\times10^3}{10.4\times10^3}=7.7\%$$

6-17. 1 mol 的氮气在状态 a 时温度 $T_a=300$ K，体积 $V_a=20$ L，经过等温膨胀到达状态 b，体积增为 40 L，然后经等压压缩到达状态 c，再经绝热过程回到状态 a，如习题 6-17 所示。试求：(1) 该循环的效率；(2) 如有一卡诺循环工作在 T_a 和 T_c 之间，其效率多大？



习题 6-17 图

解：(1) 已知 (T_a, V_a)，由理想气体的物态方程可得

$$p_a=\frac{RT_a}{V_a}=\frac{8.31\times300}{20\times10^{-3}}\ \text{Pa}=1.25\times10^5\ \text{Pa}$$

由三个过程方程，确定状态 c 的宏观参量 (p_b, V_c, T_c)

$$a\to b: p_aV_a=p_bV_b;\quad b\to c: \frac{V_b}{T_a}=\frac{V_c}{T_c};\quad c\to a: p_aV_a^{\gamma}=p_bV_c^{\gamma}\quad (\gamma=1.4)$$

可得

$$p_b=p_c=\frac{RT_a}{V_b}=\frac{1}{2}p_a=0.623\times10^5\ \text{Pa}$$

$$V_c=\left(\frac{p_a}{p_b}\right)^{\frac{1}{\gamma}}V_a=2^{\frac{1}{1.4}}\times20\times10^{-3}\ \text{m}^3=32.8\times10^{-3}\ \text{m}^3$$

$$T_c=\frac{V_c}{V_b}T_a=246\ \text{K}$$

$a\to b$ 等温膨胀过程，吸热为

$$Q_T=A_T=\nu RT_a\ln\frac{V_b}{V_a}=8.31\times300\times\ln 2\ \text{J}=1.73\times10^3\ \text{J}$$

$b\to c$ 等压压缩过程，放热为

$$|Q_p|=\nu C_{p,\text{m}}(T_a-T_c)=\frac{7}{2}\times8.31\times(300-246)\,\text{J}=1.57\times10^3\ \text{J}$$

循环的效率为 $$\eta=\frac{Q_T-|Q_p|}{Q_T}=1-\frac{|Q_p|}{Q_T}=1-\frac{1.57\times10^3}{1.73\times10^3}=9.2\%$$

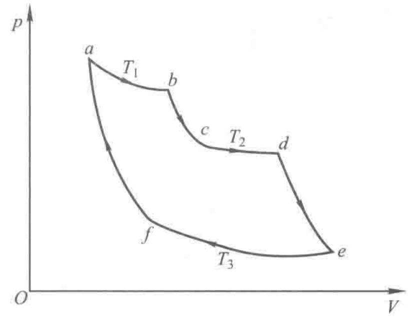
(2) 工作在 T_a 和 T_c 之间卡诺循环的效率

$$\eta_{\text{C}}=1-\frac{T_c}{T_a}=1-\frac{246}{300}=18\%$$

6-18. 克劳修斯曾设计了一个如习题 6-18 图所示的循环过程，其中 ab、cd、ef 是等温过程，温度分别为 T_1、T_2 和 T_3，bc、de、fa 是绝热过程。他还设定系统在 cd 过程吸收的热量和 ef 过程中放出的热量相等。设系统是一定量的理想气体。证

明此循环的效率为

$$\eta=1-\frac{T_2T_3}{T_2T_3+(T_2-T_3)\ T_1}$$



习题 6-18 图

解 1：ab 为等温吸热膨胀过程，有

$$Q_{ab}=\nu RT_1\ln\frac{V_b}{V_a}$$

cd 为等温吸热膨胀过程，有

$$Q_{cd}=\nu RT_2\ln\frac{V_d}{V_c}$$

ef 为等温放热压缩过程，有

$$|Q_{ef}|=\nu RT_3\ln\frac{V_e}{V_f}$$

由绝热过程方程，可有

$$T_1V_b^{\gamma-1}=T_2V_c^{\gamma-1},\quad T_2V_d^{\gamma-1}=T_3V_e^{\gamma-1},\quad T_3V_f^{\gamma-1}=T_1V_a^{\gamma-1}$$

可得

$$\frac{V_b}{V_a}=\frac{V_eV_c}{V_fV_d}$$

由于 $Q_{cd}=|Q_{ef}|$，所以有

$$\frac{\ln\frac{V_d}{V_c}}{\ln\frac{V_e}{V_f}}=\frac{T_3}{T_2}$$

循环的效率为

$$\eta=1-\frac{|Q_{ef}|}{Q_{ab}+Q_{cd}}=1-\frac{\nu RT_3\ln\frac{V_e}{V_f}}{\nu R\left[T_1\ln\frac{V_b}{V_a}+T_2\ln\frac{V_d}{V_c}\right]}$$

$$=1-\frac{T_3\ln\frac{V_e}{V_f}}{T_1\left(\ln\frac{V_e}{V_f}-\ln\frac{V_d}{V_c}\right)+T_2\ln\frac{V_d}{V_c}}$$

$$=1-\frac{T_2T_3}{T_1T_2+(T_2-T_1)\ T_3}=1-\frac{T_2T_3}{T_2T_3+T_1(T_2-T_3)}$$

解 2：延长绝热线 bc，交等温线 ef 于 g 点，构成两个卡诺循环 A 和 B，如解图 6-18 所示。卡诺循环 A 和 B 的效率分别为

$$\eta_{CA}=1-\frac{T_3}{T_1}=1-\frac{|Q_{gf}|}{Q_{ab}},\quad \eta_{CB}=1-\frac{T_3}{T_2}=1-\frac{|Q_{eg}|}{Q_{cd}}$$

可得 $|Q_{gf}|=\frac{T_3}{T_1}Q_{ab}$, $|Q_{eg}|=\frac{T_3}{T_2}Q_{cd}$

因 $Q_{cd}=|Q_{ef}|$,有

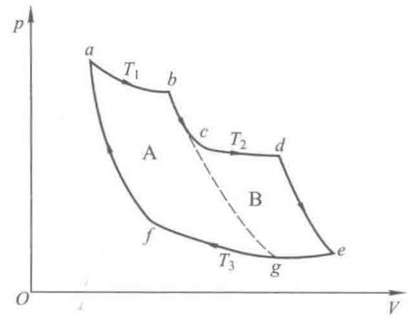
$$Q_{cd}=|Q_{eg}|+|Q_{gf}|=\frac{T_3}{T_2}Q_{cd}+\frac{T_3}{T_1}Q_{ab}$$

可得 $$Q_{ab}=\frac{(T_2-T_3)\ T_1}{T_2T_3}Q_{cd}$$

总循环的效率为

$$\eta=1-\frac{|Q_{ef}|}{Q_{ab}+Q_{cd}}=1-\frac{|Q_{eg}|+|Q_{gf}|}{Q_{ab}+Q_{cd}}$$

$$=1-\frac{T_2T_3}{T_2T_3+T_1(T_2-T_3)}$$



解图 6-18

6-19. 一台电冰箱,每天通过冷凝器向外放出热量 3.0×10^5 J。为维持冰箱内的温度为 4 ℃,试问电流每天要做多少功?假设室温为 25 ℃。该冰箱的制冷系数只有同条件下卡诺制冷机制冷系数的 50%。

解:设制冷机每天从冰箱冷藏室吸热为 Q_2,向室内环境放热为 Q_1,电力做功为 A,有

$$Q_2=|Q_1|-|A|$$

冰箱的制冷系数 w 为同条件下卡诺制冷机制冷系数 w_C 的 50%,有

$$w=\frac{Q_2}{|A|}=0.5w_C=\frac{0.5T_2}{T_1-T_2}$$

解得 $$|A|=\frac{T_1-T_2}{T_1-0.5T_2}Q_1=\frac{(25-4)\times3.0\times10^5}{(273+25)-0.5\times(273+4)}\ \text{J}=3.95\times10^4\ \text{J}$$

6-20. 一热机,在 1 000 K 和 300 K 的两热源之间工作。如果有以下两种情况:(1) 高温热源提高到 1 100 K;(2) 低温热源降到 200 K。求理论上的热机效率各增加多少?为了提高热机效率哪一种方案更好?

解:工作在 1 000 K 和 300 K 的两热源间的卡诺热机效率为

$$\eta=1-\frac{T_2}{T_1}=1-\frac{300}{1000}=70\%$$

情况(1):高温热源温度提高到 $T'_1=1\ 100$ K 时,卡诺热机的效率为

$$\eta_1=1-\frac{T_2}{T'_1}=1-\frac{300}{1\ 100}=72.7\%$$

热机的理论效率增加 2.7%。

情况(2)：低温热源温度降低到 $T'_2=200\ \text{K}$，效率为

$$\eta_2=1-\frac{T'_2}{T_1}=1-\frac{200}{1\ 000}=80\%$$

热机的理论效率增加 10%。

计算表明：$\eta_2>\eta_1$。但是，以降低 T_2 温度来提高热机效率的方法通常是不可取的。热机工作时一般以环境空气或流水为低温热源，降低环境温度 T_2 需动用制冷机，显然这是不经济的。所以，一般用提高高温热源温度的方法来提高热机的工作效率。

6-21. 工作在两热源温度分别为 27 ℃和 127 ℃的卡诺热机，从高温热源处吸取热量 5 000 J，该热机向低温热源放出多少热量？对外做功多少？若这是一个卡诺制冷机，从低温热源吸取热量 5 000 J，则将向高温热源放出多少热量？外界做功多少？

解：(1) 已知 $Q_1=5\times10^3\ \text{J}$，由卡诺热机效率

$$\eta=\frac{A}{Q_1}=1-\frac{|Q_2|}{Q_1}=1-\frac{T_2}{T_1}$$

可得，向低温热源放出热量为

$$|Q_2|=\frac{T_2}{T_1}Q_1=\frac{273+27}{273+127}\times5\times10^3\ \text{J}=3.75\times10^3\ \text{J}$$

对外做功为

$$A=\frac{T_1-T_2}{T_1}Q_1=\frac{127-27}{273+127}\times5\times10^3\ \text{J}=1.25\times10^3\ \text{J}$$

(2) 已知 $Q_2=5\times10^3\ \text{J}$，由卡诺制冷机制冷系数

$$w_{\text{C}}=\frac{Q_2}{|A|}=\frac{|Q_1|-|A|}{|A|}=\frac{T_2}{T_1-T_2}$$

可得，向高温热源放出热量为

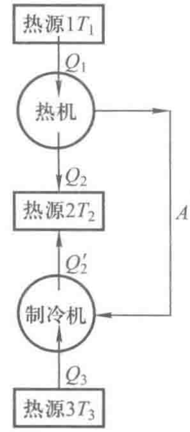
$$|Q_1|=Q_2+|A|=\frac{T_1}{T_2}Q_2=\frac{(273+127)\times5.0\times10^3}{273+27}\ \text{J}=6.67\times10^3\ \text{J}$$

外界做功为

$$|A|=\frac{T_1-T_2}{T_2}Q_2=\frac{(127-27)\times5.0\times10^3}{273+27}\ \text{J}=1.67\times10^3\ \text{J}$$

6-22. 设想把热机和制冷机联合工作，热机工作于 $T_1=500\ \text{K}$ 和 $T_2=400\ \text{K}$

两热源之间，制冷机工作于 $T_3=300$ K 和 T_2 之间，如习题 6-22 图所示。如果热机对外所做的功全部供给制冷机工作。试求从热源 1 中取出热量 5 000 J 后，热源 2 可以得到多少热量？假设热机和制冷机的工作循环都是理想卡诺循环。



习题 6-22 图

解：设热机吸热 $Q_1=5\times10^3$ J，向 T_2放热 Q_2，对制冷机做功为 A，由卡诺热机循环效率，有

$$\eta_C=\frac{A}{Q_1}=1-\frac{|Q_2|}{Q_1}=1-\frac{T_2}{T_1}$$

设制冷机从 T_3吸热 Q_3，向 T_2放热 Q_2'，接受热机的功为 A，由卡诺制冷机制冷系数，有

$$w_C=\frac{Q_3}{|A|}=\frac{|Q_2'|-|A|}{|A|}=\frac{T_3}{T_2-T_3}$$

由以上方程，可以解得

$$|Q_2|=\frac{T_2}{T_1}Q_1,\quad |Q_2'|=\frac{T_2}{T_2-T_3}|A|,\quad |A|=\frac{T_1-T_2}{T_1}Q_1$$

所以，热源 2 可以得到的热量为

$$Q=|Q_2|+|Q_2'|=\frac{T_2(T_1-T_3)}{T_1(T_2-T_3)}Q_1=8.0\times10^3\text{ J}$$

6-23. 一绝热密闭的容器，用隔板分成相等的两部分，其中左边部分盛有一定量的理想气体，压强为 p_0，右边部分为真空。今将隔板抽去，气体自由膨胀。当气体达到热平衡时，其压强为多少？

分析：在理想气体的自由膨胀过程中，绝热系统与外界无热量交换，$Q=0$；向真空膨胀不做功，$A=0$，根据热力学第一定律可知，系统内能保持不变 $\Delta E=0$。所以，达热平衡态后，系统的温度不变，体积为原来的 2 倍。

解：设系统初态为（T_0、V_0、p_0），经自由膨胀后的末态为（T_0、V、p）。由理想气体物态方程，可有

$$p_0V_0=pV,\quad V=2V_0$$

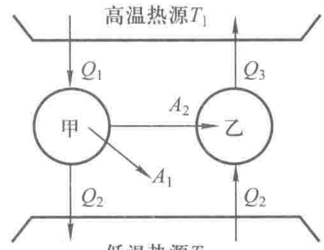
达到热平衡的压强为

$$p=\frac{1}{2}p_0$$

3. 热力学第二定律和熵的计算

6-24. 有人设计了一台如习题 6-24 图所示的组合机，其工作原理如下：热

机甲从高温热源吸热 Q_1，向低温热源放热 Q_2，对外做功 A。该组合机将功 A 分成两部分：一部分用来开动制冷机乙，即回输功 A_2，另一部分功 A_1 另作他用，制冷机在 A_2 的作用下，从低温热源吸取热量 Q_2，而将热量 $Q_3(=A_2+Q_2)$ 送到高温热源中去。问：这样的组合机是否能实现？为什么？



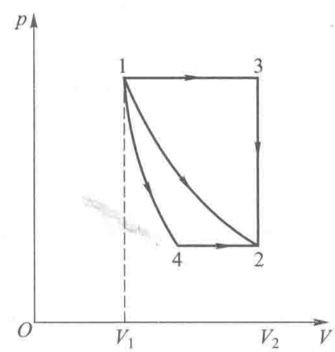
习题 6-24 图

分析：观察组合机完成一循环时，对外界（包括高、低温热源）造成的影响，是否满足热力学第一定律和热力学第二定律。

解：组合机完成一循环后，高温热源放热为 $Q=Q_1-Q_3=Q_1-(A_2+Q_2)\neq 0$，低温热源的热量无变化，而外界得到净功 A_1。

可见，该组合机是从单一热源吸热 Q，全部转化为功 A_1，而不产生其他影响（低温热源无变化）的机器。这是第二类永动机，虽不违反热力学第一定律，但违背热力学第二定律，是不可能实现的。

6-25. 1 mol 的氢气在状态 1 时温度为 $T_1=300$ K，体积为 $V_1=20$ L，经过不同的过程到达终态 2，体积 $V_2=40$ L，如习题 6-25 图所示。其中 1→2 为等温过程；1→4 为绝热过程；1→3 和 4→2 为等压过程；3→2 为等体过程。试分别计算由三条路程从状态 1 到状态 2 的熵变，讨论所得的结果。



习题 6-25 图

分析：熵是态函数，对于系统确定的始、末状态，熵变是确定的，与所经历的过程无关。用于计算熵变的所有过程均为可逆过程。

解：(1) 1→3→2 路径的熵变

对 1→3 等压过程，有　　$T_3=\dfrac{V_2}{V_1}T_1=600\ \text{K}$

吸热　　$\mathrm{d}Q_p=C_{p,\mathrm{m}}\mathrm{d}T$

对 3→2 等体过程，有　　$\mathrm{d}Q_V=C_{V,\mathrm{m}}\mathrm{d}T$

则 1→3→2 路径的熵变为

$$\Delta S_{1\to3\to2}=\int_1^3\frac{\mathrm{d}Q_p}{T}+\int_3^2\frac{\mathrm{d}Q_V}{T}$$

$$=C_{p,\mathrm{m}}\int_{T_1}^{T_3}\frac{\mathrm{d}T}{T}+C_{V,\mathrm{m}}\int_{T_3}^{T_2}\frac{\mathrm{d}T}{T}=C_{p,\mathrm{m}}\ln\frac{T_3}{T_1}+C_{V,\mathrm{m}}\ln\frac{T_2}{T_3}$$

由于 1→2 为等温过程，$T_1=T_2$，所以

$$\Delta S_{1\to3\to2}=C_{p,\mathrm{m}}\ln\frac{T_3}{T_1}-C_{V,\mathrm{m}}\ln\frac{T_3}{T_1}=(C_{p,\mathrm{m}}-C_{V,\mathrm{m}})\ln\frac{T_3}{T_1}$$
$$=R\ln 2=5.76\ \mathrm{J/K}$$

（2）1→2 路径的熵变

对 1→2 等温过程，有

$$\mathrm{d}Q_T=\mathrm{d}A=p\mathrm{d}V,\quad p=\frac{p_1V_1}{V},\quad T=T_1$$

1→2 路径的熵变为

$$\Delta S_{1\to2}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}Q_T}{T}=\frac{p_1V_1}{T_1}\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V}=R\ln\frac{V_2}{V_1}=R\ln 2=5.76\ \mathrm{J/K}$$

（3）1→4→2 路径的熵变

对 1→4 绝热过程，有

$$\mathrm{d}Q=0,\quad \mathrm{d}S=0,\quad \frac{T_1}{T_4}=\left(\frac{p_1}{p_4}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

对 4→2 等压过程，有

$$\mathrm{d}Q_p=C_{p,\mathrm{m}}\mathrm{d}T$$

1→4→2 路径的熵变为

$$\Delta S_{1\to4\to2}=\int_4^2\frac{\mathrm{d}Q_p}{T}=C_{p,\mathrm{m}}\int_{T_4}^{T_2}\frac{\mathrm{d}T}{T}=C_{p,\mathrm{m}}\ln\frac{T_2}{T_4}=C_{p,\mathrm{m}}\frac{\gamma-1}{\gamma}\ln\frac{p_1}{p_4}$$

利用 1→2 等温过程，上式中$\dfrac{p_1}{p_4}=\dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{V_2}{V_1}$所以，有

$$\Delta S_{1\to4\to2}=C_{p,\mathrm{m}}\frac{\gamma-1}{\gamma}\ln\frac{V_2}{V_1}=R\ln 2=5.76\ \mathrm{J/K}$$

式中$\dfrac{\gamma-1}{\gamma}=\dfrac{2}{7}$。

计算结果表明，对于系统确定的始、末状态，其熵变是确定的，与两状态间经历的过程无关。

6-26. 1 kg 20 ℃ 的水，与 100 ℃ 的热源相接触，使水温达到 100 ℃。求：（1）水的熵变；（2）热源的熵变；（3）若把水和热源作为一个系统，系统的熵变。已知水的比定压热容 $c=4.18\times10^3\ \mathrm{J/(kg\cdot K)}$。

分析：水吸收来自热源的热量，使温度升高，也可以自发地散热回到初态，但这散发出的热量是不可能自动地传回高温热源的。因此，水温升高是个不可逆

过程。为计算水的熵变，可在两状态间设计一可逆的升温过程，比如定压升温过程；热源在传热过程中，其自身温度不变，其熵变为放出热量与温度之比值；水与热源整体作为一封闭系统，其内部不可逆过程的总熵是增加的，其熵变为系统内各子系统熵变之和。

解：(1) 水的熵变

已知水的质量为 $m=1$ kg。在定压升温的微过程中，水吸热为

$$dQ=mc\mathrm{d}T$$

水温由 20 ℃→100 ℃的熵变为

$$\Delta S_{水}=\int\frac{dQ}{T}=mc\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T}=mc\ln\frac{T_2}{T_1}=1\times4.18\times10^3\times\ln\frac{373}{293}\ \mathrm{J/K}=1.01\times10^3\ \mathrm{J/K}$$

(2) 热源的熵变

放出的热量完全被水吸收，有

$$Q=-mc\Delta T=-mc(T_2-T_1)$$

热源的熵变为

$$\Delta S_{热源}=\frac{Q}{T_2}=-mc\frac{\Delta T}{T_2}=-1\times4.18\times10^3\times\frac{80}{373}\ \mathrm{J/K}=-8.97\times10^2\ \mathrm{J/K}$$

(3) 水与热源系统总熵变

$$\Delta S=\Delta S_{水}+\Delta S_{热源}=(1.01\times10^3-8.97\times10^2)\ \mathrm{J/K}=1.13\times10^2\ \mathrm{J/K}$$

总熵变是增加的。

6-27. 质量 1.0 kg、温度为−10 ℃的冰，在压强为 1.013×10^5 Pa 下熔解变成 10 ℃的水。试计算：(1) 此过程中的熵变；(2) 在 0 ℃时的冰变成 0 ℃的水时，水的微观状态数与冰的微观状态数之比。已知水的比定压热容为 4.22×10^3 J/(kg·K)，冰的比定压热容为 2.09×10^3 J/(kg·K)，冰的熔解热为 3.34×10^5 J/kg。

分析：在常压下，−10 ℃的冰不断从周围环境吸取热量，成为 10 ℃的水，经历了三个不可逆的状态变化过程：(a) −10 ℃的固态冰在定压条件下吸热，成为 0 ℃的固态冰；(b) 0 ℃的固态冰，等温地吸热熔解为 0 ℃的液态水；(c) 0 ℃的水定压吸热，成为 10 ℃的水。

“周围环境”是一大热源，在冰被熔解成水并与环境达到热平衡状态的过程中放出热量，热源温度不变。

过程的熵变应为−10 ℃的冰成为 10 ℃的水的三个分过程熵变与环境的熵变之和。

根据玻耳兹曼关系，由熵变可得到不同宏观态对应微观状态数之比。

解：在冰熔解成水的过程中，其质量 m 不变。设水的比定压热容为 c_{pw}，冰的比定压热容为 c_{pi}，冰的熔解热为 L。

（1）对(a)过程的熵变，有

$$\Delta S_a=\int\frac{dQ}{T}=\int_{T_1}^{T_2}\frac{mc_{pi}dT}{T}$$

$$=mc_{pi}\ln\frac{T_2}{T_1}=1\times2.09\times10^3\times\ln\frac{273}{263}\ \text{J/K}=78\ \text{J/K}$$

对(b)过程的熵变，有

$$\Delta S_b=\frac{Q}{T_2}=\frac{mL}{T_2}=\frac{1\times3.34\times10^5}{273}\ \text{J/K}=1.22\times10^3\ \text{J/K}$$

对(c)过程的熵变，有

$$\Delta S_c=\int\frac{dQ}{T}=\int_{T_2}^{T_3}\frac{mc_{pw}dT}{T}$$

$$=mc_{pw}\ln\frac{T_3}{T_2}=1\times4.22\times10^3\times\ln\frac{283}{273}\ \text{J/K}=1.52\times10^2\ \text{J/K}$$

在上述(a)、(b)和(c)过程中，设环境放热为 Q_d，有

$$Q_d=-[mc_{pi}(T_2-T_1)+mL+mc_{pw}(T_3-T_2)]=-3.97\times10^5\ \text{J}$$

环境的熵变为 $$\Delta S_d=\frac{Q_d}{T_3}=-\frac{3.97\times10^5}{283}\ \text{J/K}=-1.40\times10^3\ \text{J/K}$$

过程的总熵变为 $$\Delta S=\Delta S_a+\Delta S_b+\Delta S_c+\Delta S_d=50\ \text{J/K}$$

（2）玻耳兹曼关系为

$$S=k\ln W$$

式中 W 为系统处于某宏观态时所包含的微观状态数。

0 ℃的冰变成 0 ℃的水，即为（1）中的 b 过程，其熵变可表示为

$$\Delta S_b=S_w-S_i=k\ln W_w-k\ln W_i=k\ln\frac{W_w}{W_i}$$

所以，水的微观状态数 W_w 与冰的微观状态数 W_i 之比为

$$\frac{W_w}{W_i}=\exp\left(\frac{\Delta S_b}{k}\right)=\exp\left(\frac{1.22\times10^3}{1.38\times10^{-23}}\right)=\exp(8.84\times10^{25})\to\infty$$

可见，在常压下 0 ℃的冰通过吸热，转换为 0 ℃水的概率，远大于 0 ℃的水反向转换为 0 ℃冰的概率。

第三篇
电磁学

第七章　静止电荷的电场

一、教学基本要求

1. 掌握电场强度概念，掌握利用叠加原理分析、求解电场强度的基本方法。

2. 掌握静电场的高斯定理，掌握利用高斯定理计算电场强度的条件和方法。

3. 掌握静电场的环路定理和电势的概念，理解用电势的叠加原理求电势的基本方法。

4. 理解电势与电场强度的关系。

5. 理解导体的静电平衡条件，能分析简单导体系统在静电平衡时的电荷分布、电场强度和电势。

6. 理解电介质的极化机理及其描述。

7. 理解电容器概念和典型的连接方式。了解电容器的充、放电过程。

8. 理解电场的能量和能量密度概念。

二、本章习题分类

1. 库仑定律和电场力的叠加原理
2. 点电荷的电场强度和电场强度的叠加原理
3. 连续带电体的电场强度
4. ***E*** 通量、高斯定理
5. 电势和电势叠加原理
6. 静电平衡条件
7. 有电介质时的电场问题和电容的计算
8. 电场能量的计算

三、习题分析与解答

$\boxed{\text{1. 库仑定律和电场力的叠加原理}}$

7-1. 氢原子由一个质子(即氢原子核)和一个电子组成。根据经典模型，在正常状态下，电子绕核作圆周运动，轨道半径 $r=0.529\times10^{-10}$ m。已知质子质量

$m_p=1.67\times10^{-27}$ kg，电子质量 $m_e=9.11\times10^{-31}$ kg，电荷分别为 $\pm e=\pm1.60\times10^{-19}$ C。试求：(1) 电子所受质子的库仑力和万有引力（万有引力常量 $G=6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$）；(2) 库仑力是万有引力的多少倍？(3) 电子的速度。

解：(1) 电子受库仑力的大小为

$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{r^2}$.

$$F_C=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}=9\times10^9\times\frac{(1.60\times10^{-19})^2}{(0.529\times10^{-10})^2}\ \mathrm{N}=8.23\times10^{-8}\ \mathrm{N}$$

电子受万有引力的大小为

$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$,

$$F_G=G\frac{m_em_p}{r^2}=6.67\times10^{-11}\times\frac{9.11\times10^{-31}\times1.67\times10^{-27}}{(0.529\times10^{-10})^2}\ \mathrm{N}=3.63\times10^{-47}\ \mathrm{N}$$

(2)
$$\frac{F_C}{F_G}=\frac{8.23\times10^{-6}}{3.63\times10^{-45}}=2.27\times10^{39}$$

$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{r^2}=m\frac{v^2}{r}$.

(3) 由
$$F_C=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}=m_e\frac{v^2}{r}$$

V

解得
$$v=\frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0rm_e}}=\frac{1.60\times10^{-19}}{\sqrt{4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times0.529\times10^{-10}\times9.11\times10^{-31}}}\ \mathrm{m/s}$$
$$=2.19\times10^6\ \mathrm{m/s}$$

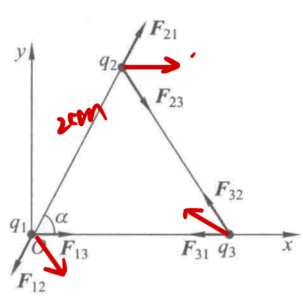
7-2. 在边长为 2 cm 的等边三角形的顶点上，分别放置电荷量为 $q_1=1.0\times10^{-6}$ C、$q_2=3.0\times10^{-6}$ C 和 $q_3=-1.0\times10^{-6}$ C 的点电荷。(1) 哪一个点电荷所受的力最大？(2) 求作用在 q_2 上力的大小和方向。

$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\cdot q_2}{r^2}$.

解：(1) 设三角形边长为 l，定性地画出各电荷的受力如解图 7-2 所示。因 $q_3=-q_1$，根据库仑定律，有

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_3q_2|}{l^2}=|F_{23}|=|F_{32}|=|F_{12}|=|F_{21}|=\frac{1.0\times10^{-6}\times3.0\times10^{-6}}{4\pi\times8.85\times10^{-12}\times0.02^2}\ \mathrm{N}=67.4\ \mathrm{N}$$

$$|F_{13}|=|F_{31}|=\frac{|q_1q_3|}{4\pi\varepsilon_0l^2}=22.5\ \mathrm{N}$$



解图 7-2

取坐标系 Oxy，并设各个电荷受合力分别为 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 和 $\boldsymbol{F}_3$。q_1 受合力为

$$\boldsymbol{F}_1=(F_{13}-F_{12}\cos\alpha)\boldsymbol{i}-F_{12}\sin\alpha\boldsymbol{j}=-(11.2\boldsymbol{i}+58.4\boldsymbol{j})\ \mathrm{N}$$

$$F_1=\sqrt{(F_{13}-F_{12}\cos\alpha)^2+(F_{12}\sin\alpha)^2}=59.5\ \mathrm{N}$$

F_1 与 Ox 轴正向的夹角为

$$\theta_1=\arctan\frac{F_{1y}}{F_{1x}}=\arctan\left(-\frac{F_{12}\sin\alpha}{F_{13}-F_{12}\cos\alpha}\right)$$

$$=\pi+\arctan\left(\frac{58.4}{11.2}\right)=259.1°$$

q_2受合力为　　$\boldsymbol{F}_2=2F_{21}\cos\alpha\,\boldsymbol{i}=67.4\,\boldsymbol{i}$ N

q_3受合力为

$$\boldsymbol{F}_3=-(F_{31}+F_{32}\cos\alpha)\,\boldsymbol{i}+F_{32}\sin\alpha\,\boldsymbol{j}=(-56.2\,\boldsymbol{i}+58.4\,\boldsymbol{j})\text{ N}$$

$$F_3=\sqrt{(F_{31}+F_{32}\cos\alpha)^2+(F_{32}\sin\alpha)^2}=81.0\text{ N}$$

F_3与 Ox 轴正向的夹角为

$$\theta_3=\arctan\frac{F_{3y}}{F_{3x}}=\arctan\left(-\frac{F_{32}\sin\alpha}{F_{31}+F_{32}\cos\alpha}\right)=\pi-\arctan\frac{58.4}{56.2}=133.9°$$

以上计算表明，q_3受合力最大。

(2) 根据(1)的计算，q_2受力 $F_2=67.4$ N，沿 Ox 轴正向。

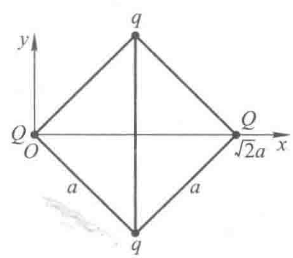
7-3. 在正方形的两个相对的角上各放置一点电荷 Q，在其他两个相对角上各置一点电荷 q。如果作用在 Q 上的力为零，求 Q 与 q 的关系。

分析：根据电荷的对称分布，选取合适的坐标系，由库仑定律和力的叠加原理求解。

解：取坐标系 Oxy，设正方形的边长为 a，各点电荷的分布如解图 7-3 所示。由电荷分布的对称性可知，要使 $x=\sqrt{2}a$ 处的点电荷 Q 所受合力为零，应有

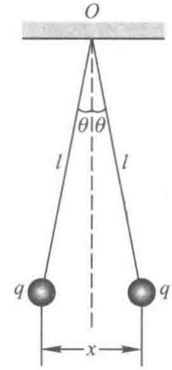
$$F=F_Q+2F_{qx}=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}a)^2}+2\times\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0a^2}\cos45°=0$$

解得　　$Q=-2\sqrt{2}q$



解图 7-3

7-4. 为了验证库仑定律点电荷之间的作用力与距离的关系 $F\propto\frac{1}{r^n}$中 $n=2$，有人构思了如下的实验：两相同的金属小球用两根相同长的悬线吊在 O 点上（见习题 7-4 图），如果它们均带电荷 q，则可测定它们之间的排斥距离为 x_1；如果它们均带电荷 $q/2$，则可测定它们之间的排斥距离为 x_2，图中 θ 角很小。请由此导出库仑定律中的幂指数 n 与 x_1、x_2 的关系式。



习题 7-4 图

解：设小球质量为 m，带电荷量为 q，受库仑力

$F=k\dfrac{q^2}{x^n}$，重力 mg 和悬线张力 F_T。如解图 7-4 所示，三力平衡时，有

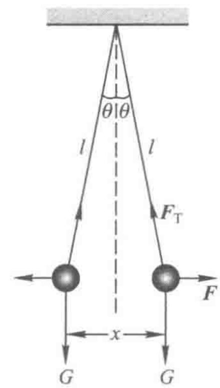
$$F_T\sin\theta=F$$

和
$$F_T\cos\theta=mg$$

解得
$$\tan\theta=\frac{F}{mg}=k\frac{q^2}{mgx^n}$$

θ 很小时，有
$$\tan\theta\approx\theta\approx\frac{x/2}{l}=\frac{x}{2l}$$

即有
$$x^{n+1}=k\frac{2lq^2}{mg}$$



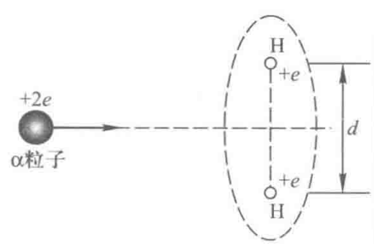
解图 7-4

将 $q_1=q$ 时，$x=x_1$ 和 $q_2=q/2$ 时，$x=x_2$ 代入上式，得

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n+1}=4$$

对上式取对数，得
$$n=\frac{2\lg 2}{\lg x_1-\lg x_2}-1$$

7-5. α 粒子快速通过氢分子中心，其轨迹垂直于两核的连线，两核的距离为 d，如习题 7-5 图所示。问 α 粒子在何处受到的力最大？假定 α 粒子穿过氢分子中心时两核移动可忽略，同时忽略分子中电子的电场。

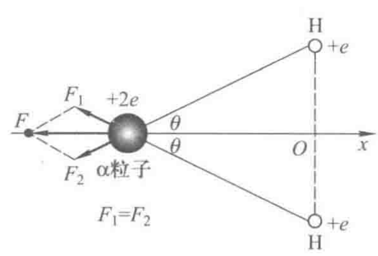


习题 7-5 图

分析：α 粒子受两氢核的斥力对称分布，合力沿垂直于两核连线的方向。写出随坐标变化的力函数，通过求极值得解。

解：取 Ox 坐标轴，如解图 7-5 所示。α 粒子受合力为

$$F=F_x=2F_1\cos\theta=2\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0r^2}\frac{x}{r}=\frac{xe^2}{\pi\varepsilon_0r^3}$$



解图 7-5

当 $x<0$ 时，α 粒子受斥力朝 x 轴负方向，$x>0$ 时，α 粒子受斥力朝 x 轴正方向。将 $r=\sqrt{x^2+\left(\dfrac{d}{2}\right)^2}$ 代入上式，有

$$F=\frac{8e^2}{\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(4x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

令$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=0$,得 α 粒子受力最大的位置为 $x=\pm\frac{d}{2\sqrt{2}}$。

2. 点电荷的电场强度和电场强度的叠加原理

7-6. 在直角三角形 ABC 的 A 点,放置点电荷 $q_1=1.8\times10^{-9}$ C,在 B 点放置点电荷 $q_2=-4.8\times10^{-9}$ C。已知 $BC=0.04$ m,$AC=0.03$ m。试求直角顶点 C 处的电场强度。

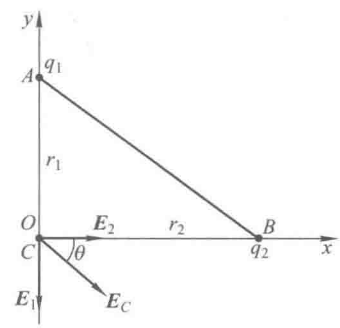
解:如解图 7-6 所示,以 C 为原点,建立直角坐标系 Oxy。令 $AC=r_1$,$BC=r_2$,则 q_1、q_2在 C 点产生的电场强度分别为

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}(-\boldsymbol{j})=-1.8\times10^4\boldsymbol{j}\ \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2}\boldsymbol{i}=2.7\times10^4\boldsymbol{i}\ \mathrm{V/m}$$

由电场强度的叠加原理,C 点的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_C=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2}\boldsymbol{i}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}\boldsymbol{j}$$



解图 7-6

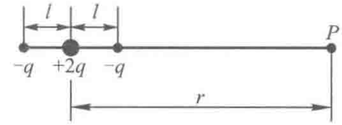
$\boldsymbol{E}_C$的大小为

$$E_C=\sqrt{E_1^2+E_2^2}=3.24\times10^4\ \mathrm{V/m}$$

与 x 轴正向的夹角为

$$\theta=\arctan\frac{E_1}{E_2}=\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)=-33.7°$$

7-7. 如习题 7-7 图所示的电荷分布称为电四极子,它由两个相同的电偶极子组成。证明在电四极子轴线的延长线上离中心为 $r(r\gg l)$ 的 P 点的电场强度为 $E=\frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r^4}$,式中 $Q=2ql^2$ 称为这种电荷分布的电四极矩。



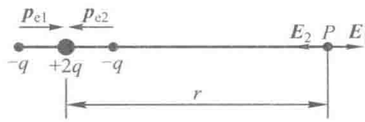
习题 7-7 图

分析:图示电四极子可看作两个反向电偶极子的组合,P 点的电场强度为这两个电偶极子在该点电场强度的叠加。

证：已知电偶极子在其延长线上远场点($r \gg l$)的电场强度值为

$$E=\frac{p_e}{2\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{ql}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

设两电偶极子在 P 点的电场强度分别为 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$，如解图 7-7 所示。因 $|E_2|>|E_1|$，故 P 点合电场强度 $\boldsymbol{E}_P$ 指向电四极子，其大小为



解图 7-7

$$E_P=E_2-E_1=\frac{ql}{2\pi\varepsilon_0\left(r-\frac{l}{2}\right)^3}-\frac{ql}{2\pi\varepsilon_0\left(r+\frac{l}{2}\right)^3}$$

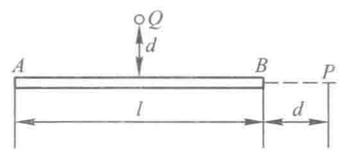
整理并略去 l 的高次项，解得

$$E_P=\frac{ql}{2\pi\varepsilon_0}\frac{3r^2 l}{r^6}=\frac{6ql^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}=\frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r^4}$$

命题得证。

3. 连续带电体的电场强度

7-8. 如习题 7-8 图所示，均匀带电直线 AB 长为 l，电荷线密度为 λ。求：(1) 在 AB 延长线上与 B 端相距 d 的点 P 处的电场强度；(2) 在 AB 的垂直平分线上与直线中点相距 d 处的 Q 点的电场强度。



习题 7-8 图

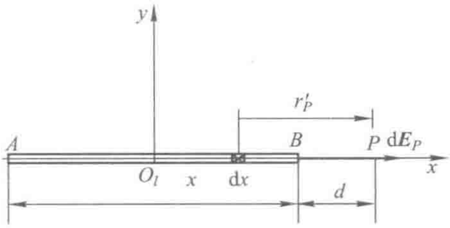
分析：求解连续带电体的电场强度，可先分析电荷分布对场点是否有对称性，判断合场强的方向，然后建立便于计算的坐标系。写出电荷元 $\mathrm{d}q$ 在考察点的 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 后，按坐标写出分量式，如 $\mathrm{d}E_x$、$\mathrm{d}E_y$ 等，再由积分求得 E_x 和 E_y，最后得到合场强 $\boldsymbol{E}$ 的大小和方向。

解：(1) 考察点 P 在直线 AB 的延长线上，如解图 7-8(a)所示，有

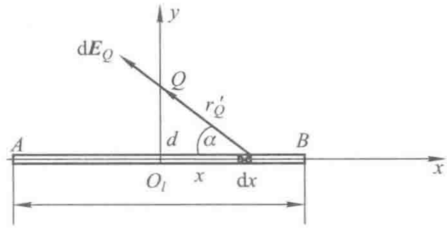
$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r_P'^2}\boldsymbol{i}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{\left(\frac{l}{2}+d-x\right)^2}\boldsymbol{i}$$

AB 上所有 $\mathrm{d}q$ 在 P 的电场强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_P$ 都沿 x 轴正方向。因此，P 处的电场强度可直接积分，为

$$\boldsymbol{E}_P=\int\mathrm{d}\boldsymbol{E}_P=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{l}{2}+d-x\right)^2}\boldsymbol{i}=\frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_0(d+l)d}\boldsymbol{i}$$



(a)



(b)

解图 7-8

(2) 考察点 Q 在 AB 的垂直平分线上,如解图 7-8(b)所示,有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_Q=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r_Q'^2}\boldsymbol{e}_{r'_Q}$$

式中 $\boldsymbol{e}_{r'_Q}$是从 $\mathrm{d}q$ 指向 Q 的单位矢量,$r'_Q=\sqrt{d^2+x^2}$。

AB 上的电荷相对 y 轴对称分布,各 $\mathrm{d}q$ 在 Q 点的电场强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_Q$也相对 y 轴对称分布。由电场强度的叠加原理可得,$E_{Qx}=0$。合场强 $\boldsymbol{E}_Q$沿 y 轴正向,即 $\boldsymbol{E}_Q=E_Q\boldsymbol{j}$。$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_Q$的 y 分量为

$$\mathrm{d}E_{Qy}=\mathrm{d}E_Q\sin\alpha=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r_Q'^2}\sin\alpha,\quad \sin\alpha=\frac{d}{r'_Q}$$

对 $\mathrm{d}E_{Qy}$积分,得

$$E_Q=\int\mathrm{d}E_{Qy}=\frac{\lambda d}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{(d^2+x^2)^{3/2}}$$

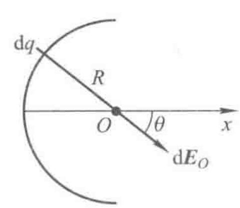
$$=\frac{\lambda d}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{d^2\sqrt{d^2+x^2}}\Bigg|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}=\frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_0 d}\frac{1}{\sqrt{d^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}}$$

即

$$\boldsymbol{E}_Q=\frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_0 d\sqrt{d^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}}\boldsymbol{j}$$

7-9. 用细绝缘线弯成的半圆形环,半径为 R,其上均匀地带正电荷 Q,求圆心 O 点处的电场强度。

解:取坐标轴 Ox 如解图 7-9 所示。设 $Q>0$,由电荷的对称分布可知,O 点处的合场强沿 Ox 轴正向,$\boldsymbol{E}_O=E_O\boldsymbol{i}$。在半圆形环上取电荷元 $\mathrm{d}q$,在 O 点电场强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_O$的水平分量为



解图 7-9

$$\mathrm{d}E_{Ox}=\mathrm{d}E_O\cos\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R^2}\cos\theta$$

将 $dq=\lambda dl, dl=Rd\theta, \lambda=\dfrac{Q}{\pi R}$代入上式，可得

$$dE_{Ox}=\frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_0R^2}\cos\theta d\theta$$

积分，得

$$E_O=\int dE_{Ox}=\frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_0R^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}$$

即

$$E_O=\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}\boldsymbol{i}$$

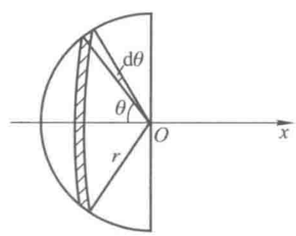
7-10. 一半径为 r 的半球面均匀带电，电荷面密度为 σ。求球心处的电场强度。

分析：把均匀带电半球面细分为无数个半径连续变化的同轴带电细圆环，各带电细圆环在球心处的电场强度都沿轴向，即半球面的对称轴。

解：如解图 7-10 所示，在半球面上取半径为 $r\sin\theta$ 的圆环带，环面垂直于 Ox 轴，带电荷量为 dq。利用带电圆环轴线上 x 处的电场强度公式

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xq}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

作代换：$q\Rightarrow dq=\sigma(2\pi r\sin\theta)rd\theta, E\Rightarrow dE, x\Rightarrow r\cos\theta, R\Rightarrow r\sin\theta$



解图 7-10

得到圆环带在 O 点的电场强度为

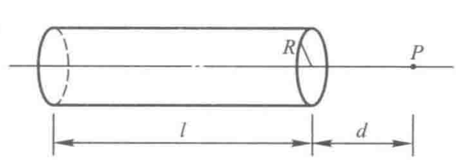
$$dE=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\theta\cos\theta d\theta$$

对上式积分，得到均匀带电半球面在球心处的电场强度为

$$E=\int dE=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin\ \theta\cos\theta d\theta=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

$\boldsymbol{E}$ 指向 Ox 轴正方向。

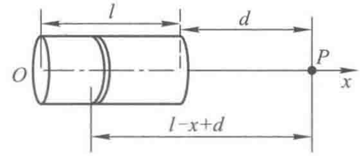
7-11. 一半径为 R、长为 l 的薄壁圆筒，其上电荷均匀分布，电荷量为 q。试求在其轴线上与端点距离为 d 处 P 点的电场强度，如习题 7-11 图所示。讨论当 $R\to0$ 时，其结果与 7-8 题



习题 7-11 图

中(1)的结果作一比较。

解:如解图 7-11 所示,沿轴线取坐标 Ox,原点位于圆筒起始端。取圆环为电荷元,带电荷量为 dq,环面垂直于 Ox 轴,环心距 P 点为 $(l-x+d)$。据题意,电荷面密度为 $\sigma=\dfrac{q}{S}=\dfrac{q}{2\pi Rl}$。



解图 7-11

带电圆环轴线上 x 处的电场强度为

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xq}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

作代换:$q\Rightarrow dq=\sigma 2\pi R dx=\dfrac{q}{l}dx, E\Rightarrow dE, x\Rightarrow l-x+d$

可得圆环在 P 点的电场强度为　$dE_P=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\dfrac{(l-x+d)dx}{[(l-x+d)^2+R^2]^{3/2}}$

令 $x'=l-x+d$,上式为　$dE_P=-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\dfrac{x'dx'}{[x'^2+R^2]^{3/2}}$

对上式积分,得 P 点的电场强度为

$$E_P=\int dE_P=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\int_{l+d}^{d}\frac{x'dx'}{[x'^2+R^2]^{3/2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+d^2}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+(d+l)^2}}\right)$$

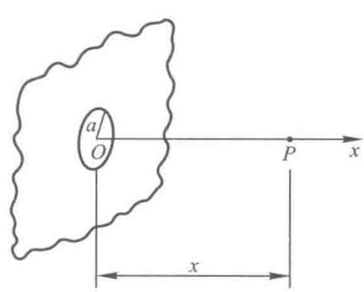
$\boldsymbol{E}_P$指向 Ox 轴正方向。

当 $R\to 0$ 时,薄壁圆筒蜕变为均匀带电直线,在上式中令 $R=0, q=\lambda l$,得 P 点的电场强度为

$$E_P=\frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_0(d+l)d}$$

与 7-8 题中(1)的结果一致。

7-12. 一无限大均匀带电平板,其电荷面密度为$+\sigma$,该平面上有一半径为 a 的圆孔,如习题 7-12 图所示。通过圆孔中心且垂直于平面的轴线上一点 P,与平面的距离为 x,试求 P 点的电场强度。



习题 7-12 图

解 1:在平板上以圆孔中心 O 为圆心,作内、外半径分别为 r、$r+dr$ 的圆环。此环带电为 $dq=\sigma 2\pi r dr$,在轴线上 P 点处的电场强度为

$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\mathrm{d}q}{(x^2+r^2)^{3/2}}=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\frac{r\mathrm{d}r}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

对上式积分，r 由 $a\to\infty$，得到挖了圆孔的无限大均匀带电平板在轴线上 P 点的电场强度为

$$E=\int\mathrm{d}E=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_a^{\infty}\frac{r\mathrm{d}r}{(x^2+r^2)^{3/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$\boldsymbol{E}$ 的方向垂直于平板向外。

解 2：将圆孔视为电荷面密度为$\pm\sigma$ 的圆盘，P 点的电场强度，就可认为由无限大均匀带正电荷$+\sigma$ 的平板和均匀带负电荷$-\sigma$ 的圆盘的场强的叠加。这也称为“补偿法”。

设无限大均匀带正电荷平板在 P 点的电场强度为 $\boldsymbol{E}_1$，电荷面密度为$-\sigma$、半径为 a 的圆盘在 P 点的电场强度为 $\boldsymbol{E}_2$。由电场强度的叠加原理可知，P 点的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$$

取坐标 Ox 沿圆孔轴线，垂直于平面向外，有

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{i}$$

由带电圆环轴线上的电场强度，积分得到圆盘在 P 点的 $\boldsymbol{E}_2$，有

$$\boldsymbol{E}_2=-\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^a\frac{r\mathrm{d}r}{(x^2+r^2)^{3/2}}\boldsymbol{i}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)\boldsymbol{i}$$

P 点的电场强度为 $$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\boldsymbol{i}$$

$\boldsymbol{E}$ 的方向垂直于平面向外，与解(1)结果相同。

7-13. 在真空中有一半径为 R 的均匀带电球面，总电荷量为 $Q(Q>0)$。今在球面上挖去非常小的一块面积ΔS(连同电荷)，且假设挖去后不影响原来的电荷分布，求挖去ΔS 后球心处电场强度的大小和方向。

分析：利用“补偿法”，把球面上被挖部分处理为带等量异号电荷的小面积ΔS。球心处的电场强度为均匀带电球面的场强与带负电ΔS 的场强的叠加，而“非常小”的带电面积可视作点电荷。

解：均匀带电球面的电荷面密度为 $\sigma=\dfrac{Q}{4\pi R^2}$，由于电荷的球对称分布，在球心处的电场强度 $\boldsymbol{E}_1=0$。非常小的ΔS 所带电荷量为$\Delta q=-\sigma\ \Delta S$，可看作点电荷，在球心处的电场强度为

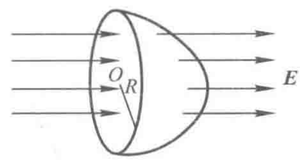
$$\boldsymbol{E}_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q}{R^2}\boldsymbol{e}_r=\frac{Q\Delta S}{(4\pi R^2)^2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r$$

$\boldsymbol{e}_r$为由球心 O 指向ΔS 的径向单位矢量。球心处的合场强为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_2=\frac{Q\Delta S}{(4\pi R^2)^2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r$$

4. $\boldsymbol{E}$ 通量、高斯定理

7-14. 在匀强电场 $\boldsymbol{E}$ 中,有一半径为 $\boldsymbol{R}$ 的闭合半球面,其底面与电场线垂直,如习题 7-14 图所示。试求:(1) 分别通过闭合半球面底面和球面的电场强度通量;(2) 半球面内的总电荷量。



习题 7-14 图

分析:匀强电场 $\boldsymbol{E}$ 中的闭合半球面,其外表面的法向量为正。

解:(1) 取半球面底面为 $\boldsymbol{S}_1$,通过的电场强度通量为

$$\Phi_{e1}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{S}_1=ES_1\cos\ \pi=-\pi R^2E$$

取半球面为 $\boldsymbol{S}_2$,通过的电场强度通量为

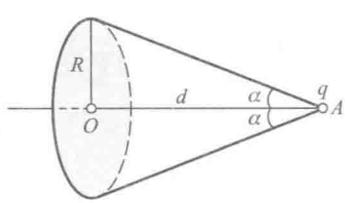
$$\Phi_{e2}=\int_{S_2}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{S_2}E\mathrm{d}S\cos\ \theta=E\int_{S_2}\mathrm{d}S\cos\ \theta=\pi R^2E$$

(2) 通过闭合半球面的电场强度通量为

$$\oint_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\Phi_{e1}+\Phi_{e2}=0$$

闭合半球面所围电荷的代数和为零。

7-15. 如习题 7-15 图所示,在点电荷 q 的电场中,取半径为 R 的圆形平面。设 q 在垂直于平面并通过圆心 O 的轴线上点 A 处,点 A 与圆心点 O 的距离为 d。试计算通过此平面的 $\boldsymbol{E}$ 通量。



习题 7-15 图

分析:点电荷的电场线呈辐射状球对称分布。通过圆形平面的电场线一定通过以该电荷为顶点的球面锥体的球冠面。

解:设点电荷到圆形平面边缘的距离为 r,以点电荷为球心,r 为半径作一球面。该球面的面积为　$S_0=4\pi r^2=4\pi(R^2+d^2)$

球冠面积为 $S=2\pi r(r-d)=2\pi\sqrt{R^2+d^2}\,(\sqrt{R^2+d^2}-d)$

通过球面 S_0 的 $\boldsymbol{E}$ 通量为 $\Phi_{eS_0}=\oint_{S_0}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=ES_0=\dfrac{q}{\varepsilon_0}$

通过球冠面 S 的 $\boldsymbol{E}$ 通量，也即通过圆形平面的 $\boldsymbol{E}$ 通量，为

$$\Phi_{eS}=\int_S\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=ES$$

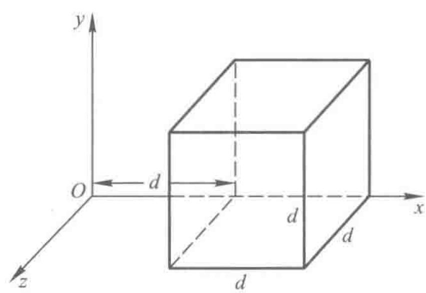
可得

$$\frac{\Phi_{eS}}{\Phi_{eS_0}}=\frac{ES}{ES_0}=\frac{S}{S_0}$$

通过圆形平面的 $\boldsymbol{E}$ 通量为

$$\Phi_{eS}=\Phi_{eS_0}\frac{S}{S_0}=\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{(\sqrt{R^2+d^2}-d)}{2\sqrt{R^2+d^2}}=\frac{q}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{d}{\sqrt{R^2+d^2}}\right]$$

7-16. 如习题 7-16 所示，电场强度的分量为 $E_x=bx^{1/2}$，$E_y=E_z=0$，式中 $b=800\ \mathrm{N/(C\cdot m^{1/2})}$，设 $d=10\ \mathrm{cm}$。试计算：(1) 通过立方体表面的总 $\boldsymbol{E}$ 通量；(2) 立方体内的总电荷量。



习题 7-16 图

分析：电场强度是沿 x 轴正方向的非均匀电场。立方体的上下前后四个侧面的法向均垂直于 E_x，通过的 $\boldsymbol{E}$ 通量为零；在立方体的左右两个侧面上的电场强度 E_{x1} 和 E_{x2} 都均匀分布，但强度不等，通过的 $\boldsymbol{E}$ 通量不为零。根据高斯定理可知，立方体内有电荷。

解：(1) 通过立方体表面的总 $\boldsymbol{E}$ 通量，就是通过立方体左右两个侧面的 $\boldsymbol{E}$ 通量，即

$$\begin{aligned}\Phi_e&=\Phi_{e_1}+\Phi_{e_2}=\boldsymbol{E}_{x1}\cdot\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{E}_{x2}\cdot\boldsymbol{S}_2\\&=-E_{x1}S_1+E_{x2}S_2=-b\sqrt{d}\,d^2+b\sqrt{2d}\,d^2\\&=1.05\ \mathrm{N\cdot m^2/C}\end{aligned}$$

(2) 由高斯定理可得立方体内的总电荷量

$$q=\varepsilon_0\Phi_e=9.27\times10^{-12}\ \mathrm{C}$$

7-17. 在半径分别为 10 cm 和 20 cm 的两层假想同心球面中间，均匀分布着电荷体密度为 $\rho=10^{-9}\ \mathrm{C/m^3}$ 的正电荷。求离球心 5 cm、15 cm、50 cm 处的电场

强度。

解:带电体是内半径为 $R_1=10\ \text{cm}$、外半径为 $R_2=20\ \text{cm}$ 的均匀带电球壳。电荷分布的球对称性,决定了空间电场的球对称分布。以 r 为半径作与球壳同心的闭合有向球面 $\boldsymbol{S}$,在球面上 $\boldsymbol{E}$ 处处大小相同、方向沿径向向外,与 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 平行同向。由此,高斯定理可表示为

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_S E\mathrm{d}S=E\oint_S \mathrm{d}S=E\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\mathrm{d}V$$

离球心 r 处的电场强度为

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_V \rho\mathrm{d}V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\tag{1}$$

式中 q 为高斯面包围的电荷量　$q=\int_V \rho\mathrm{d}V$

设 $r_1=0.05\ \text{m}$ 处的电场强度为 $\boldsymbol{E}_1$。因 $S_1=4\pi r_1^2$ 处于球壳内部,包围的电荷量 $q=0$,由式(1)得 $\boldsymbol{E}_1=0$。

设 $r_2=0.15\ \text{m}$ 处的电场强度为 $\boldsymbol{E}_2$,因 $S_2=4\pi r_2^2$ 处于球壳中间,包围的电荷量为

$$q=\int_V \rho\mathrm{d}V=\int_{R_1}^{r_2}\rho 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{3}\rho(r_2^3-R_1^3)$$

由(1)式得
$$E_2=\frac{\rho(r_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 r_2^2}=4.0\ \text{V/m}$$

$\boldsymbol{E}_2$沿径向向外。

设 $r_3=0.50\ \text{m}$ 处的电场强度为 $\boldsymbol{E}_3$,因 $S_3=4\pi r_3^2$ 包围了球壳及其全部电荷量

$$q=\int_V \rho\mathrm{d}V=\int_{R_1}^{R_2}\rho 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{3}\rho(R_2^3-R_1^3)$$

由(1)式得
$$E_3=\frac{\rho(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 r_3^2}=1.05\ \text{V/m}$$

$\boldsymbol{E}_3$沿径向向外。

7-18. 一个半径为 R 的球体内的电荷体密度为 $\rho=kr$,式中 r 是径向距离,k 是常量。求空间的电场强度分布,并画出 E 对 r 的关系曲线。

解:电荷分布仅与径向距离 r 有关,决定了空间电场分布具有球对称性。作半径为 r 的同心高斯球面 S,运用高斯定理,有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_S E\mathrm{d}S=E\oint_S \mathrm{d}S=E\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\mathrm{d}V$$

离球心 r 处的电场强度为 $E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\displaystyle\int_V \rho \mathrm{d}V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (1)

式中 q 为高斯面所围电荷量 $q=\displaystyle\int_V \rho \mathrm{d}V$

在球体内，半径 $r<R$ 的高斯球面包围的电荷量为

$$\int_V \rho \mathrm{d}V=\int_0^r kr4\pi r^2 \mathrm{d}r=4\pi k\int_0^r r^3 \mathrm{d}r=\pi kr^4$$

代入(1)式，得球体内的电场强度为

$$E=\frac{kr^2}{4\varepsilon_0}\quad(0<r<R)$$

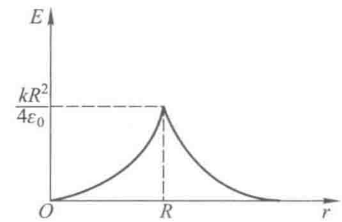
在球体外，半径 $r>R$ 的高斯球面，包围了球体的全部电荷，有

$$\int_V \rho \mathrm{d}V=\int_0^R kr4\pi r^2 \mathrm{d}r=4\pi k\int_0^R r^3 \mathrm{d}r=\pi kR^4$$

代入(1)式，得球体外的电场强度为

$$E=\frac{kR^4}{4\varepsilon_0 r^2}\quad(r>R)$$

E-r 关系曲线如解图 7-18 所示。



解图 7-18

7-19. 厚度为 0.5 cm 的无限大平板均匀带电，电荷体密度为 1.0×10^{-4} C/m³。求：(1) 板内中心平面处的电场强度；(2) 板内与表面相距 0.1 cm 处的电场强度；(3) 板外的电场强度。

分析：无限大均匀带电平板的电场强度，对中心平面对称分布，可利用高斯定理求解。也可把带电板看成由无数厚度为 dr 的无限大均匀带电薄层铺叠而成，由电场强度的叠加原理求解。

解 1：如解图 7-19(a)所示，设板的厚度为 $2r_0$，相对平板的中心平面，对称地作一圆柱高斯面，其侧面为 S_1，长为 $2r$，两底面 S_2 均距中心面 r。电场强度 $\boldsymbol{E}$ 垂直于中心平面，且在中心平面两侧对称分布。所以，通过侧面 S_1 的 $\boldsymbol{E}$ 通量为零；通过两底面 S_2 的 $\boldsymbol{E}$ 通量相同。有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=2ES_2=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V$$

式中 $\displaystyle\int_V \rho \mathrm{d}V$ 是高斯面所包围的电荷量，有

$$\int_V \rho \mathrm{d}V=\begin{cases}\rho S_2 2r, & r<r_0\\ \rho S_2 2r_0, & r>r_0\end{cases}$$

解得板内电场强度为　$E_{内}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho r\quad(r<r_0)$

$E_{内}\propto r$,带电板内部的电场强度随 r 而增强。

板外电场强度为　$E_{外}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho r_0=$常量　$(r>r_0)$

带电板外是均匀电场。

(1) 板内中心平面处,$r=0$,有 $E_0=0$。

(2) 板内与表面相距 0.1 cm 处的电场强度,即 $r=\pm0.15$ cm 处的电场强度大小为

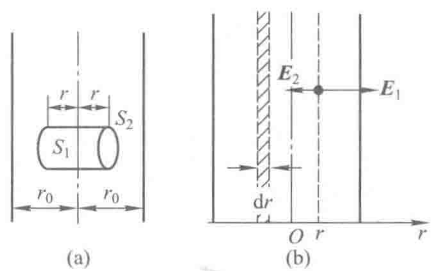
$$E=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho r=\frac{1.0\times10^{-4}\times0.15}{8.85\times10^{-12}}\ \mathrm{V/m}=1.69\times10^{4}\ \mathrm{V/m}$$

(3) 板外的均匀电场为

$$E=\frac{\rho r_0}{\varepsilon_0}=\frac{1.0\times10^{-4}\times0.25}{8.85\times10^{-12}}\ \mathrm{V/m}=2.83\times10^{4}\ \mathrm{V/m}$$

解 2: 利用电场强度的叠加原理求解问题(2)。

把带电板看成是由无数厚度为 dr 的无限大均匀带电薄层铺叠而成的。如解图 7-19 (b)所示,板内任一薄层均为无限大带电平板,电荷面密度为 $\sigma=\rho \mathrm{d}r$,它的电场强度均匀分布于薄层两侧,垂直向外,大小为



解图 7-19

$$\mathrm{d}E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\rho\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0}$$

考察板内 r 处平面的电场强度,在其左侧所有带电层在 r 处的合场强均向右,设为 $\boldsymbol{E}_1$,而其右侧带电层在 r 处的合场强均向左,设为 $\boldsymbol{E}_2$。r 处的合场强为 $\boldsymbol{E}_{内}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$。取图示坐标系,有

$$E_{内}=E_1-E_2$$

由积分求得 r 处合场强,有

$$E_{内}=E_1-E_2=\int_{-r_0}^{r}\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}r-\int_{r}^{r_0}\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}r=\frac{\rho}{\varepsilon_0}r\quad(r<r_0)$$

与解 1 所得结果一致。

7-20. 某气体放电形成的等离子体呈现轴对称的电荷分布,可用下式

表示：

$$\rho(r)=\frac{\rho_0}{\left[1+\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^2}$$

式中 r 为离中心轴的距离，ρ_0 为轴线上的电荷体密度，a 为常量。试求其电场分布。

解：轴对称的电荷分布形成的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 同样具有轴对称的分布。作长为 l、半径为 r 的同轴闭合圆柱面，运用高斯定理，有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}2\pi rl=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V$$

式中 $\int_V \rho \mathrm{d}V$ 为圆柱面包围的电荷，且

$$\int_V \rho \mathrm{d}V=\int_0^r \frac{\rho_0}{\left[1+\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^2}2\pi rl\mathrm{d}r=2\pi l\rho_0\int_0^r \frac{r\mathrm{d}r}{\left[1+\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^2}=\frac{\rho_0\pi la^2r^2}{a^2+r^2}$$

解得离轴 r 处的电场强度为 $\qquad E=\dfrac{\rho_0 a^2 r}{2\varepsilon_0(a^2+r^2)}$

7-21. （1）地球的半径为 6.37×10^6 m，地球表面附近的电场强度近似为 100 V/m，方向指向地球中心，试计算地球带的总电荷量；（2）在离地面 1 500 m 处，电场强度降为 24 V/m，方向仍指向地球中心，试计算这 1 500 m 厚的大气层里的平均电荷密度。

解：（1）设地球的电荷量 Q 均匀分布，电场呈球对称分布。作贴近地球表面的同心的高斯球面 $\boldsymbol{S}$，有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-E4\pi R_\mathrm{E}^2=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

式中负号是由于 $\boldsymbol{E}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向相反所致。得地球带的电荷量

$$Q=-4\pi\varepsilon_0 ER_\mathrm{E}^2$$

将 $E=100$ V/m 代入上式，得 $\qquad Q=-4.51\times10^5$ C

$Q<0$，地球带负电。

（2）设大气层中带电荷量为 q，作半径为 $r=R_\mathrm{E}+h$ 的同心高斯球面 $\boldsymbol{S}'$，$\boldsymbol{S}'$ 上的电场强度为 $\boldsymbol{E}'$，有

$$\oint_{S'} \boldsymbol{E}'\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}'=-E'4\pi(R_\mathrm{E}+h)^2=\frac{1}{\varepsilon_0}(q+Q)$$

可得
$$E'=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q+Q}{(R_E+h)^2}$$

解得大气层中的电荷量为

$$q=-4\pi\varepsilon_0(R_E+h)^2E'-Q$$

将 $h=1\ 500$ m，$E'=24$ V/m，$R_E=6.37\times10^6$ m 代入上式，得

$$q=3.43\times10^5\ \text{C}$$

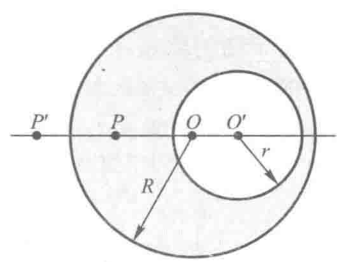
$q>0$，大气层带正电。

由大气层体积
$$V=\frac{4}{3}\pi[(R_E+h)^3-R_E^3]=7.65\times10^{17}\ \text{m}^3$$

可得大气层平均电荷密度为

$$\bar{\rho}=\frac{q}{V}=4.48\times10^{-13}\ \text{C/m}^3$$

7-22. 在半径为 a，电荷体密度为 ρ 的均匀带电球内，挖去一个半径为 b 的小球，$OO'=c$，如习题 7-22 图所示。试求：O、O'、P、P'各点的电场强度。O、O'、P、P'在一条直线上。



习题 7-22 图

分析：将挖去小球的空腔看作是在原来均匀带电 ρ 的球内，填进一个均匀带 $-\rho$ 的小球构成的。根据电场强度的叠加原理可知，各点的电场强度为带 ρ 的大球和带 $-\rho$ 的小球各自在这些点激发的电场强度的矢量和。

解：设大、小带电球体的电场强度分别为 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$，则空间各点处的合场强为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$$

分别对大球和小球运用高斯定理，可以得到 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 分别为

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{cases}\dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r & r<a\\[2ex] \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r & r>a\end{cases},\quad \boldsymbol{E}_2=\begin{cases}-\dfrac{\rho r'}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}'_r & r'<b\\[2ex] -\dfrac{\rho b^3}{3\varepsilon_0 r'^2}\boldsymbol{e}'_r & r'>b\end{cases}$$

式中 $\boldsymbol{e}_r$ 为由 O 点发出径矢 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量，$\boldsymbol{e}'_r$ 为由 O' 点发出径矢 $\boldsymbol{r}'$ 的单位矢量。

在 O 点，$r=0$，$\boldsymbol{r}'=c\boldsymbol{e}'_r=-c\boldsymbol{e}_r$。$\boldsymbol{E}_1=0$，所以，$O$ 点的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_O=\boldsymbol{E}_{2O}=-\frac{\rho c}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}'_r=\frac{\rho c}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r$$

在 O' 点，$r'=0$，$\boldsymbol{r}=c\boldsymbol{e}_r$。$\boldsymbol{E}_2=0$，所以，$O'$ 点的电场强度为

$$E_{O'}=E_{1O'}=\frac{\rho c}{3\varepsilon_0}e_r=E_O$$

在空腔内部 O、O'点的电场强度相同,且为一常矢量。用同样的方法,可以求得空腔内任意点的电场强度均为上式,这表明空腔内是一个均匀电场。

P 点位于大球内小球外,且位于 $O'O$ 的连线上,有 $e_r'=e_r$,可得电场强度为

$$E_P=E_{1P}+E_{2P}=\frac{\rho r_P}{3\varepsilon_0}e_r-\frac{\rho b^3}{3\varepsilon_0 r_P'^2}e_r'=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r_P-\frac{b^3}{r_P'^2}\right)e_r$$

式中 $r_P'=r_P+c$。

P'点位于两个球外,同样位于 $O'O$ 的连线上,也有 $e_r'=e_r$,所以,电场强度为

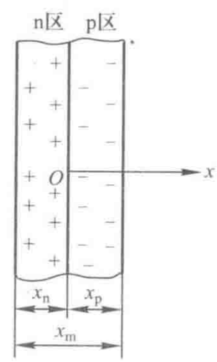
$$E_{P'}=E_{1P'}+E_{2P'}=\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}e_r-\frac{\rho b^3}{3\varepsilon_0 r'^2}e_r'=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{a^3}{r_{P'}^2}-\frac{b^3}{r'^2_{P'}}\right)e_r$$

式中 $r_{P'}'=r_{P'}+c$。

*7-23. 在半导体 pn 结的空间电荷区分布有正、负离子,n 区内是正离子,p 区内是负离子,两区内的电荷量相等,如习题 7-23 图所示。取 x 轴的原点在 pn 结的交界面上,p 区的范围和 n 区的范围 $x_p=x_n=x_m/2$,其电荷的体分布为 $\rho(x)=-eax$,式中 a 为常量。试证明该电荷区的电场分布为

$$E(x)=\frac{ae}{8\varepsilon_0}(x_m^2-4x^2)$$

并画出 $\rho(x)$ 和 $E(x)$ 随 x 变化的曲线。(提示:把 pn 结看成是一对带正、负电荷的无限大平板。)



习题 7-23 图

解:已知两区内的电荷量相等并可视为一对带正负电荷的无限大平板处理。根据电场强度的叠加原理和无限大带电平板的电场分布可知,两区外的电场强度为零;区内电场强度随 x 变化,在垂直于 Ox 轴的各平面上,电场强度 E_x是均匀分布的。

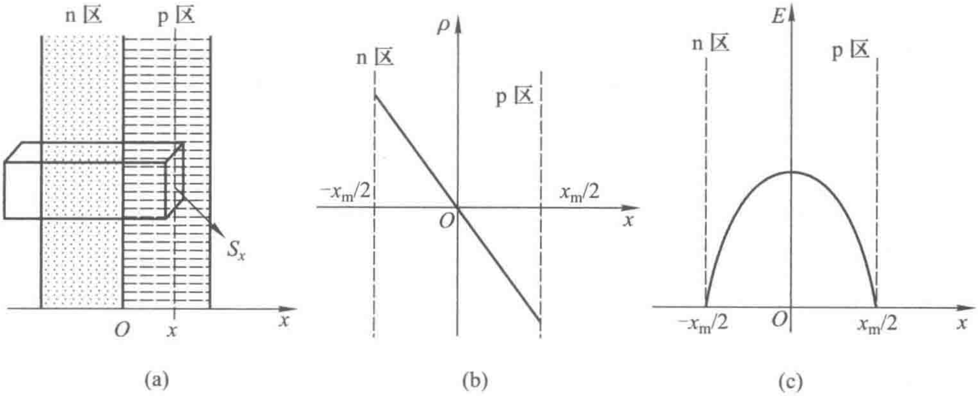
作一矩形(或圆柱形)高斯面,一底面位于区外,另一底面 S_x位于区内 x 面上,如解图 7-23(a)所示。由高斯定理,有

$$\oint_S E\cdot dS=E_xS_x=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V\rho dV$$

高斯面内包围的电荷为

$$\int_V\rho dV=-eaS_x\int_{-\frac{x_m}{2}}^{x}x dx=-\frac{1}{2}eaS_x\left(x^2-\frac{x_m^2}{4}\right)$$

由此证得
$$E(x)=E_x=\frac{ae}{8\varepsilon_0}(x_m^2-4x^2)$$

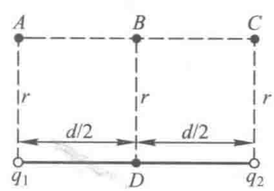


解图 7-23

$\rho(x)$ 和 $E(x)$ 随 x 变化的曲线分别如解图 7-23(b)、(c)所示。

5. 电势和电势叠加原理

7-24. 如习题 7-24 图所示,已知 $r=6\ \text{cm}$,$d=8\ \text{cm}$,$q_1=3\times10^{-8}\ \text{C}$,$q_2=-3\times10^{-8}\ \text{C}$。求:(1) 将电荷量为 $2\times10^{-9}\ \text{C}$ 的点电荷从 A 点移到 B 点,电场力做功多少?(2) 将此点电荷从点 C 移到点 D,电场力做功多少?



习题 7-24 图

解:A、B、C 和 D 四点处的电势分别为

$$V_A=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+d^2}}=1.8\times10^3\ \text{V}$$

$$V_B=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+\dfrac{d^2}{4}}}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+\dfrac{d^2}{4}}}=0$$

$$V_C=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+d^2}}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}=-1.8\times10^3\ \text{V}$$

$$V_D=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\left(\dfrac{d}{2}\right)}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\left(\dfrac{d}{2}\right)}=0$$

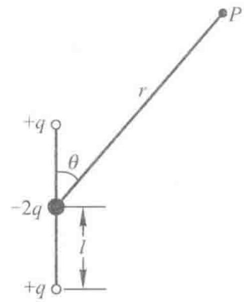
(1) 将点电荷由 A 点移到 B 点过程中,电场力做功为

$$A_{AB}=-q_0(V_B-V_A)=q_0V_A=3.6\times10^{-6}\ \text{J}$$

(2) 将点电荷从 C 点移到 D 点过程中,电场力做功为

$$A_{CD}=-q_0(V_D-V_C)=q_0V_C=-3.6\times10^{-6}\ \mathrm{J}$$

7-25. 试计算如习题 7-25 图所示线形电四极子在很远处($r\gg l$)的电势及电场强度。



习题 7-25 图

分析:利用电势叠加原理,求得 P 点的电势后,用 $r\gg l$ 条件作近似简化。由电势梯度求得电场强度。

解:如解图 7-25 所示,设两个正点电荷到 P 点的距离分别为 r_1、r_2,负电荷到 P 点的距离为 r。P 点的电势为

$$V_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1}-\frac{2q}{r}+\frac{q}{r_2}\right)$$

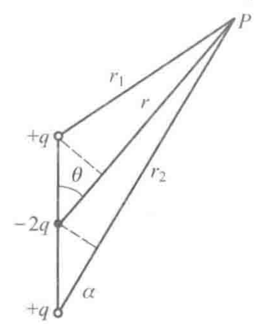
$r\gg l$ 时,有

$$r_1\approx r-a,\quad r_2\approx r+a,\quad a\approx l\cos\theta$$

代入 V_P 式,得

$$V_P=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{2}{r}+\frac{1}{r_2}\right)\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(r-a)}-\frac{2}{r}+\frac{1}{(r+a)}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qa^2}{r(r^2-a^2)}\approx\frac{ql^2}{2\pi\varepsilon_0r^3}\cos^2\theta$$



解图 7-25

利用电场强度与电势梯度的关系,可得

$$E_r=-\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{3ql^2}{2\pi\varepsilon_0r^4}\cos^2\theta,\quad E_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}=\frac{ql^2}{2\pi\varepsilon_0r^4}\sin2\theta$$

所以,P 点处的电场强度大小为

$$E=\sqrt{E_r^2+E_\theta^2}=\frac{ql^2}{2\pi\varepsilon_0r^4}\sqrt{9\cos^4\theta+\sin^2 2\theta}$$

7-26. 半径为 2 mm 的球形水滴具有电势 300 V。求:(1) 水滴上所带的电荷量;(2) 如果两个相同的上述水滴结合成一个较大的水滴,其电势值为多少(假定结合时电荷没有漏失)?

分析:将带电水滴作导体球处理,电荷均匀分布在球的表面。利用均匀带电球面电势的结论求解。

解:(1) 设球形水滴的半径为 r,其电势为

$$V_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r}$$

水滴所带的电荷量为 $q=4\pi\varepsilon_0rV_0=6.67\times10^{-11}\ \mathrm{C}$

(2) 设大水滴的半径为 R,其体积为两小水滴体积之和,有

$$\frac{4}{3}\pi R^3=2\times\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{8}{3}\pi r^3$$

大水滴所带的电荷 Q 为两小水滴所带电荷之和，有

$$Q=2q$$

解得大水滴的电势为

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}=2^{\frac{2}{3}}V_0=476\ \mathrm{V}$$

7-27. 两个同心球面，半径分别为 10 cm 和 30 cm。小球面均匀带有 10^{-8} C 正电荷，大球面均匀带有 1.5×10^{-8} C 正电荷。求离球心分别为 20 cm、50 cm 处的电势。

解 1：由电势定义 $V_A=\int_A^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 求解。

设两球面半径分别为 R_1、R_2，带电 q_1、q_2，由高斯定理可求得电场分布为

$$E_0=0,(r<R_1);\quad E_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2},(R_1<r<R_2);\quad E_2=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},(r>R_2)$$

则 $r_1=20$ cm 处的电势为

$$V_1=\int_{r_1}^{R_2}\boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{R_2}^{\infty}\boldsymbol{E}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=900\ \mathrm{V}$$

$r_2=50$ cm 处的电势为　$V_2=\int_{r_2}^{\infty}\boldsymbol{E}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=450\ \mathrm{V}$

解 2：由各球面电势的叠加求解。

设小球面的电势为 V_{q1}，大球面的电势为 V_{q2}，则空间某点处的电势为 $V=V_{q1}+V_{q2}$。带电球面电势分布的特征是：球内与球面等电势；球外电势与距离成反比。

$r_1=20$ cm 处的电势，为小球面外和大球面内电势的代数和。有

$$V_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=900\ \mathrm{V}$$

$r_2=50$ cm 处的电势，为两球面外电势的代数和。有

$$V_2=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=450\ \mathrm{V}$$

7-28. 电荷 Q 均匀分布在半径为 R 的球体内，计算球内球外的电势分布。

解 1:设球体内和球体外的电场强度分别为 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$,由高斯定理

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=E\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V$$

式中

$$\rho=\frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}}=\frac{3Q}{4\pi R^3}$$

可得球内电场强度 $\boldsymbol{E}_1$ 为

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\boldsymbol{e}_0 \quad (0\leqslant r\leqslant R)$$

球外的电场强度 $\boldsymbol{E}_2$ 为

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_0 \quad (r\geqslant R)$$

则球体内 r 处的电势为

$$\begin{aligned}V&=\int_r^R \boldsymbol{E}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_R^\infty \boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_r^R \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\mathrm{d}r+\int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r\\&=\frac{Q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3} \quad (0\leqslant r\leqslant R)\end{aligned}$$

球外 r 处的电势为

$$V=\int_r^\infty \boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (r\geqslant R)$$

球外的电势相当于电荷 Q 集中在球心的点电荷电势。

解 2:以 r 为半径作球面,将带电球体分割成半径为 r 的球体和厚度为 $(R-r)$ 的球壳两部分,则 r 处的电势为这两部分带电体的电势 V_1 和 V_2 的代数和,即 $V=V_1+V_2$。

设球体带电荷 q,则 r 处的电势 V_1 为 q 集中在球心的点电荷电势

$$V_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

式中 q 为

$$q=\rho\frac{4\pi r^3}{3}=\frac{Qr^3}{R^3}$$

所以

$$V_1=\frac{Qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

V_2 为厚为 $(R-r)$ 带电球壳内表面的电势。将球壳分割为无数厚度为 $\mathrm{d}r$ 的薄球壳,每个薄球壳都可视作均匀带电球面,而 r 处在每个球面内部,与球面有相同的电势。每个薄球壳的带电荷量为

$$dq=\rho 4\pi r^2 dr$$

电势为
$$dV_2=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}r dr$$

积分得球壳内表面的电势为

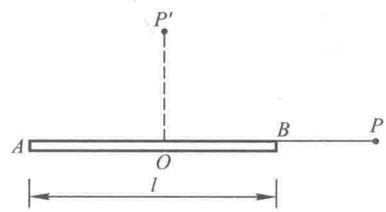
$$V_2=\int dV_2=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\int_r^R r dr=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R^2-r^2)=\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(R^2-r^2)$$

所以,球体内 r 处的电势为

$$V=V_1+V_2=\frac{Q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\quad (0\leqslant r\leqslant R)$$

与解 1 所得结果相同。

7-29. 如习题 7-29 图所示,一长为 l 的细长直杆,水平放置,杆上均匀带电,电荷量为 q。试求:(1) 在杆的延长线上任意一点的电势和电场强度;(2) 在杆的垂直平分线上任意一点的电势和电场强度。



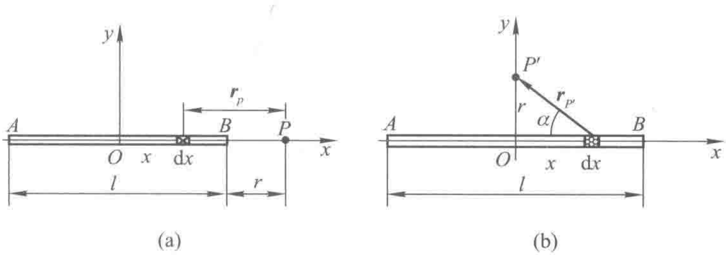
习题 7-29 图

解:(1) 设 P 点距直杆 B 端 r,取坐标系如解图 7-29(a)所示。在直杆上 x 处取电荷微元 $dq=\lambda dx,\lambda=q/l$。$dq$ 在 P 处的电势为点电荷电势,有

$$dV_P=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r_P}=\frac{q dx}{4\pi\varepsilon_0 l\left(\frac{l}{2}+r-x\right)}$$

对上式积分,得直杆上所有电荷在 P 点的电势,为

$$V_P=\int dV=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{dx}{\left(\frac{l}{2}+r-x\right)}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(1+\frac{l}{r}\right)$$



解图 7-29

杆的延长线上任意点 P 的电势 $V_P=V(r)$。利用电场强度与电势梯度的关系

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial r}$$

得
$$E_x=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\frac{\partial}{\partial r}\left[\ln\left(\frac{r+l}{r}\right)\right]=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+l}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r(r+l)}$$

在 B 端外侧各点处，E_x 沿 x 轴正向；在 A 端外侧各点处则沿 x 轴反向。

(2) 如解图 7-29(b)所示，设 P' 点与直杆中心的垂直距离为 r。电荷微元 $\mathrm{d}q$ 在 P' 点的电势为

$$\mathrm{d}V_{P'}=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r_{P'}}=\frac{q\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 l\sqrt{x^2+r^2}}$$

P' 点对直杆对称，故积分求电势时，有

$$V_{P'}=\int\mathrm{d}V_{P'}=\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 l}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{l+\sqrt{l^2+4r^2}}{2r}$$

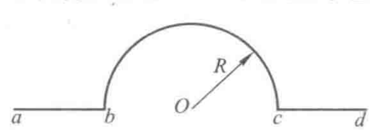
由电场强度与电势梯度的关系可求得垂直平分线上的电场强度，有

$$E_y=-\frac{\partial V}{\partial r}=-\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\frac{\partial}{\partial r}\left[\ln\frac{l+\sqrt{l^2+4r^2}}{2r}\right]$$

$$=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left[\frac{1}{r}-\frac{4r}{\sqrt{l^2+4r^2}\,(l+\sqrt{l^2+4r^2})}\right]=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{l^2+4r^2}}$$

当 $r\gg l$ 时，以上计算得到的 E_x 和 E_y，都将趋于点电荷的电场强度表达式。

7-30. 一均匀带电细线的中部被弯成半圆环状，如习题 7-30 图所示，电荷线密度为 λ，ab 和 cd 段的长度均为 R。求圆心 O 点的电势。



习题 7-30 图

解：根据电势叠加原理，O 点的电势为三段带电细线各自在 O 点电势的代数和。

ab 和 cd 段在 O 点有的相同电势值，只需计算一段乘以 2 即可。现以 cd 段为对象进行计算，取 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$，在 O 点的电势为

$$\mathrm{d}V_{cd}=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 x}=\frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

$$V_{cd}=\int\mathrm{d}V_{cd}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{2R}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln 2$$

ab 和 cd 段在 O 点的电势为

$$V_{a-d}=2V_{cd}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln 2$$

半圆环上的 dq 在 O 点的电势为

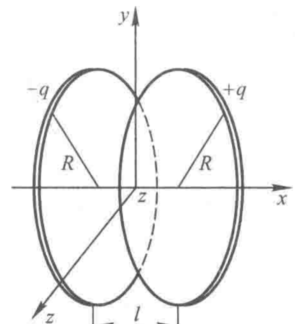
$$dV_R=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

在 O 点的电势为 $$V_R=\int dV_R=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi R}dl=\frac{\lambda}{4\varepsilon_0}$$

所以,整条带电细线在 O 点的电势为

$$V=V_R+V_{a-d}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}(\pi+2\ln 2)$$

7-31. 如习题 7-31 图所示,两个平行放置的均匀带电圆环,它们的半径均为 R,电荷量分别为 $+q$ 和 $-q$,其间距离为 l,且 $l\ll R$,以两环的对称中心为坐标原点。(1) 试求垂直于环面的 Ox 轴上的电势分布;(2) 证明:当 $x\gg R$ 时,$V=\dfrac{ql}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$;(3) 求 Ox 轴上远处(即 $x\gg R$)的电场强度分布。



习题 7-31 图

解:(1) Ox 轴上任意 P 点的电势为两个圆环各自在该点电势的叠加。由于 Ox 轴垂直于环面且过圆心,单个圆环上任一电荷元 dq 到轴上 P 点的距离 r 都相同,因而在 P 点的电势为

$$V=\int_q\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_q dq=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

设电荷量为 $+q$ 的圆环在 P 点的电势为 V_+,上式中取 $r=\sqrt{R^2+\left(x-\dfrac{l}{2}\right)^2}$,有

$$V_+=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+\left(x-\dfrac{l}{2}\right)^2}}$$

同理,电荷量为 $-q$ 的圆环在 P 点的电势为

$$V_-=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+\left(x+\dfrac{l}{2}\right)^2}}$$

所以,有

$$V(x)=V_++V_-=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+\left(x-\dfrac{l}{2}\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+\left(x+\dfrac{l}{2}\right)^2}}\right)$$

据题意 $l \ll R$，由上式得 Ox 轴上的电势分布为

$$V(x)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2-xl}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2+xl}}\right)$$

(2) $x \gg R$ 时，必有 $x \gg l$，上式括号中的因子可表示为

$$\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2\pm xl}}=\frac{1}{x\sqrt{1\pm\frac{l}{x}+\left(\frac{R}{x}\right)^2}}=\frac{1}{x}\left(1\pm\frac{l}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{x}\left[1\mp\frac{l}{2x}\pm\cdots\right]=\frac{1}{x}\left[1\mp\frac{l}{2x}\right]$$

所以，可得

$$V(x)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}\left[\left(1+\frac{l}{2x}\right)-\left(1-\frac{l}{2x}\right)\right]=\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

(3) 由电场强度与电势梯度的关系，对 $x \gg R$ 时的电势分布求梯度，解得 Ox 轴上远处的电场强度分布。

$$E_x=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=\frac{ql}{2\pi\varepsilon_0 x^3}$$

显然，这就是沿电偶极子轴线延长线的电场强度分布。

7-32. 一半径 $R=8\ \mathrm{cm}$ 的圆盘，其上均匀带有面密度为 $\sigma=2\times10^{-5}\ \mathrm{C/m^2}$ 的电荷，求：(1) 轴线上任一点的电势（用该点与盘心的距离 x 来表示）；(2) 从电场强度和电势的关系求该点的电场强度；(3) 计算 $x=6\ \mathrm{cm}$ 处的电势和电场强度。

分析：在圆盘上取同轴细圆环为微元，利用带电圆环在轴线上 x 处电势的结论，由电势的叠加原理求解。

解：(1) 圆盘上半径为 r、宽为 $\mathrm{d}r$ 的细圆环的带电荷量为

$$\mathrm{d}q=\sigma\mathrm{d}S=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r$$

该微元圆环在轴线上 x 处的电势为

$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{\sigma r\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}}$$

圆盘轴线上 x 处的电势为

$$V=\int\mathrm{d}V=\int_0^R\frac{\sigma r\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2}-x\right)$$

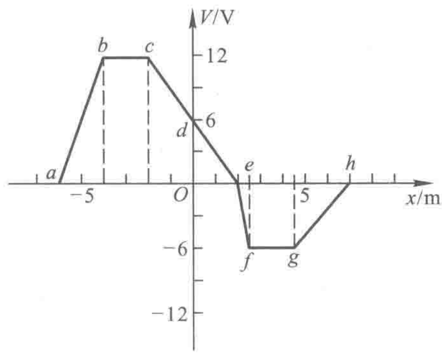
(2) 轴线上的电场强度分布为

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{i}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)\boldsymbol{i}$$

（3）代入数据，得 $x=6$ cm 处

$$V=4.52\times10^{4}\ \text{V},\quad \boldsymbol{E}=4.52\times10^{5}\ \boldsymbol{i}\ \text{V/m}$$

7-33. 设电势沿 Ox 轴的变化曲线如习题 7-33 图所示。试对所示各区间的电势分布（忽略区间端点的情况）确定电场强度的 x 分量，并作出 E_x 对 x 的关系图线。



习题 7-33 图

解：在 a—b 区间：$E_x=-\dfrac{\Delta V}{\Delta x}=-\dfrac{12-0}{-4-(-6)}\ \text{V/m}=-6.0\ \text{V/m}$

在 b—c 区间：$E_x=-\dfrac{\Delta V}{\Delta x}=0$

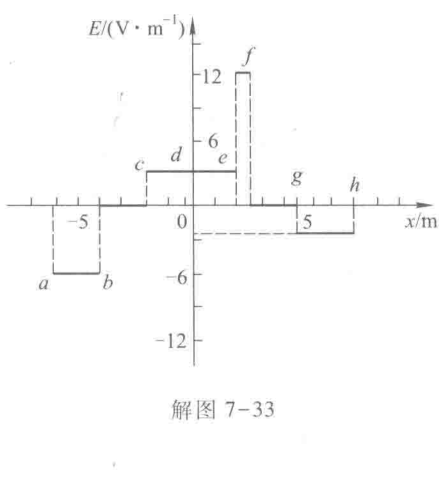
在 c—e 区间：$E_x=-\dfrac{\Delta V}{\Delta x}=-\dfrac{0-12}{2-(-2)}\ \text{V/m}=3.0\ \text{V/m}$

在 e—f 区间：$E_x=-\dfrac{\Delta V}{\Delta x}=-\dfrac{-6-0}{2.5-2}\ \text{V/m}=12\ \text{V/m}$

在 f—g 区间：$E_x=-\dfrac{\Delta V}{\Delta x}=0$

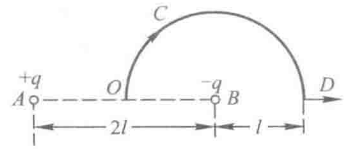
在 g—h 区间：$E_x=-\dfrac{\Delta V}{\Delta x}=-\dfrac{0-(-6)}{7-4.5}\ \text{V/m}=-2.4\ \text{V/m}$

E_x-x 关系曲线如解图 7-33 所示。



解图 7-33

7-34. 如习题 7-34 图所示，$AB=2l$，OCD 是以 B 为中心、l 为半径的半圆，A 点处有正电荷 $+q$，B 点处有负电荷 $-q$，求：(1) 把单位正电荷从 O 点沿 OCD 移到 D 点，电场力对它做了多少功？(2) 把单位正电荷从 D 点沿 AB 的延长线移到无穷远处，电场力对它做了多少功？



习题 7-34 图

解 1：静电场力做功与路径无关，由电势差求解。

$$(1)\ V_O=0,V_D=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{3l}-\frac{q}{l}\right)=-\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l},A_{OD}=q_0(V_O-V_D)=\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

$$(2)\ V_\infty=0,A_{D\infty}=q_0(V_D-V_\infty)=-\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

解 2：利用功的定义求解。沿 AB 的延长线取坐标轴 Ox，原点在 O 点。

(1) 把单位正电荷 q_0 从 O 点沿 OCD 移到 D 点，$-q$ 的场强 $\boldsymbol{E}_{-q}$ 处处垂直于 q_0 的位移，电场力做功 A_{-q} 为零。所以，电场力做功为

$$A_{OD}=A_{-q}+A_{+q}=0+\int_0^{2l}\boldsymbol{F}_q\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{q_0q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2l}\frac{\mathrm{d}x}{(x+l)^2}=\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

$$(2)\qquad A_{D\infty}=\int_{2l}^{\infty}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{q_0q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{2l}^{\infty}\left(\frac{1}{(x+l)^2}-\frac{1}{(x-l)^2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

7-35. 在氢原子中，正常状态下电子与原子核约距离为 5.29×10^{-11} m。已知氢原子核和电子的带电荷量为 1.6×10^{-19} C。如把原子中的电子从正常状态下拉开到无穷远处，所需的能量是多少电子伏。这能量就是氢原子的电离能。

解：质子和电子的电荷量为 $\pm e$，电子绕质子作半径为 r 的圆周运动，有

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=m_e\frac{v^2}{r}$$

电子的动能为
$$E_k=\frac{1}{2}m_e v^2=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

氢原子系统的电势能为
$$E_p=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

系统能量为
$$E=E_k+E_p=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}=-2.18\times10^{-18}\ \mathrm{J}=-13.6\ \mathrm{eV}$$

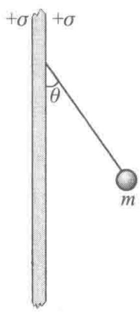
7-36. 有一块很大的带电板及一小球，已知小球的质量为 $m=1.0\times10^{-3}$ g，带有电荷量 $q=2.0\times10^{-8}$ C。小球悬挂在一丝线的下端，平衡时悬线与板面间的夹角为 30°，如习题 7-36 图所示。试计算带电板上的电荷面密度 σ。

解：小球受电场力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}$、重力 $\boldsymbol{G}$ 和悬线张力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$。平衡时有

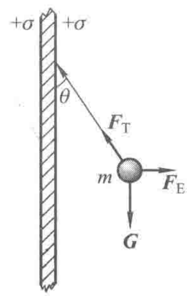
$$F_{\mathrm{E}}-F_{\mathrm{T}}\sin\theta=0 \quad 和 \quad F_{\mathrm{T}}\cos\theta-mg=0$$

式中 $F_{\mathrm{E}}=qE=q\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$，解得

$$\sigma=\frac{\varepsilon_0 mg\tan\theta}{q}=2.5\times10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}$$



习题 7-36 图



解图 7-36

7-37. 试证明：静电平衡条件下，导体表面单位面积受的力为 $\boldsymbol{F}'=\dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r$，其中 σ 为电荷面密度，$\boldsymbol{e}_r$ 为表面的外法线方向的单位矢量。此力方向与电荷的正、负无关，总指向导体外部。

证：取静电平衡条件下导体表面小面积 ΔS，带电荷量为 $\Delta q=\sigma\Delta S$，受力为

$$\boldsymbol{F}=\Delta q\boldsymbol{E}'$$

式中 $\boldsymbol{E}'$为除 Δq 外，其他所有电荷（导体上及导体外的）在 ΔS 处的合场强。

设 ΔS 上所带电荷在其两侧产生的电场强度分别为 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$。在无限接近导体表面处，可把 ΔS 看作无限大平面，有

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r \quad 和 \quad \boldsymbol{E}_2=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r$$

根据静电平衡条件，在 ΔS 处的导体内侧的合场强为零，有

$$\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}'=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{E}'=0$$

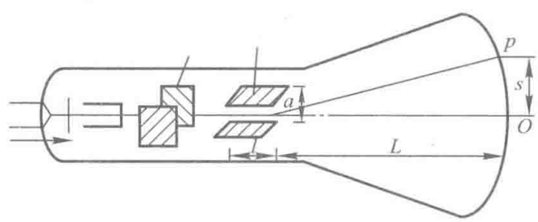
得
$$E'=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}e_r$$

于是,有
$$F=\Delta qE'=\sigma\Delta S\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}e_r=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\Delta Se_r$$

所以,单位面积受力为
$$F'=\frac{F}{\Delta S}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}e_r$$

命题得证。

7-38. 一示波管如习题 7-38 图所示,电子由阴极发射出来后,在阴极和阳极之间的电场作用下得到加速,经水平偏转板和垂直偏转板射到荧光屏上。设阴极和阳极之间的电压为 800 V,今在垂直偏转板上加上电压 80 V,已知垂直偏转板之间相距 $a=2.0$ cm,板长 $l=4.0$ cm,偏转板末端和荧光屏相距 $L=18.0$ cm。求荧光屏上亮点偏离中心的距离 s。(电子的质量 $m=9.1\times10^{-31}$ kg,电荷量绝对值 $e=1.6\times10^{-19}$ C)



习题 7-38 图

分析:电子在阴极和阳极之间被加速后,作水平的匀速直线运动,在垂直偏转板间被垂直加速,离开偏转板后作匀速直线运动。

解:电子经阴、阳两极间的加速后获水平运动速率 v_x,由 $\frac{1}{2}mv_x^2=eU_x$ 可得

$$v_x=\sqrt{\frac{2eU_x}{m}}=\sqrt{\frac{2\times1.6\times10^{-19}\times800}{9.1\times10^{-31}}}\ \text{m/s}=1.68\times10^7\ \text{m/s}$$

电子在垂直偏转板内被垂直加速,有

$$F=eE_y=e\frac{U_y}{a}=ma_y$$

在通过垂直偏转板的时段 Δt_1 内,电子可获得垂直运动速率为

$$v_y=a_y\Delta t_1=\frac{eU_y}{am}\frac{l}{v_x}=1.68\times10^6\ \text{m/s}$$

荧光屏上亮点偏离中心的距离为

$$\Delta y = v_y \Delta t_2 = \frac{eU_y lL}{amv_x^2} = \frac{LlU_y}{2aU_x} = 1.8 \times 10^{-2}\ \text{m}$$

7-39. 如习题 7-39 图所示，长为 l 的两根相同的细棒，均匀带电，电荷密度为 λ，沿同一直线放置，两棒的近端相距也是 l，求两棒间的电场力。

习题 7-39 图

分析：可从一棒处在另一棒的电场中受电场力求解，或直接从两棒电荷间的相互作用力求解。

解 1：取坐标轴 Ox 如解图 7-39 所示。左棒电荷元 $\lambda\mathrm{d}x$ 在右棒 x'处的电场强度为

$$\mathrm{d}E = \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 (x'-x)^2}$$

解图 7-39

右棒 x'处，由左棒激发的电场强度为

$$E = \int \mathrm{d}E = \int_0^l \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 (x'-x)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x'-l} - \frac{1}{x'}\right)$$

右棒电荷元 $\lambda\mathrm{d}x'$受电场力为

$$\mathrm{d}F = \lambda \mathrm{d}x' E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x'-l} - \frac{1}{x'}\right)\mathrm{d}x'$$

右棒所有电荷受电场力为

$$F = \int \mathrm{d}F = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{2l}^{3l}\left(\frac{1}{x'-l} - \frac{1}{x'}\right)\mathrm{d}x' = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{4}{3}$$

$\boldsymbol{F}$ 沿 x 轴正方向。左棒受电场力 $\boldsymbol{F}' = -\boldsymbol{F}$。

解 2：右棒电荷元 $\lambda\mathrm{d}x'$与左棒电荷元 $\lambda\mathrm{d}x$ 之间的库仑力为

$$\mathrm{d}F = \frac{\lambda^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}x'}{4\pi\varepsilon_0 (x'-x)^2}$$

右棒受左棒作用力为

$$F = \int \mathrm{d}F = \int_{2l}^{3l}\mathrm{d}x' \int_0^l \frac{\lambda^2 \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 (x'-x)^2} = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{4}{3}$$

所得结果与解 1 相同。

7-40. 一半径为 R 的均匀带电球体，电荷量为 $+Q$。今将点电荷 $\pm q$ 和负电荷 $-q$ 分别从无穷远处移到该球附近。如先把 $+q$ 移到距球心 r 处，再把 $-q$ 移到 $r+l$ 处，且 $l \ll r$，试求电场力做的功。

分析：在电荷 Q 的电场中从无穷远处将 q 移近，仅有 Q 的电场力做负功；在 q 到位后再移近 $-q$，则由 $Q+q$ 的电场力做正功。电场力的功，可利用电势差与功的关系求解。

解：根据功的定义，将 q 从无穷远处移到距球心 r 处，Q 的电场力的功为

$$A_q = \int_\infty^r \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}' = q\int_\infty^r \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$$= -q\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r' = q\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

A_q 直接用电场力的功与电势差关系表示，有

$$A_q = q(-\Delta V) = -q(V_r - V_\infty) = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

将 $-q$ 从无穷远处移到距球心 $r+l$ 处，$Q+q$ 的电场力的功为

$$A_{-q} = -q(-\Delta V) = q(V_{r+l} - V_\infty) = q\left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(r+l)} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\right]$$

先后移动 $\pm q$ 电场力的功为

$$A = A_q + A_{-q} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r+l} - \frac{1}{r}\right) + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}$$

$l \ll r$ 时，有

$$A = -\frac{Qql}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}$$

6. 静电平衡条件

7-41. 点电荷 $q = 4.0\times10^{-10}$ C，处在导体球壳的中心，壳的内外半径分别为 $R_1 = 2.0$ cm 和 $R_2 = 3.0$ cm，求：(1) 导体球壳的电势；(2) 离球心 $r = 1.0$ cm 处的电势；(3) 把点电荷移开球心 1.0 cm 后球心 O 点的电势及导体球壳的电势。

分析：静电平衡时，导体内的电场强度为零。这是由于球壳内表面感应的 $-q$ 中止了 q 的电场线，与 $-q$ 对应的感应电荷 $+q$ 分布在球壳外表面。当点电荷 q 在球壳中心时，感应电荷 $-q$ 均匀分布于内表面；当 q 偏离中心时，内表面感应电荷总量为 $-q$，但非均匀分布。在球壳外部无其他带电体，或充满均

匀、各向同性介质条件下，感应电荷 $+q$ 均匀分布在外表面，否则为非均匀分布。

静电平衡时，导体是个等势体，与感应电荷的分布是否均匀无关。

解： 当点电荷 q 处在导体球壳中心时，由高斯定理可得空间各区域的电场分布为

$$E_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\quad (r<R_1)$$

$$E_2=0\quad (R_1<r<R_2)$$

$$E_3=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\quad (r>R_2)$$

(1) 导体球壳的电势

$$V_{R_2}=\int_{R_2}^{\infty}\boldsymbol{E}_3\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{R_2}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=120\ \mathrm{V}$$

(2) 离球心 $r=1.0\ \mathrm{cm}$ 处的电势

$$V_r=\int_{r}^{R_1}\boldsymbol{E}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{R_1}^{R_2}\boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{R_2}^{\infty}\boldsymbol{E}_3\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=300\ \mathrm{V}$$

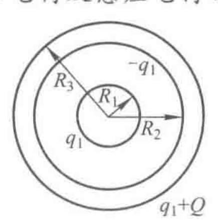
(3) 把点电荷 q 移开球心 1.0 cm，球心 O 点的电势由电势的叠加原理可得

$$V_O=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=(360-180+120)\ \mathrm{V}=300\ \mathrm{V}$$

导体球壳外表面的电荷分布没有变化，故球壳电势也无变化，仍为 120 V。

7-42. 半径为 $R_1=1.0\ \mathrm{cm}$ 的导体球，带有电荷 $q_1=1.0\times10^{-10}\ \mathrm{C}$，球外有一个内、外半径分别为 $R_2=3.0\ \mathrm{cm}$、$R_3=4.0\ \mathrm{cm}$ 的同心导体球壳，壳上带有电荷 $Q=11\times10^{-10}\ \mathrm{C}$，试计算：(1) 两球的电势 V_1 和 V_2；(2) 用导线把球和壳连接在一起后 V_1 和 V_2 分别是多少？(3) 若不连接球和球壳，而将外球接地，V_1 和 V_2 为多少？

分析：处于静电平衡状态的同心带电导体球和球壳，所带电荷及感应电荷都均匀分布在导体的各表面，导体内的电场强度为零，导体为等势体。确定电荷分布后，由电势和电势差定义求解。



解图 7-42

解： (1) q_1 电荷均匀分布于 R_1 导体球表面，感应电荷 $-q_1$ 均匀分布于 R_2 球壳内表面，感应电荷 q_1 和所带电荷 Q 均匀分布于 R_3 球壳外表面，如解图 7-42 所示。由高斯定理得到各区域的电场分布为

$$E_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\quad (R_1<r<R_2)$$

$$E_2=0\quad (R_2<r<R_3)$$

$$E_3=\frac{q_1+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\quad (r>R_3)$$

由电势定义得导体球电势为

$$\begin{aligned}V_1&=\int_{R_1}^{R_2}\boldsymbol{E}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{R_2}^{R_3}\boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{R_3}^{\infty}\boldsymbol{E}_3\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{q_1+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=3.3\times10^2\ \mathrm{V}\end{aligned}$$

球壳的电势为 $$V_2=\int_{R_3}^{\infty}\boldsymbol{E}_3\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{q_1+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=2.7\times10^2\ \mathrm{V}$$

球与球壳间的电势差为 $$\Delta V=V_1-V_2=60\ \mathrm{V}$$

(2) 球和球壳用导线相连接并处静电平衡状态时,整体等电势。所带电荷 q_1+Q 都分布于球壳外表面,有

$$V_1=V_2=\frac{q_1+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=2.7\times10^2\ \mathrm{V}$$

(3) 外球壳接地后,因球壳外没有其他带电体,故球壳外表面无电荷分布,球壳外的电场强度为零,有 $V_2=0$。但导体球仍带电荷 q_1,相对电势零点的电势就是球与球壳间的电势差,为

$$V_1'=\Delta V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1}-\frac{q_1}{R_2}\right)=60\ \mathrm{V}$$

7-43. 半径为 r_1、$r_2(r_1<r_2)$ 的两个同心导体球壳互相绝缘,现把 $+q$ 的电荷量给予内球,求:(1) 外球的电荷量及电势;(2) 把外球接地后再重新绝缘,外球的电荷量及电势;(3) 然后把内球接地,内球的电荷量及外球的电势。

分析:根据导体的静电平衡条件和性质,确定各种情况下导体内、外表面的电荷分布,是正确求解本题的前提。

解:(1) 内球带电 $+q$,则外球内表面分布有感应电荷 $-q$,外表面分布有感应电荷 $+q$。外球壳的电势为

$$V_2=\int_{r_2}^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

(2) 外球接地并处于静电平衡状态后,再重新绝缘,外球的内表面仍分布有电荷 $-q$,外表面无电荷分布。所以,外球带电为 $-q$,外球的电势

$$V_2' = \int_{r_2}^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

(3) 在外球壳带电$-q$时,将内球接地,其电势$V_1=0$,并带有电荷$q_1 \neq 0$。这是电荷重新分布达静电平衡状态的结果。设外球电势为V_2'',外球内表面分布电荷$-q_1$,外表面分布电荷$(-q+q_1)$。由电势的叠加原理,内球电势为

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{-q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \frac{-q+q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = 0$$

得
$$q_1 = \frac{r_1}{r_2} q$$

外球的电势为

$$V_2'' = \frac{-q+q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = -\frac{(r_2-r_1)q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$$

7-44. 一半径为R的金属球,原来不带电,将它放在点电荷$+q$的电场中,球心与点电荷间距离为$r(r>R)$。求金属球上感应电荷在球心处的电场强度和金属球的电势。若将金属球接地,求其上的电荷量。

分析:不带电的金属球处于点电荷$+q$的电场中,将感应出等量异号的电荷,分布于导体球的外表面。静电平衡时,所有电荷的电场强度叠加的结果,使得导体球内的电场强度为零,成为等势体。

解:(1) 设所有电荷在球心处激发的合场强为$\boldsymbol{E}_0$,其中点电荷$+q$在球心处的电场强度为$\boldsymbol{E}_q$,感应电荷的电场强度为$\boldsymbol{E}$。静电平衡时,导体内部O点处的合场强为零,有

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}_q + \boldsymbol{E}' = 0$$

所以,金属球上感应电荷在球心处的电场强度为

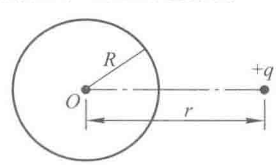
$$\boldsymbol{E}' = -\boldsymbol{E}_q = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$$

式中$\boldsymbol{e}_r$为$+q$指向O的单位矢量,球心处的$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{E}_q$大小相等方向相反。

设所有电荷在球心O点处电势的代数和为V_0,其中$+q$在球心处的电势为V_q,感应电荷的电势为V'。等量异号的感应电荷分布于球面,它们在球心处的电势为

$$V' = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R} = 0$$

故有
$$V_0 = V_q + V' = V_q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



解图 7-44

就是点电荷$+q$在球心处的电势,也是金属球的电势。

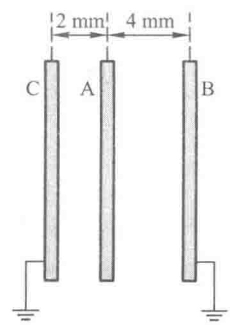
（2）若将金属球接地，金属球与地球间将有电荷转移并重新分布。设金属球与地球达静电平衡状态时，带电为 q'，与地球等电势，$V_0'=0$，有

$$V_0'=V_q+V_q'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}=0$$

得

$$q'=-\frac{R}{r}q$$

7-45. 如习题 7-45 图所示，三平行金属板 A、B、C 面积均为 200 cm^2，A、B 间相距 4.0 mm，A、C 间相距 2.0 mm，B 和 C 两板都接地。如果使 A 板带正电 3.0×10^{-7} C，求：(1) B、C 板上的感应电荷；(2) A 板的电势。



习题 7-45 图

分析：静电平衡时，带电金属板 A 与接地的 B、C 间的电势差相同，因 A、B 和 A、C 的间距不同，A 板两侧的场强、电荷面密度不相同。平行金属板可看作无限大，B、C 板外侧无电荷分布。

解：(1) 设 A 板带电量为 q，在相对 B 一侧分布有 q_B，在相对 C 一侧分布有 q_C，并有

$$q=q_B+q_C$$

在 B、C 两板相对 A 的面上分别分布有电荷 $-q_B$ 和 $-q_C$。设 A、B 间的场强为 E_{AB}，A、C 间的场强为 E_{AC}，有

$$E_{AB}=\frac{\sigma_B}{\varepsilon_0}=\frac{q_B}{\varepsilon_0 S}\quad 和 \quad E_{AC}=\frac{\sigma_C}{\varepsilon_0}=\frac{q_C}{\varepsilon_0 S}$$

因 $U_{AB}=U_{AC}$，有

$$E_{AB}d_{AB}=E_{AC}d_{AC}$$

解得

$$q_B=\frac{d_{AC}}{d_{AB}+d_{AC}}q=\frac{2\times10^{-3}}{(4+2)\times10^{-3}}\times3.0\times10^{-7}\ \mathrm{C}=1.0\times10^{-7}\ \mathrm{C}$$

$$q_C=q-q_B=2.0\times10^{-7}\ \mathrm{C}$$

B、C 板上的感应电荷分别为 $-q_B=-1.0\times10^{-7}$ C 和 $-q_C=-2.0\times10^{-7}$ C。

（2）A 板的电势为

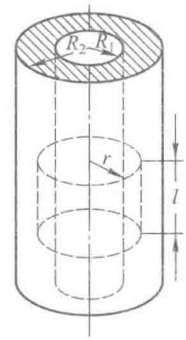
$$V_A=E_{AB}d_{AB}=\frac{q_B}{\varepsilon_0 S}d_{AB}=2.26\times10^3\ \mathrm{V}$$

7-46. 在盖革计数器中有一直径为 2 cm 的金属圆筒，在圆筒轴线上有一条

直径为 0.31 mm 的导线，如果在导线与圆筒之间加上 850 V 的电压，试分别求：(1) 导线外表面附近处的电场强度大小；(2) 圆筒内表面附近处的电场强度大小。

解：如解图 7-46 所示，设直导线单位长度带电荷量为 λ，作同轴的圆柱形高斯面，由高斯定理

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=E2\pi rl=\frac{1}{\varepsilon_0}\lambda l$$



解图 7-46

得
$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r},\quad R_1<r<R_2$$

$$U_{12}=V_{R_1}-V_{R_2}=\int_{R_1}^{R_2}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

由上两式得
$$E=\frac{U_{12}}{r\ln\dfrac{R_2}{R_1}},\quad (R_1<r<R_2)$$

(1) 导线表面处的场强 E_1 为

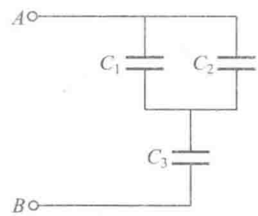
$$E_1=\frac{U_{12}}{R_1\ln\dfrac{R_2}{R_1}}=\frac{850}{0.155\times10^{-3}\times\ln\dfrac{10}{0.155}}\ \mathrm{V/m}=1.32\times10^{6}\ \mathrm{V/m}$$

(2) 圆筒内表面处的场强 E_2 为

$$E_2=\frac{U_{12}}{R_2\ln\dfrac{R_2}{R_1}}=\frac{850}{10\times10^{-3}\times\ln\dfrac{10}{0.155}}\ \mathrm{V/m}=2.04\times10^{4}\ \mathrm{V/m}$$

7. 有电介质时的电场问题和电容的计算

7-47. 如习题 7-47 图所示，$C_1=10\ \mu\mathrm{F}$，$C_2=5.0\ \mu\mathrm{F}$，$C_3=5.0\ \mu\mathrm{F}$。(1) 求 A、B 间的电容；(2) 在 A、B 间加上 100 V 的电压，求 C_2 上的电荷量和电压；(3) 如果 C_1 被击穿，问 C_3 上的电荷量和电压各是多少？



习题 7-47 图

解：(1) 设 A、B 间的电容量为 C_{AB}，有

$$C_{AB}=\frac{q}{U_{AB}}$$

等效电容 C_{AB} 由并联的 C_1、C_2 与 C_3 串联而成。当 C_1 和 C_2 的上极板有电荷 q_1 和 q_2 时，下极板的感应电荷为 $-q_1$ 和 $-q_2$，C_3 上极板的感应电荷为 $q_3=q_1+q_2$，下极板则为 $-q_3$。

所以,等效电容 C_{AB} 极板的电荷量为 $q=q_3=(q_1+q_2)$。

当 C_{AB} 极板间的电势差为 U_{AB} 时,设 C_1、C_2 和 C_3 极板间的电势差分别为 U_1、U_2 和 U_3,有 $U_1=U_2, U_1+U_3=U_{AB}$。由此可得

$$C_{AB}=\frac{q}{U_{AB}}=\frac{q_1+q_2}{U_1+U_3}=\frac{1}{\dfrac{U_1+U_3}{q_1+q_2}}=\frac{1}{\dfrac{U_1}{q_1+q_2}+\dfrac{U_3}{q_3}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{1}{C_1+C_2}+\dfrac{1}{C_3}}=\frac{(C_1+C_2)C_3}{C_1+C_2+C_3}=3.75\ \mu\text{F}$$

直接用电容器串并联规律求解,结果相同。考虑 C_1 与 C_2 并联后再与 C_3 串联,有

$$\frac{1}{C_{\text{AB}}}=\frac{1}{C_1+C_2}+\frac{1}{C_3}$$

得
$$C_{AB}=\frac{(C_1+C_2)C_3}{C_1+C_2+C_3}=3.75\ \mu\text{F}$$

(2) 因 $q_1+q_2=q_3=q, U_1=U_2, U_1+U_3=U_{AB}$。由电容器定义式 $q=CU$,有

$$(C_1+C_2)U_2=C_3(U_{AB}-U_2)$$

得
$$U_2=\frac{C_3}{C_1+C_2+C_3}U_{AB}=25\ \text{V}$$

$$q_2=C_2U_2=1.25\times10^{-4}\ \text{C}$$

(3) 若 C_1 被击穿,则 $U_{AB}=U_3=100\ \text{V}, q_3=C_3U_3=C_3U_{AB}=5.0\times10^{-4}\ \text{C}$

7-48. 平板电容器极板间的距离为 d,保持极板上的电荷不变,把相对电容率为 ε_r、厚度为 $\delta(\delta<d)$ 的玻璃板插入极板间,求无玻璃板时和插入玻璃板后极板间电势差的比。

解:设极板上保持不变的电荷面密度为 σ,极板间无玻璃板时的电场强度为 E_0,电势差为 U_0,有

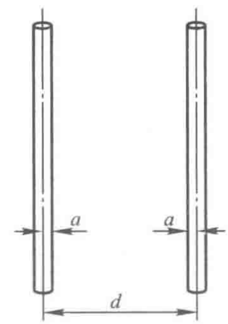
$$U_0=E_0d=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$$

设插入玻璃板后,极板间的电势差为 U,玻璃板内的电场强度为 E',有

$$U=E_0(d-\delta)+E'\delta=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-\delta)+\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\delta$$

得
$$\frac{U_0}{U}=\frac{\varepsilon_r d}{\varepsilon_r d-(\varepsilon_r-1)\delta}$$

7-49. 半径为 a 的两根平行直导线，相距为 $d(d\gg a)$，如习题 7-49 图所示。试求单位长度的电容。



习题 7-49 图

解：如解图 7-49 所示，设两直导线的电荷线密度分别为 λ 和 $-\lambda$。利用高斯定理和电场强度叠加原理，可得两平行轴线平面内任意点 r 处的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-r)}\right]\boldsymbol{e}_r$$

两直导线间的电势差为

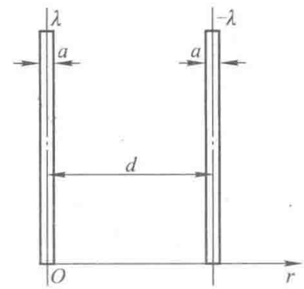
$$U_{+-}=\int_a^{d-a}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\int_a^{d-a}\frac{1}{r}\mathrm{d}r+\int_a^{d-a}\frac{1}{d-r}\mathrm{d}r\right]$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(2\ln\frac{d-a}{a}\right)=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a}$$

$d\gg a$ 时，有 $$U_{+-}=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{a}$$

两直导线间单位长度的电容为

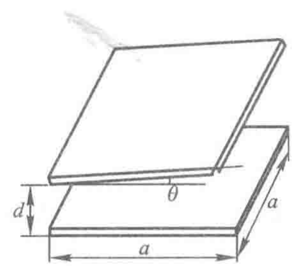
$$C=\frac{\lambda}{U_{+-}}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d}{a}}$$



解图 7-49

7-50. 一平板电容器，两极板都是边长为 a 的正方形金属平板，两板不严格平行，其间有一夹角 θ，如习题 7-50 图所示。证明：当 $\theta\ll\frac{d}{a}$ 时，略去边缘效应，它的电容为

$$C=\varepsilon_0\frac{a^2}{d}\left(1-\frac{a\theta}{2d}\right)$$

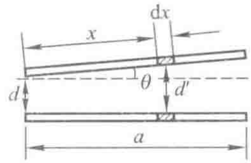


习题 7-50 图

分析：不严格平行的大平板带电时，内部电场强度分布非均匀，不能直接套用平板电容器公式计算其电容。若将两平板无限细分为平行细长条对，则整个电容器可视作是由无数个细长条微元电容器并联而成的。又由于 $a\theta\ll d$，当金属板带电时，每对平行细长条间的电场强度可认为是均匀分布的，可作平板电容器微元处理。

解：如解图 7-50 所示，取微元平板电容器细长条极板宽 $\mathrm{d}x$，面积为 $\mathrm{d}S=a\mathrm{d}x$，极板间距为 $d'=d+x\theta$，其电容为

$$dC=\varepsilon_0\frac{dS}{d'}=\varepsilon_0\frac{a\,dx}{d+x\theta}.$$



解图 7-50

总电容为

$$C=\int dC=\varepsilon_0\int_0^a\frac{a\,dx}{d+x\theta}=\frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\ln\left(1+\frac{a\theta}{d}\right)$$

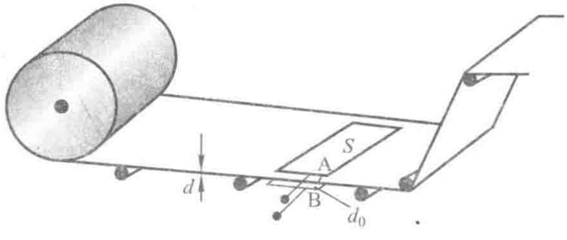
式中$\frac{a\theta}{d}$是小量，将 $\ln\left(1+\frac{a\theta}{d}\right)$ 按泰勒级数展开，有

$$\ln\left(1+\frac{a\theta}{d}\right)=\frac{a\theta}{d}-\frac{1}{2}\left(\frac{a\theta}{d}\right)^2+\cdots$$

略去高次项，仅取前两项，得

$$C=\frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\left[\frac{a\theta}{d}-\frac{1}{2}\left(\frac{a\theta}{d}\right)^2\right]=\varepsilon_0\frac{a^2}{d}\left(1-\frac{a\theta}{2d}\right)$$

7-51. 为了实时检测纺织品、纸张等材料的厚度（待测材料可视作相对电容率为 ε_r的电介质），通常在生产流水线上设置如习题 7-51 图所示的传感装置，其中 A、B 为平板电容器的导体极板，d_0为两极板间的距离，试说明检测原理，并推出所测得的电容 C 与厚度 d 之间的函数关系，如果要检测钢板等金属材料的厚度，结果又将如何？



习题 7-51 图

解：设电容器 C 两极板 A、B 的面积均为 S。极板带电为 q 时，极板间电势差为 U。当厚度为 d，相对电容率为 ε_r的电介质片平行于极板置于电容器内部时，有

$$C=\frac{q}{U}=\frac{q}{E_0(d_0-d)+E'd}$$

式中 E_0为真空中的电场强度，E'为介质内的电场强度，有

$$E_0=\frac{q}{\varepsilon_0 S},\quad E'=\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$

可得

$$C=\frac{q}{\frac{q}{\varepsilon_0 S}(d_0-d)+\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}d}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d+\varepsilon_r(d_0-d)}$$

在实时检测中，已知极板面积 S、极板间距 d_0，测得电容 C 后，即可由上式得到被检测物的厚度 d。

以上结果也可通过厚度为 $(d-d_0)$ 的空气电容器 C_1 和厚度为 d 的介质电容器 C_2 的串联解得，即

$$C_1=\varepsilon_0\frac{S}{(d_0-d)},C_2=\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S}{d}$$

串联电容为

$$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d+\varepsilon_r(d_0-d)}$$

可得

$$d=\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r-1}d_0-\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{(\varepsilon_r-1)C}$$

如果在 A、B 间放入平行的金属片，因静电平衡时金属内部的电场强度 $E'=0$，或 $C_2=0$，可得

$$C=C_1=\varepsilon_0\frac{S}{(d_0-d)}$$

式中 d 为金属片的厚度，即

$$d=d_0-\frac{\varepsilon_0 S}{C}$$

7-52. 一单芯同轴电缆，中心是半径 $R_1=0.5\ \text{cm}$ 的金属导线，它外围包有一层 $\varepsilon_r=5$ 的固体介质，最外层是金属包皮，半径 $R_2=1.25\ \text{cm}$，若介质的击穿场强 $E_m=40\ \text{kV/cm}$，问此电缆能承受多大的电压。

解：设金属导线和金属包皮在承受电压时单位长度的带电荷量为 $\pm\lambda$，利用高斯定理可得介质内电场强度为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$$

$E\propto\frac{1}{r}$ 表明，介质内 R_1 处表面的场强最大。当导线和金属包皮间的电势差达到电缆可承受的最大电压 U_m 时，R_1 处的场强为 E_m，有

$$\lambda_m=2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1E_m$$

导线和金属包皮间的电势差为

$$U=V_1-V_2=\int_{R_1}^{R_2}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

电缆可承受的最大电压为

$$U_m=\frac{\lambda_m}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}=R_1E_m\ln\frac{R_2}{R_1}$$

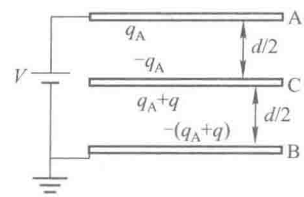
代入数据，得

$$U_m = R_1 E_m \ln \frac{R_2}{R_1} = 0.5\times40\times\ln \frac{1.25}{0.5}\ \text{kV} = 18.3\ \text{kV}$$

7-53. 两块相互平行的大金属板，板面积均为 S，间距为 d，用电源使两板分别维持在电势 V 和零电势。现将第三块相同面积而厚度可略的金属板插在两板的正中间，已知该板上原带有电荷量 q，求该板的电势。

分析：在保持两块金属板间电势差不变的条件下插入带电金属板，导体系统的电荷将重新分布，达到静电平衡状态。

解：设金属板各表面的电荷在静电平衡时的分布如解图 7-53 所示，有



解图 7-53

$$E_{AC} = \frac{q_A}{\varepsilon_0 S},\quad E_{CB} = \frac{q_A+q}{\varepsilon_0 S}$$

C 板电势为 $$V_C = E_{CB}\frac{d}{2}$$

A 板电势为 $$V = V_C + U_{AC}$$

式中 U_{AC} 为 A、C 两板间的电势差

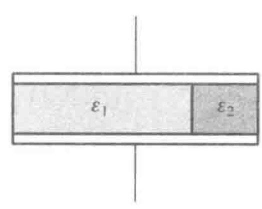
$$U_{AC} = E_{AC}\frac{d}{2}$$

由以上各式，可解得 $$q_A = \frac{\varepsilon_0 S}{d}V - \frac{q}{2}$$

$$V_C = \frac{1}{2}\left(V + \frac{q}{2\varepsilon_0 S}d\right)$$

7-54. 一平板电容器（极板面积为 S，间距为 d）中充满两种电介质（如习题 7-54 图所示），设两种电介质在极板间的面积比 $S_1/S_2=3$，试计算其电容。如电容器带电荷 Q，求板上的电荷面密度及介质表面极化电荷的面密度。

分析：图示平板电容器带电时，两种电介质内的合场强 $\boldsymbol{E}$ 相同但 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{P}$ 不同，极板上的自由电荷面密度和介质表面的极化电荷面密度也因介质而异。在不计边缘效应，并电介质为均匀、各向同性且充满的情况下，可认为两部分极板及其对应介质表面的电荷均匀分布。



习题 7-54 图

解：(1) 设两种电介质对应的极板面积分别为 S_1 和 S_2，有

$$S=S_1+S_2$$

因 $S_1=3S_2$，可得

$$S_1=\frac{3}{4}S,\quad S_2=\frac{1}{4}S$$

设电容器带电荷 Q 时，极板上自由电荷面密度分别为 σ_1 和 σ_2，有

$$Q=\sigma_1S_1+\sigma_2S_2$$

由高斯定理和介质内的 $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{E}$ 关系，有

$$D_1=\varepsilon_1E_1=\sigma_1,\quad D_2=\varepsilon_2E_2=\sigma_2$$

极板间的电势差为

$$U=E_1d=E_2d$$

可解得

$$Q=\frac{3\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4\varepsilon_2}\sigma_2S$$

由电容定义，解得

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{(3\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{4d}S$$

上述结果也可根据并联电容规律求得　$C=C_1+C_2$

式中

$$C_1=\varepsilon_1\frac{S_1}{d},\quad C_2=\varepsilon_2\frac{S_2}{d}$$

得

$$C=\varepsilon_1\frac{3S}{4d}+\varepsilon_2\frac{S}{4d}=\frac{(3\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{4d}S$$

（2）解以上方程可得电容器上极板的自由电荷面密度分别为

$$\sigma_1=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sigma_2=\frac{4\varepsilon_1Q}{(3\varepsilon_1+\varepsilon_2)S}$$

$$\sigma_2=\frac{4\varepsilon_2Q}{(3\varepsilon_1+\varepsilon_2)S}$$

下极板的自由电荷面密度与 σ_1 和 σ_2 的符号相反。

设两种介质表面的极化电荷面密度分别为 σ_1' 和 σ_2'，极化电荷面密度与介质极化的关系为

$$\sigma'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n=(\boldsymbol{D}-\varepsilon_0\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{e}_n$$

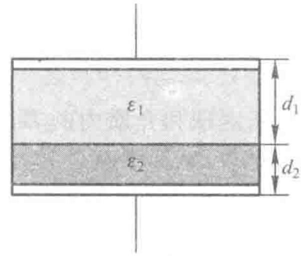
式中 $\boldsymbol{e}_n$ 为介质表面法向的单位矢量（$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的方向向下），可解得两种介质上表面的极化电荷面密度分别为

$$\sigma_1'=-P_1=-(D_1-\varepsilon_0E_1)=-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\sigma_1=-\frac{4(\varepsilon_1-\varepsilon_0)Q}{(3\varepsilon_1+\varepsilon_2)S}$$

$$\sigma_2'=-P_2=-(D_2-\varepsilon_0E_2)=-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\sigma_2=-\frac{4(\varepsilon_2-\varepsilon_0)Q}{(3\varepsilon_1+\varepsilon_2)S}$$

介质 ε_1和 ε_2下表面的极化电荷面密度与上两式的符号相反。

7-55. 如习题 7-55 图所示，平板电容器（极板面积为 S，间距为 d）中间有两层厚度各为 d_1和 d_2（$d=d_1+d_2$）、电容率各为 ε_1和 ε_2的电介质，试计算其电容。当电容器加上电压 U 时，试求出现在两介质交界面上极化电荷的面密度。



习题 7-55 图

解：(1) 设电容器带电荷 Q 时，极板上自由电荷面密度为 σ，两种电介质内的电场强度分别为 E_1和 E_2，电位移矢量分别为 D_1和 D_2。根据有介质时的高斯定理和介质内的 **D-E** 关系，可得

$$D_1=D_2=\sigma,\quad E_1=\frac{D_1}{\varepsilon_1}=\frac{\sigma}{\varepsilon_1},\quad E_2=\frac{D_2}{\varepsilon_2}=\frac{\sigma}{\varepsilon_2}$$

极板间的电势差为

$$U=E_1d_1+E_2d_2=\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)\sigma$$

极板带电荷为

$$Q=\sigma S$$

由电容定义，可得

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1}$$

此结果也可由串联电容规律求得

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

式中

$$C_1=\varepsilon_1\frac{S}{d_1},\quad C_2=\varepsilon_2\frac{S}{d_2}$$

得

$$C=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1}$$

(2) 极化电荷面密度与介质极化的关系为

$$\sigma'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n=(\boldsymbol{D}-\varepsilon_0\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{e}_n$$

式中 $\boldsymbol{e}_n$为介质表面法向的单位矢量，设 $\boldsymbol{D}_1$、$\boldsymbol{E}_1$和 $\boldsymbol{D}_2$、$\boldsymbol{E}_2$的方向均向下。

在介质 ε_1的下表面，有

$$\sigma_1'=\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{e}_{n1}=P_1=D_1-\varepsilon_0E_1$$

在介质 ε_2的上表面，有

$$\sigma_2'=\boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{e}_{n2}=-P_2=-(D_2-\varepsilon_0E_2)$$

解以上各式可得

$$\sigma=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1}U$$

$$\sigma_1'=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\sigma=\frac{\varepsilon_2(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}{\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1}U$$

$$\sigma_2'=-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\sigma=-\frac{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_0)}{\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1}U$$

出现在两介质交界面上的净极化电荷面密度为

$$\sigma_{12}'=\sigma_1'+\sigma_2'=\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\varepsilon_0}{\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1}U$$

7-56. 一平行板电容器的电容为 100 pF，极板的面积为 100 cm^2，极板间充满相对电容率为 5.4 的云母电介质，当极板上电势差为 50 V 时，求：(1) 云母中的电场强度 E；(2) 电容器极板上的自由电荷；(3) 云母电介质面上的极化面电荷。

解：(1) 充满电介质的平行板电容器的电容为

$$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$$

极板间的均匀电场强度大小为

$$E=\frac{U}{d}=\frac{CU}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$

$$=\frac{100\times10^{-12}\times50}{8.85\times10^{-12}\times5.4\times100\times10^{-4}}\ \mathrm{V/m}=1.05\times10^4\ \mathrm{V/m}$$

(2) 电容器极板上的自由电荷为

$$Q_0=CU=100\times10^{-12}\times50\ \mathrm{C}=5.0\times10^{-9}\ \mathrm{C}$$

(3) 当电容器的上极板为高电势时，介质内的 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{P}$ 均垂直于极板向下。介质表面的极化电荷面密度为

$$\sigma'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n=(\boldsymbol{D}-\varepsilon_0\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{e}_n$$

式中 $D=\varepsilon E=\sigma_0$，$\boldsymbol{e}_n$是介质表面法向的单位矢量。据此可得介质上表面的极化电荷为

$$Q_1'=\sigma_1'S=(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n)S=-PS$$

$$=-\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_0 S=-\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)Q_0=-4.1\times10^{-9}\ \mathrm{C}$$

介质下表面的极化电荷为

$$Q_2'=\sigma_2'S=PS=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)Q_0=4.1\times10^{-9}\ \mathrm{C}$$

7-57. 有两块平行板，面积各为 100 cm^2，板上带有 8.9×10^{-7} C 的等值异号

电荷，两板间充以电介质。已知电介质内部电场强度为 1.4×10^{6} V/m，求：(1) 电介质的相对电容率；(2) 电介质面上的极化面电荷。

解：设极板间距 d 很小，均匀、各向同性电介质充满其间。极板带电时，电介质内的场强均匀分布。

(1) 电介质内场强的大小为 $E=\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\dfrac{Q_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$

得
$$\varepsilon_r=\frac{Q_0}{ES\varepsilon_0}=\frac{8.9\times10^{-7}}{1.4\times10^{6}\times100\times10^{-4}\times8.85\times10^{-12}}=7.18$$

(2) 介质表面的极化面电荷为
$$|Q'|=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)Q_0=7.66\times10^{-7}\ \text{C}$$

7-58. 一块相对电容率 $\varepsilon_r=5$ 的扁平电介质，其扁平面垂直放置于 $D=1\ \text{C/m}^2$ 的均匀电场中，已知电介质的体积为 $0.1\ \text{m}^3$，并且是均匀极化，求：(1) 电介质的电极化强度；(2) 电介质总的电偶极矩。

解：(1) 根据 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{P}$ 三者关系，有
$$D=\varepsilon E=\varepsilon_0\varepsilon_r E$$
和
$$D=\varepsilon_0 E+P$$
可得
$$E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{1}{8.85\times10^{-12}\times5}\ \text{V/m}=2.26\times10^{10}\ \text{V/m}$$
$$P=D-\varepsilon_0 E=D\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)=0.8\ \text{C/m}^2$$

(2) 电介质总的电偶极矩为
$$\sum p_i=P\Delta V=0.8\times0.1\ \text{C}\cdot\text{m}=8\times10^{-2}\ \text{C}\cdot\text{m}$$

7-59. 一电介质板（$\varepsilon_r=4$）垂直于均匀电场放置，如果电介质表面上的极化电荷面密度为 $\sigma'=0.5\ \text{C/m}^2$，求：(1) 电介质里的电极化强度和电位移；(2) 电介质板外的电位移；(3) 电介质板里和板外的电场强度。

解：(1) 对均匀、各向同性电介质，有
$$D=\varepsilon_r\varepsilon_0 E$$
由 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{P}$ 关系，有
$$D=\varepsilon_0 E+P$$
极化电荷面密度与极化强度的关系为
$$\sigma'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n=P_n$$

解得

$$E=\frac{P}{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)}$$

$$P=0.5\ \text{C/m}^2$$

$$D=\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r-1}P=0.67\ \text{C/m}^2$$

（2）电介质内没有自由电荷，由高斯定理可知，电介质板内、外的 **D** 线连续，电位移矢量的大小为

$$D=0.67\ \text{C/m}^2$$

（3）电介质板内、外的电场强度满足场强的叠加原理。电介质板的两平面分布有等量异号极化面电荷，其场强 $\boldsymbol{E}'$ 在电介质内与均匀外电场方向相反。介质板内合场强大小为

$$E_{内}=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=1.88\times10^{10}\ \text{N/C}$$

介质外 $\boldsymbol{E}'=0$，$\varepsilon_r=1$，合场强的大小为

$$E_{外}=\frac{D}{\varepsilon_0}=7.53\times10^{10}\ \text{N/C}$$

7-60. 在一平行板电容器的两板上带有等值异号的电荷，两板间的距离为 5.0 mm，充以 $\varepsilon_r=3$ 的电介质，电介质中的电场强度为 1.0×10^6 V/m，求：（1）电介质中的电位移矢量；（2）平板上的自由电荷面密度；（3）电介质中的极化强度；（4）电介质面上的极化电荷面密度；（5）平行板上自由电荷及电介质面上极化电荷所产生的那一部分电场强度。

解：（1）由介质中的电位移与场强关系 $D=\varepsilon E$，有

$$D=\varepsilon_r\varepsilon_0 E=3.0\times8.85\times10^{-12}\times1.0\times10^6\ \text{C/m}^2=2.66\times10^{-5}\ \text{C/m}^2$$

（2）由高斯定理可得

$$\sigma_0=D=2.66\times10^{-5}\ \text{C/m}^2$$

（3）介质中极化强度大小

$$P=D-\varepsilon_0E=1.77\times10^{-5}\ \text{C/m}^2$$

（4）极化电荷面密度

$$\sigma'=P=1.77\times10^{-5}\ \text{C/m}^2$$

（5）极板上自由电荷场强的大小为

$$E_0=\frac{D}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}=\frac{2.66\times10^{-5}}{8.85\times10^{-12}}\ \text{V/m}=3.0\times10^6\ \text{V/m}$$

极化电荷场强的大小为

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = 2.0\times10^6\ \mathrm{V/m}$$

$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{E}_0$反向。介质中合场强的大小为

$$E = E_0 - E = 1.0\times10^6\ \mathrm{V/m}$$

合场强 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{E}_0$同向。利用 $E=\dfrac{D}{\varepsilon}$计算,所得结果相同。

7-61. 两极板间距为 5.0 mm 的平板电容器,板上带有等值异号的电荷,电荷面密度为 20 $\mu\mathrm{C/m^2}$,两板间平行于板面放置两片电介质,一片为 2.0 mm 厚,相对电容率为 3,另一片为 3.0 mm 厚,相对电容率为 4,求:(1) 各电介质中的电位移矢量;(2) 各电介质中的电场强度;(3) 各电介质面上的极化电荷面密度。

解:(1) 利用高斯定理,可得极板上自由电荷面密度为

$$\sigma_0 = D_1 = D_2 = 20\ \mu\mathrm{C/m^2}$$

(2) 在两种电介质中的电场强度与电位移矢量分别满足关系

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1, \quad D_2 = \varepsilon_2 E_2$$

得

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} = \frac{20\times10^{-6}}{3.0\times8.85\times10^{-12}}\ \mathrm{V/m} = 7.53\times10^5\ \mathrm{V/m}$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0} = \frac{20\times10^{-6}}{4.0\times8.85\times10^{-12}}\ \mathrm{V/m} = 5.65\times10^5\ \mathrm{V/m}$$

$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$ 的方向均由正极板指向负极板。

(3) 第一层介质的上表面极化电荷面密度

$$\sigma_1' = \boldsymbol{P}_1 \cdot \boldsymbol{e}_n = -\left(1-\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\sigma_0 = -13.3\ \mu\mathrm{C/m^2}$$

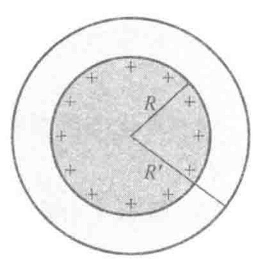
第二层介质下表面的极化电荷面密度

$$\sigma_2' = \boldsymbol{P}_2 \cdot \boldsymbol{e}_n = \left(1-\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\right)\sigma_0 = 15\ \mu\mathrm{C/m^2}$$

两种介质界面上极化电荷面密度

$$\sigma' = -\sigma_1' + (-\sigma_2') = -1.7\ \mu\mathrm{C/m^2}$$

7-62. 在半径为 R 的金属球之外包有一层均匀电介质层(如习题 7-62 所示),外半径为 R'。设电介质的相对电容率为 ε_r,金属球的电荷量为 Q,求:(1) 电介质层内、外的电场强度分布;(2) 电介质层内、外的



习题 7-62 图

电势分布;(3) 金属球的电势。

解:设 $Q>0$,以 r 为半径作同心高斯球面 S,有

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D4\pi r^2 = Q$$

得

$$D=\begin{cases}0, & r<R \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2}, & r\geqslant R\end{cases}$$

D 沿径向向外。

(1) 由

$$D=\varepsilon E$$

可得介质层内

$$E_1=\frac{D_1}{\varepsilon_r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2}, \quad (R\leqslant r\leqslant R')$$

在介质层外

$$E_2=\frac{D_2}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad (r>R')$$

(2) 介质层内离球心 r 处的电势

$$V_1=\int_r^\infty \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_r^{R'} \boldsymbol{E}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{R'}^\infty \boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon_r-1}{R'}\right) \quad (R\leqslant r\leqslant R')$$

介质层外离球心 r 处的电势

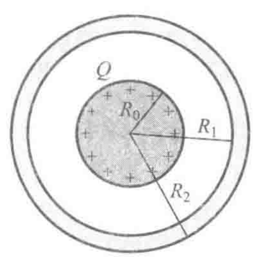
$$V_2=\int_r^\infty \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_r^\infty \boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (r>R')$$

(3) 金属球的电势

$$V_3=\int_R^\infty \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_R^{R'} \boldsymbol{E}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{R'}^\infty \boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}+\frac{\varepsilon_r-1}{R'}\right)$$

7-63. 半径为 R_0 的导体球带有电荷 Q,球外有一层均匀电介质同心球壳,其内外半径分别为 R_1 和 R_2,相对电容率为 ε_r(如习题7-63图所示),求:(1) 电介质内外的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电位移 $\boldsymbol{D}$;(2) 电介质内的极化强度 $\boldsymbol{P}$ 和表面上的极化电荷面密度 σ'。



习题 7-63 图

解:(1) 设 $Q>0$,作半径 $r>R_0$ 的同心高斯球面,由高斯定理,有

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = DS = Q$$

可得

$$D_1 = D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (R_0<r<R_1, r>R_2)$$

$\boldsymbol{D}$ 的方向沿径向向外。

由介质内、外 $\boldsymbol{D}$-$\boldsymbol{E}$ 关系

$$D_1 = \varepsilon_r\varepsilon_0 E_1, \quad D_2 = \varepsilon_0 E_2$$

得介质内的电场强度大小为

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2} \quad (R_1<r<R_2)$$

介质外的电场强度大小为

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (R_0<r<R_1, r>R_2)$$

$\boldsymbol{E}$ 的方向与 $\boldsymbol{D}$ 相同，沿径矢向外。

(2) 由 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{P}$ 关系，有 $\quad P = D - \varepsilon_0 E$

式中 $\quad D = \dfrac{Q}{S}, \quad E = \dfrac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}, \quad S = 4\pi r^2$

可得介质内极化强度 $\quad \boldsymbol{P} = \dfrac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r r^2}\boldsymbol{e}_r \quad (R_1<r<R_2)$

式中 $\boldsymbol{e}_r$ 是沿径矢 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量。由于 $\boldsymbol{P} \propto \dfrac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r$，介质层内为球对称的非均匀极化。

介质表面的极化电荷面密度，由

$$\sigma' = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e}_n$$

可得，介质内表面的极化电荷面密度为

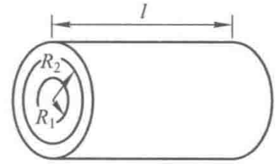
$$\sigma_1' = -P_{r=R_1} = -\frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r R_1^2}$$

介质外表面的极化电荷面密度为

$$\sigma_2' = P_{r=R_2} = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r R_2^2}$$

7-64. 圆柱形电容器是由半径为 R_1 的导线和与它同轴的导体圆筒构成，圆筒内半径为 R_2，长为 l，其间充满了相对电容率为 ε_r 的电介质。设导线沿轴线单

位长度上的电荷为 λ_0，圆筒上单位长度的电荷为 $-\lambda_0$，忽略边缘效应。求：(1) 电介质中的电场强度 $\boldsymbol{E}$、电位移 $\boldsymbol{D}$ 和极化强度 $\boldsymbol{P}$；(2) 电介质表面的极化电荷面密度 σ'。



习题 7-64 图

解：(1) 在介质内部作同轴的长为 L 的闭合圆柱面 S，运用高斯定理，有

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D2\pi rL = \lambda_0 L$$

得电位移　$$D = \frac{\lambda_0}{2\pi r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

由 $D = \varepsilon_r \varepsilon_0 E$，得电场强度　$$E = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

由 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$，得介质内极化强度

$$P = D - \varepsilon_0 E = \frac{(\varepsilon_r - 1)\lambda_0}{2\pi\varepsilon_r r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 的方向均垂直于轴线沿半径向外。

(2) 由 $\sigma' = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e}_n$ 可知，半径为 R_1 的介质表面的 $\boldsymbol{e}_n$ 与 $\boldsymbol{P}$ 反向，分布有负的极化电荷；半径为 R_2 的介质表面的 $\boldsymbol{e}_n$ 与 $\boldsymbol{P}$ 同向，分布有正的极化电荷。极化电荷面密度分别为

$$\sigma_1' = -P_{R_1} = -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{2\pi\varepsilon_r R_1}\lambda_0$$

和
$$\sigma_2' = P_{R_2} = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{2\pi\varepsilon_r R_2}\lambda_0$$

8. 电场能量的计算

7-65. 半径为 2.0 cm 的导体球，外套同心的导体球壳，壳的内外半径分别为 4.0 cm 和 5.0 cm，球与壳之间是空气，壳外也是空气，当内球的电荷量为 3.0×10^{-8} C 时，(1) 这个系统储存了多少电能？(2) 如果用导线把壳与球连在一起，结果如何？

分析：电场的能量储存于电场空间。带电导体球的电场分布在球与球壳之间和球壳的外部，呈球对称的非均匀分布。利用高斯定理求得场强分布 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 后，可由电能密度 w_e 对电场空间积分求解电能，也可由电容器储能公式，或由带电体的静电能求解。

用导线把球壳与导体球连在一起后，电荷全部分布在球壳的外表面，内部场

强为零，系统电能减少。

解 1：由电场空间储能 $W_e=\int_V w_e \mathrm{d}V$ 求解。设导体球的半径为 R，球壳的内外半径分别为 R_1 和 R_2。

(1) 当导体球带电荷量为 q 时，由高斯定理求得沿球径向的场强分布 $E(r)$ 为

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\quad (R<r<R_1,r>R_2)$$

设这两部分空间的电场强度分别为 E_1 和 E_2，电能密度分别为 w_{e1} 和 w_{e2}，储能分别为 W_1 和 W_2，有

$$w_{e1}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2,\quad w_{e2}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2$$

$$W_1=\int_{V_1} w_{e1}\mathrm{d}V_1=\int_R^{R_1}\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)$$

$$W_2=\int_{V_2} w_{e2}\mathrm{d}V_2=\int_{R_2}^{\infty}\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}$$

电场空间储能为

$$W=W_1+W_2=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=1.82\times10^{-4}\ \mathrm{J}$$

(2) 用导线把球壳与导体球连在一起后，球壳内部的场强为零，$W_1=0$，球壳外部的场强 $\boldsymbol{E}_2$ 不变，电场空间储能为

$$W'=W_2=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}=8.1\times10^{-5}\ \mathrm{J}$$

解 2：由电容器储能 $W=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ 求解。

(1) 设导体球与同心导体球壳间的电容为 C_1，导体球壳与无限远处的电容为 C_2。C_1 和 C_2 的串联构成系统电容 C，有

$$C_1=4\pi\varepsilon_0\frac{RR_1}{R_1-R},\quad C_2=4\pi\varepsilon_0 R_2$$

串联电容为
$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)$$

电容器储能为
$$W=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)=1.82\times10^{-4}\ \mathrm{J}$$

(2) 用导线把球壳与导体球联在一起后，$C_1=0$，$C=C_2$。有

$$W'=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C_2}=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2}=8.1\times10^{-5}\ \mathrm{J}$$

解 3：由带电体的静电能 $W=\sum\frac{1}{2}\int_{S_i}\sigma_iV_i\mathrm{d}S$ 求解。

（1）设导体球面的电势为 V_1，有

$$V_1=\int_R^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_R^{R_1}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^3}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{R_2}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^3}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)$$

导体球壳的电势为

$$V_2=\int_{R_2}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^3}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2}$$

由静电平衡时的电荷分布可知，导体球面、球壳内表面及外表面的电荷面密度分别为 $\sigma_1=q/S_1$、$\sigma_2=-q/S_2$ 和 $\sigma_3=q/S_3$。将各带电面的电势和电荷面密度代入带电体的静电能表式，有

$$W=\sum_i\frac{1}{2}\iint_{S_i}\sigma_iV_i\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\int_{S_1}\sigma_1V_1\mathrm{d}S+\frac{1}{2}\int_{S_2}\sigma_2V_2\mathrm{d}S+\frac{1}{2}\int_{S_3}\sigma_3V_2\mathrm{d}S$$

令

$$W_1=\frac{1}{2}\int_{S_1}\sigma_1V_1\mathrm{d}S=\frac{V_1}{2}\int_{S_1}\sigma_1\mathrm{d}S=\frac{qV_1}{2}$$

$$W_2=\frac{1}{2}\int_{S_2}\sigma_2V_2\mathrm{d}S=\frac{V_2}{2}\int_{S_2}\sigma_2\mathrm{d}S=-\frac{qV_2}{2}$$

$$W_3=\frac{1}{2}\int_{S_3}\sigma_3V_2\mathrm{d}S=\frac{V_2}{2}\int_{S_3}\sigma_3\mathrm{d}S=\frac{qV_2}{2}$$

得

$$W=W_1+W_2+W_3=\frac{q}{2}(V_1-V_2+V_2)=\frac{qV_1}{2}=1.82\times10^{-4}\ \mathrm{J}$$

（2）用导线把球壳与导体球联在一起后，导体球与球壳成为等势体，电势为 V_2。故有

$$W=W_3=\frac{qV_2}{2}=8.1\times10^{-5}\ \mathrm{J}$$

7-66. 一平行板空气电容器，每块极板的面积 $S=3\times10^{-2}\ \mathrm{m}^2$，极板间的距离 $d_1=3\times10^{-3}\ \mathrm{m}$，在平行板之间有一个厚度为 $d_2=1\times10^{-3}\ \mathrm{m}$，与地绝缘的平行铜板，当电容器充电到电势差为 300 V 后与电源断开，再把铜板从电容器中抽出。问：（1）电容器内电场强度是否变化？（2）抽出铜板外界需做功多少？

分析：电容器充电后与电源断开，极板上的电荷量保持不变。由高斯定理可知，平行板电容器内部的均匀电场大小不变，与铜板抽出与否无关。但电场空间

在铜板抽出后变大，因而电场能量也将变大。这份增加的能量源自外界在抽出铜板过程中所做的功。

解:(1) 抽出铜板前，电容器内电场强度为

$$E=\frac{U_1}{d_1-d_2}=\frac{300}{(3-1)\times10^{-3}}\ \mathrm{V/m}=1.5\times10^{5}\ \mathrm{V/m}$$

由高斯定理可知，该电场强度为

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

式中 q 为极板上的电荷量。由于电容器充电后与电源断开，因而将铜板抽出后，q 将保持不变，场强 E 也不变，但极板间的电势差变为

$$U_2=Ed_1=\frac{U_1}{d_1-d_2}d_1=450\ \mathrm{V}$$

(2) 在抽出平行铜板的过程中，外界将克服铜板上感应电荷与极板电荷间的引力做功，并转化为极板间电场能量的增量。所以，有

$$A=\Delta W=W_2-W_1=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\Delta V=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2Sd_2=2.99\times10^{-6}\ \mathrm{J}$$

式中ΔV 为电场空间体积的增量。

7-67. 两个相同的空气电容器，其电容都是 0.90×10^{-9} F，都充电到电压各为 900 V 后断开电源，把其中之一浸入煤油($\varepsilon_r=2$)中，然后把两个电容器并联，求:(1) 浸入煤油过程中损失的静电场能;(2) 并联过程中损失的静电场能。

分析:电容器充电后与电源断开，极板上的电荷量将保持不变。充入介质后极板间的电势差变小，电容将增大，在此过程中电场力做正功，电容器所储能量减少。将两电容器并联，极板上的电荷因电势差而作定向流动，直至两电容器极板达等电势的静电平衡状态，电场力的功使两电容器所储能量再次减少。

解:(1) 空气电容器 C 充电后，极板上的电荷量为

$$Q=CU=0.90\times10^{-9}\times900\ \mathrm{C}=8.1\times10^{-7}\ \mathrm{C}$$

静电能为

$$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CU^2$$

充入煤油后，电容 $C'=\varepsilon_r C$，静电能为

$$W'=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C'}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_r C}$$

静电能的增量为

$$\Delta W = W' - W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C'} - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{2C}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) = -1.82\times10^{-4}\ \mathrm{J}$$

（2）并联前两电容器的静电能为

$$W_0 = W' + W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C'} + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{2C}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} + 1\right) = \frac{1}{2}CU^2\left(\frac{\varepsilon_r+1}{\varepsilon_r}\right)$$

并联后的电容为

$$C'' = C + C' = (1+\varepsilon_r)C$$

极板上的总电荷量为 $Q''=2Q$，静电能为

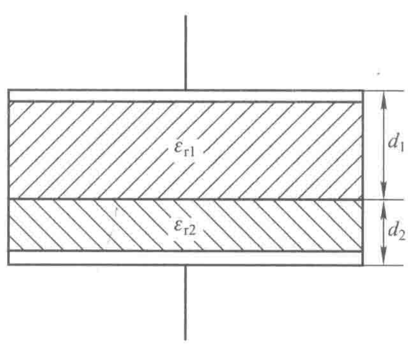
$$W'' = \frac{1}{2}\frac{Q''^2}{C''} = \frac{2Q^2}{C(\varepsilon_r+1)} = 2CU^2\left(\frac{1}{\varepsilon_r+1}\right)$$

并联前、后静电能的增量为

$$\Delta W = W'' - W_0 = -\frac{1}{2}CU^2\frac{(\varepsilon_r-1)^2}{\varepsilon_r(\varepsilon_r+1)} = -\frac{1}{12}CU^2 = -6.08\times10^{-5}\ \mathrm{J}$$

7-68. 一平行板电容器有两层电介质，$\varepsilon_{r1}=4$，$\varepsilon_{r2}=2$，厚度为 $d_1=2.0\ \mathrm{mm}$，$d_2=3.0\ \mathrm{mm}$，极板面积为 $S=40\ \mathrm{cm}^2$，两极板间电压为 200 V。计算：（1）每层电介质中的电场能量密度；（2）每层电介质中的总电能；（3）电容器的总能量。

解：（1）设两层介质中的电位移矢量和电场强度分别为 $\boldsymbol{D}_1$、$\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2$、$\boldsymbol{E}_2$，由高斯定理可知，介质中的电位移 $D_1=D_2$，即有



解图 7-68

$$\varepsilon_{r1}E_1 = \varepsilon_{r2}E_2$$

两极板间的电势差为

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

解得
$$E_1=\frac{U}{d_1+\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}d_2}=2.5\times10^{-4}\ \mathrm{V/m}$$

$$E_2=\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}E_1=5.0\times10^{-4}\ \mathrm{V/m}$$

$$D_1=D_2=\varepsilon_0\varepsilon_{r1}E_1=8.85\times10^{-7}\ \mathrm{C/m^2}$$

电场的能量密度分别为

$$w_1=\frac{1}{2}D_1E_1=1.11\times10^{-2}\ \mathrm{J/\ m^3}$$

$$w_2=\frac{1}{2}D_2E_2=2.21\times10^{-2}\ \mathrm{J/\ m^3}$$

（2）两层介质中的总能量分别为

$$W_1=w_1V_1=w_1d_1S=8.88\times10^{-8}\ \mathrm{J}$$
$$W_2=w_2V_2=w_2d_2S=2.66\times10^{-7}\ \mathrm{J}$$

（3）电容器所储存的总电场能为

$$W=W_1+W_2=8.88\times10^{-8}\ \mathrm{J}+2.66\times10^{-7}\ \mathrm{J}=3.55\times10^{-7}\ \mathrm{J}$$

由 $W=\frac{1}{2}CU^2$，可再求得这个两层介质电容器的电容 C。

7-69. 电容 $C_1=4\ \mu\mathrm{F}$ 的电容器在 800 V 的电势差下充电，然后切断电源，并将此电容器的两个极板分别和原来不带电、电容为 $C_2=6\ \mu\mathrm{F}$ 的电容器两极板相连，求：(1) 每个电容器极板所带电荷量；(2) 连接前后的静电场能。

分析：C_1极板上的电荷 Q 在与 C_2并联后，重新分布在两电容器的极板上，使之成为等势体。由电容定义求得 Q 后，再由电容并联规律求得各电容器的电荷量。并联的过程也是 C_1对 C_2充电做功的过程，所以 C_1所储存的静电能将减少。

解：C_1充电后极板上的电荷量为

$$Q=C_1U_0=4\times10^{-6}\times800\ \mathrm{C}=3.2\times10^{-3}\ \mathrm{C}$$

并联电容器的电容量为

$$C=C_1+C_2=10\times10^{-6}\ \mathrm{F}$$

并联电容器两极板间的电势差为

$$U=\frac{Q}{C}=\frac{Q}{C_1+C_2}=320\ \mathrm{V}$$

（1）并联后两电容器极板上的电量分别为

$$Q_1=C_1U=1.28\times10^{-3}\ \mathrm{C}$$

$$Q_2=C_2U=1.92\times10^{-3}\ \mathrm{C}$$

（2）并联前 C_1 的静电场能为

$$W_0=\frac{1}{2}C_1U_0^2=\frac{1}{2}\times4\times10^{-6}\times800^2\ \mathrm{J}=1.28\ \mathrm{J}$$

并联电容器的静电场能为

$$W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\times10\times10^{-6}\times320^2\ \mathrm{J}=0.512\ \mathrm{J}$$

7-70. 两个同轴的圆柱，长度都是 l，半径分别为 R_1 及 R_2，这两个圆柱带有等值异号电荷 Q，两圆柱之间充满电容率为 ε 的电介质。（1）在半径为 $r(R_1<r<R_2)$ 厚度为 $\mathrm{d}r$ 的圆柱壳中任一点的电场能量密度是多少？（2）这圆柱壳中的总电场能是多少？（3）电介质中的总电场能是多少？（4）由电介质中的总电场能求圆柱形电容器的电容。

解：（1）据题意，圆柱上的电荷线密度为 $\lambda=\dfrac{Q}{l}$。由高斯定理解得介质中距轴线 $r(R_1<r<R_2)$ 处的电位移和电场强度分别为

$$D=\frac{\lambda}{2\pi r}$$

和

$$E=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$$

该点处的电场能量密度为

$$w_e=\frac{1}{2}DE=\frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon r^2}=\frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon l^2r^2}$$

（2）厚为 $\mathrm{d}r$ 的圆柱壳体积

$$\mathrm{d}V=2\pi rl\mathrm{d}r$$

电场能量为

$$\mathrm{d}W=w_e\mathrm{d}V=\frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon l^2r^2}2\pi rl\mathrm{d}r=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon lr}\mathrm{d}r$$

（3）电介质中的总电场能为

$$W=\int\mathrm{d}W=\int_{R_1}^{R_2}w_e\mathrm{d}V=\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon lr}\mathrm{d}r=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon l}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

（4）由

$$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

解得同轴圆柱电容器的电容为

$$C=\frac{Q^2}{2W}=\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

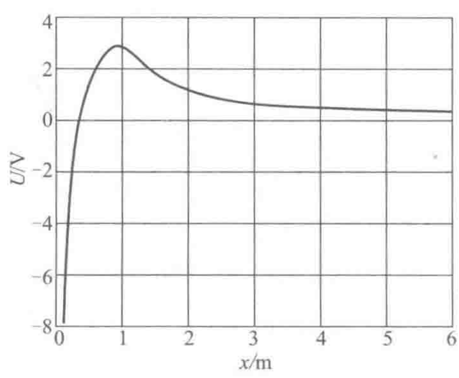
单位长度的电容为
$$C_l=\frac{C}{l}=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

7-71. 试编写一计算机程序,画出例题 7-1 的三电荷系统 Ox 轴线上的电势分布,并与图 7-3 比较,指出电势最大的位置对应于图 7-3 曲线的哪一点,为什么?

答案:电场力为零处的电势梯度(即电场强度)等于零。

参考程序

```
% 三电荷电势分布
clear
x=[0.1:0.1:6];
U=2./sqrt(0.25+(x-0.5*sqrt(3)).^2)-1./x
plot(x,U,'b',[0,6],[0,0],'k')
xlabel('x/m');ylabel('U/V')
```



解图 7-71

第八章　恒定电流的磁场

一、教学基本要求

1. 理解恒定电流、电流密度和电动势概念。理解一段含源电路的欧姆定律。

2. 掌握磁感应强度的概念，掌握利用叠加原理分析、求解磁感应强度的基本方法。

3. 理解毕奥-萨伐尔定律。掌握用恒定电流磁场的安培环路定理求磁感应强度的条件和方法。

4. 理解安培定律和洛伦兹力。会分析磁场对载流导线和线圈的作用，带电粒子在电磁场中所受作用及其运动。

5. 了解磁场力的功。

6. 理解有磁介质时的安培环路定理，了解物质的磁性、磁化现象。

二、本章习题分类

1. 电流、电路的基本问题
2. 磁通量
3. 磁感应强度
4. 安培环路定理
5. 洛伦兹力
6. 安培力、磁场力矩和磁场力的功
7. 有磁介质时的磁场和磁化强度

三、习题分析与解答

$mm^2 = 1\times10^{-6} m^2$

1. 电流、电路的基本问题

S　　L　　U

8-1. 一铜棒的横截面积为 $20\times80\ \text{mm}^2$，长为 $2.0\ \text{m}$，两端的电势差为 $50\ \text{mV}$。已知铜的电导率 $\gamma=5.7\times10^7\ \text{S/m}$。求：(1) 它的电阻；(2) 电流；(3) 电流密度；(4) 棒内的电场强度。

r

解：(1) 铜棒的电阻为

$R=\frac{L}{r\cdot S}=\frac{2.0}{5.7\times10^7\cdot1600\times10^{-6}}$

$=\frac{2}{57\times1600}$

$$R=\frac{l}{\gamma S}=\frac{2.0}{5.7\times10^{7}\times20\times80\times10^{-6}}\ \Omega=2.2\times10^{-5}\ \Omega$$

(2) 根据欧姆定律，有

$I=\frac{U}{R}=\frac{50\times10^{-3}}{2.2\times10^{-5}}=2.3\times10^{3}A.$

$$I=\frac{U}{R}=\frac{50\times10^{-3}}{2.2\times10^{-5}}\ \text{A}=2.3\times10^{3}\ \text{A}$$

(3) 铜棒内，电流密度的大小为

$\delta=\frac{I}{S}=\frac{2.3\times10^{3}}{1600\times10^{-6}}=1.4\times10^{6}\ A/m^2$

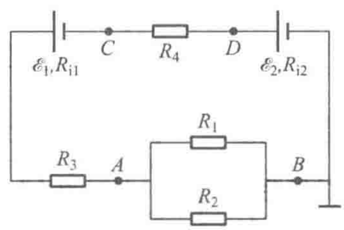
$$\delta=\frac{I}{S}=\frac{2.3\times10^{3}}{20\times80\times10^{-6}}\ \text{A/m}^2=1.4\times10^{6}\ \text{A/m}^2$$

(4) 铜棒内，电场强度的大小为

$E=\frac{F}{q}=\frac{qU}{l\cdot q}=\frac{50\times10^{-3}}{2.0}=2.5\times10^{-2}$ V/m.

$$E=\frac{U}{l}=\frac{50\times10^{-3}}{2.0}\ \text{V/m}=2.5\times10^{-2}\ \text{V/m}$$

8-2. 一电路如习题 8-2 图所示，其中 B 点接地，$R_1=10.0\ \Omega$，$R_2=2.5\ \Omega$，$R_3=3.0\ \Omega$，$R_4=1.0\ \Omega$，$\mathscr{E}_1=6.0\ \text{V}$，$R_{i1}=0.40\ \Omega$，$\mathscr{E}_2=8.0\ \text{V}$，$R_{i2}=0.6\ \Omega$。求：(1) 通过每个电阻中的电流；(2) 每个电池的端电压；(3) A、D 两点间的电势差；(4) B、C 两点间的电势差；(5) A、B、C、D 各点处的电势。



习题 8-2 图

分析：利用一段含源电路和闭合回路的欧姆定律求解，根据取定的回路绕行方向，确定电路中各点电势的高低。

解： 设 R_1 和 R_2 的并联电阻为 R，电路可等效为单回路电路，电流为 I，有

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\frac{10\times2.5}{10+2.5}\ \Omega=2.0\ \Omega$$

$$I=\frac{\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2}{R_3+R_4+R_{i1}+R_{i2}+R}=2.0\ \text{A}$$

(1) 通过 R_3 和 R_4 的电流就是回路电流

$$I=2.0\ \text{A}$$

通过 R_1 和 R_2 的电流由节点分流关系

$$I=I_1+I_2$$

和欧姆定律

$$U_{AB}=I_1R_1=I_2R_2$$

解得，通过 R_1 的电流为

$$I_1=\frac{R_2}{R_1+R_2}I=0.4\ \text{A}$$

通过 R_2的电流为

$$I_2=I-I_1=1.6\ \mathrm{A}$$

（2）电池 1 的端电压为

$$U_1=\mathscr{E}_1-IR_{i1}=5.2\ \mathrm{V}$$

电池 2 的端电压为　$$U_2=\mathscr{E}_2-IR_{i2}=6.8\ \mathrm{V}$$

（3）取逆时针为回路绕行方向，有

$$V_D-IR_4-IR_{i1}+\mathscr{E}_1-IR_3=V_A$$

解得 A、D 间的电势差为

$$U_{AD}=V_A-V_D=\mathscr{E}_1-I(R_{i1}+R_3+R_4)=-2.8\ \mathrm{V}$$

（4）B、C 间的电势，有　$V_B-IR_{i2}+\mathscr{E}_2-IR_4=V_C$

解得 B、C 间的电势差为

$$U_{BC}=V_B-V_C=-\mathscr{E}_2+I(R_{i2}+R_4)=-4.8\ \mathrm{V}$$

（5）由　$$V_A-IR=V_B=0$$

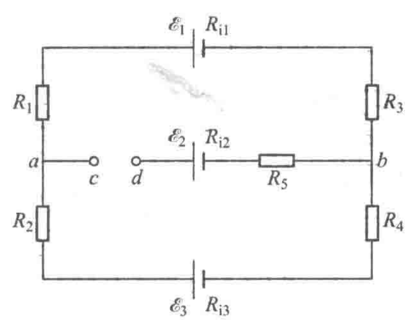
得　$$V_A=IR=4.0\ \mathrm{V}$$

$$V_C=U_{CB}=-U_{BC}=4.8\ \mathrm{V}$$

由　$$V_B+\mathscr{E}_2-IR_{i2}=V_D$$

得　$$V_D=V_D-V_B=\mathscr{E}_2-IR_{i2}=6.8\ \mathrm{V}$$

8-3. 一电路如习题 8-3 图所示，$R_1=R_2=R_3=R_4=2\ \Omega$，$R_5=3\ \Omega$，$\mathscr{E}_1=12\ \mathrm{V}$，$R_{i1}=1\ \Omega$，$\mathscr{E}_2=8\ \mathrm{V}$，$R_{i2}=1\ \Omega$，$\mathscr{E}_3=9\ \mathrm{V}$，$R_{i3}=1\ \Omega$，（1）求 a、b 两点间的电势差；（2）求 c、d 两点间的电势差；（3）如果 c、d 两点连接，求 a、b 两点间的电势差。



习题 8-3 图

解：电路在未连接 c、d 时为单回路电路，设回路电流为 I，取逆时针绕向，有

$$I=\frac{\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2}{R_1+R_2+R_3+R_4+R_{i1}+R_{i2}}=0.4\ \mathrm{A}$$

$I>0$ 表明，电流的实际方向与设定方向一致。

（1）根据一段含源电路的欧姆定律，从 b 点出发逆时针绕至 a 点，有

$$V_b-IR_3+\mathscr{E}_1-IR_{i1}-IR_1=V_a$$

a、b 两点间的电势差为

$$U_{ab}=V_a-V_b=\mathscr{E}_1-I(R_{i1}+R_1+R_3)=10\ \mathrm{V}$$

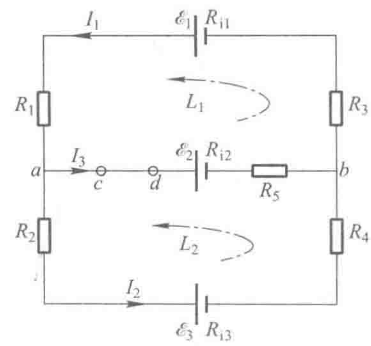
（2）电路中 d、b 段的电流为零，从 d 点出发逆时针绕至 c 点，有

$$V_d-\mathscr{E}_3-IR_3+\mathscr{E}_1-IR_{i1}-IR_1=V_a=V_c$$

c、d 两点间的电势差为

$$U_{cd}=V_c-V_d=\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_3-I(R_{i1}+R_1+R_3)=1\ \text{V}$$

(3) 连接 c、d 两点后，设电路中的三支电流分别为 I_1、I_2 和 I_3，两个回路分别为 L_1 和 L_2，均取逆时针绕向，如解图 8-3 所示。



解图 8-3

对节点 a，有 $I_1=I_2+I_3$

对回路 L_1，有

$$\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_3=I_1(R_{i1}+R_1+R_3)+I_3(R_{i3}+R_5)$$

对回路 L_2，有

$$\mathscr{E}_3-\mathscr{E}_2=I_2(R_{i2}+R_2+R_4)-I_3(R_{i3}+R_5)$$

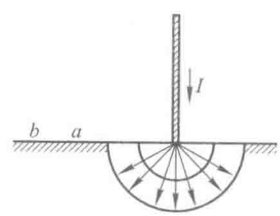
解得　$I_1=\dfrac{31}{65}\ \text{A}=0.477\ \text{A}$，　$I_2=\dfrac{21}{65}\ \text{A}=0.323\ \text{A}$，　$I_3=\dfrac{2}{13}\ \text{A}=0.154\ \text{A}$

I_1、I_2 和 I_3 的实际方向与设定方向一致。

a、b 两点间的电势差为

$$U_{ab}=\mathscr{E}_1-I_1(R_{i1}+R_1+R_3)=9.62\ \text{V}$$

8-4. 一高压输电线被风吹断，一端触及地面，从而使 200 A 的电流流入地内。设地面为水平，土地的电导率 $\gamma=1.0\times10^{-2}$ S/m。当一人走近输电线的触地端，两脚间(约 0.6 m)的电压称为跨步电压(即习题 8-3 图中 U_{ab})。求距离触地点 1 m 和 10 m 处的跨步电压。



习题 8-4 图

分析：电导率为常量表明，电流在土地内向各方向流动的机会均等。以输电线的触地端为中心，在地内作半径为 r 的半球面，则电流密度 $\boldsymbol{j}$ 在该半球面上均匀分布，且处处与球面法线平行。据此模型可求得 $\boldsymbol{j}$，再由欧姆定律的微分形式得到恒定电场强度 $\boldsymbol{E}$，进而求得径向两点间的电势差即跨步电压。

解： 以触地端为中心，在地内作半径为 r 的半球面 S，电流密度 $\boldsymbol{j}$ 与电流 I 的关系为

$$I=\int_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=j\cdot 2\pi r^2$$

欧姆定律的微分形式为　　　　$\boldsymbol{j}=\gamma \boldsymbol{E}$

由此得到土地内的恒定电场为　$E=\dfrac{I}{2\pi r^2\gamma}$

E 的方向与 j 一致，沿半球面的径向。

两脚间的跨步电压为

$$U_{ab}=\int_{r_a}^{r_b}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{I}{2\pi\gamma}\int_{r_a}^{r_b}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

式中 $r_b=r_a+0.6\ \mathrm{m}$。

距离触地点 $r_a=1\ \mathrm{m}$ 处的跨步电压为

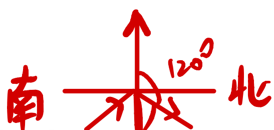
$$U_1=\frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)=\frac{200}{2\times3.14\times1\times10^{-2}}\left(1-\frac{1}{1.6}\right)\ \mathrm{V}=1\ 194\ \mathrm{V}$$

距离触地点 $r_a=10\ \mathrm{m}$ 处的跨步电压为

$$U_2=\frac{200}{2\times3.14\times1\times10^{-2}}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{10.6}\right)\ \mathrm{V}=18\ \mathrm{V}$$

方为正.

2. 磁通量



$B=4\times10^{-5}$ T.　cos30°.

8-5. 在地球北半球的某区域，磁感应强度的大小为 4×10^{-5} T，方向与铅直线成 60°角。求：(1) 穿过面积为 1 m^2 的水平平面的磁通量；(2) 穿过面积为 1 m^2 的竖直平面的磁通量的最大值和最小值。

60°

$\Phi=B\cdot S\cdot\cos\theta=2\times10^{-5}\mathrm{Wb}$

分析：在 1 m^2 面积上的地球磁场分布可认为是均匀的。地球表面磁感应强度由地理南极附近的地磁北极发出，绕向地理北极附近的地磁南极，经地球内部形成闭合的磁感应线。

磁通量Φ单位Wb.

解：忽略地磁极与地理极的偏差，认为地表磁感应线由地理南极绕向地理北极。

(1) 取水平平面 S_1 的法线向上为正，与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的夹角为 120°，穿过的磁通量为

$$\Phi_1=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}_1=BS_1\cos120°=-2\times10^{-5}\ \mathrm{Wb}$$

(2) 取竖直平面 S_2 的法线向南为正，与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的夹角为 150°，穿过的磁通量为

$$\Phi_2=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}_2=BS_2\cos150°=-3.46\times10^{-5}\ \mathrm{Wb}$$

取竖直平面 S_3 的法线向北为正时，与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的夹角为 30°，穿过的磁通量为

$$\Phi_3=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}_3=BS_3\cos30°=3.46\times10^{-5}\ \mathrm{Wb}$$

8-6. 设一均匀磁场沿 Ox 轴正方向，其磁感应强度值 $B=1\ \mathrm{Wb/m^2}$。求在下列情况下，穿过面积为 2 m^2 的平面的磁通量：(1) 平面和 yz 面平行；(2) 平面与

$\vec{F}\cdot\cos 90^\circ$·

xz 面平行；(3) 平面与 Oy 轴平行且与 Ox 轴成 45°角。

解：平面的法线垂直于平面，法线的正方向与面积边界的绕向呈右手螺旋关系。

法→ox·

(1) 设平面法向沿 Ox 轴正向，与 $\boldsymbol{B}$ 的方向一致，通过该平面的磁通量为

$$\Phi_{yz}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=BS\cos 0^\circ=2\ \text{Wb}$$

当平面法向指向 Ox 轴负向时，通过的磁通量为　法oy·

$$\Phi'_{yz}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=BS\cos\pi=-2\ \text{Wb}$$

(2) 平面法向与 $\boldsymbol{B}$ 相垂直，穿过该平面的磁通量为零。

$$\Phi_{xz}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=BS\cos 90^\circ=0$$

(3) 设平面法向与 Ox 轴正方向成 45°角，通过该平面的磁通量为

$$\Phi_{y}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=BS\cos 45^\circ=1.41\ \text{Wb}$$ $B\cdot S\cdot\cos 45^\circ=\sqrt{2}\ \text{Wb}$·

当平面法向与 Ox 轴负方向成 45°角时，通过的磁通量为

$$\Phi'_{y}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=BS\cos 135^\circ=-1.41\ \text{Wb}$$

8-7. 一边长为 $l=0.15$ m 的立方体如习题 8-7 图放置，有一均匀磁场 $\boldsymbol{B}=(6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+1.5\boldsymbol{k})$ T 通过立方体所在区域，计算：(1) 通过立方体上阴影面积的磁通量；(2) 通过立方体六面的总磁通量。

$l^2\cdot\vec{B}\cdot\cos\theta$·

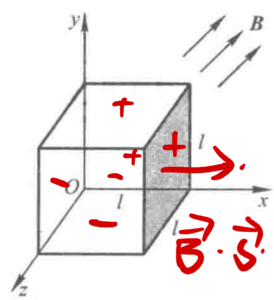
分析：磁感应线是闭合线，通过任一闭合面的磁通量为零。闭合曲面外表面的法线方向为正方向，阴影面的法向沿 Ox 轴正向。

$6\cdot(0.15)^2$·

解：(1) 通过立方体上阴影面积的磁通量为

$$\Phi=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=(6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+1.5\boldsymbol{k})\cdot(0.15)^2\,\boldsymbol{i}\ \text{Wb}=0.135\ \text{Wb}$$

(2) 通过立方体闭合表面的总磁通量为零，即 $\Phi=0$。



习题 8-7 图

8-8. 如习题 8-8 图所示，在磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的均匀磁场中，有一半径为 R 的半球面，$\boldsymbol{B}$ 与半球面轴线的夹角为 α。求通过该半球面的磁通量。

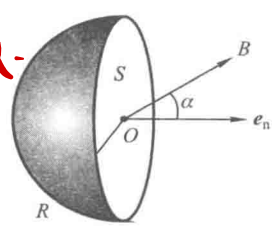
$\int\vec{B}\cdot d\vec{S}=\int B\,ds\cdot\cos\alpha$·

解：磁感应线从半球面的凸面穿进，从凹面穿出，取凹面为半球面的“正面”时，通过的磁通量大于零。

如解图 8-8 所示，将 $\boldsymbol{B}$ 分解为与轴线平行的分量 $\boldsymbol{B}_{//}$ 和垂直的分量 $\boldsymbol{B}_{\perp}$，有　$B=B_{//}+B_{\perp}$·

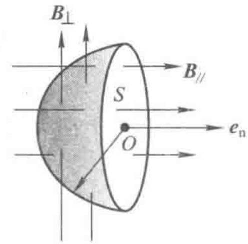
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_{//}+\boldsymbol{B}_{\perp}$$

$\int B_{//}\cdot ds=2\pi r^2\cdot B\sin\alpha$　$\int B_{\perp}\cdot d\vec{S}=0$·



习题 8-8 图

式中 $\boldsymbol{B}_{//}=B\cos\alpha\boldsymbol{e}_n$，$\boldsymbol{B}_{\perp}=B\sin\alpha\boldsymbol{e}_{\perp}$，$\boldsymbol{e}_{\perp}$ 是与 $\boldsymbol{e}_n$ 垂直方向的单位矢量。



解图 8-8

通过半球面 S 的磁通量为

$$\Phi=\int \mathrm{d}\Phi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S(\boldsymbol{B}_{//}+\boldsymbol{B}_{\perp})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=(\boldsymbol{B}_{//}+\boldsymbol{B}_{\perp})\cdot\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

式中 $\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 是凹面上面积微元的矢量和，由半球凹面对轴线的对称性可得

$\Phi=B\cos\alpha\cdot\vec{e_n}\cdot\int d\vec{S}$

πR^2

$$\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\pi R^2\boldsymbol{e}_n$$

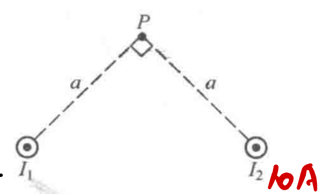
所以，有 $$\Phi=\boldsymbol{B}_{//}\cdot\pi R^2\boldsymbol{e}_n=B\pi R^2\cos\alpha$$

$B\cdot\cos\alpha\,\vec{e_n}\cdot\int_S d\vec{S}$

$=B\cos\alpha\cdot\pi R^2$

3. 磁感应强度

8-9. 两根长直导线互相平行地放置在真空中，如习题 8-9 图所示，其中通以同向的电流 $I_1=I_2=10\ \mathrm{A}$。试求 P 点的磁感应强度。已知 P 点到两导线的垂直距离均为 0.5 m。



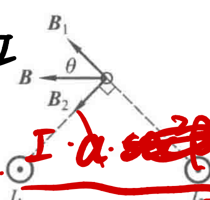
习题 8-9 图

解：设无限长直电流 I_1、I_2 到 P 点的垂直距离为 a，两电流各自在 P 点的磁感应强度大小相等，为

$$B_1=B_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

$B_1=B_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$

B_1 和 B_2 的方向由右手螺旋定则确定，如解图 8-9 所示。



解图 8-9

$B_P=\sqrt{B_1^2+B_2^2}=\sqrt{2}B_1=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi a}$

$\cos\beta$

$\boldsymbol{B}_P$ 的大小为

$\vec{B_{Q0}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cdot dl\times\vec{e_r}}{r^2}$

$$B_P=\sqrt{B_1^2+B_2^2}=\sqrt{2}B_1=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi a}=5.66\times10^{-6}\ \mathrm{T}$$

$\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot a\cdot\sec^2\beta\,d\beta}{a^2\sec^2\beta}$

与 $\boldsymbol{B}_1$ 的夹角 θ 为 $$\theta=\arctan\left(\frac{B_2}{B_1}\right)=45^\circ$$

$\sin 0^\circ$

$\vec{B_{P0}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\,dl\times\vec{e_r}}{r^2}=0$

$r=\frac{a}{\cos\beta}=a\cdot\sec\beta$

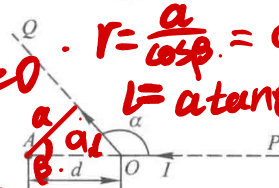
$l=a\tan\beta$

$\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\beta_1-\sin\beta_2)$

8-10. 如习题 8-10 图所示的被折成钝角的长导线中通有 20 A 的电流。求 A 点的磁感应强度。设 $d=2\ \mathrm{cm}$，$\alpha=120^\circ$。

0

l_1



$\sin\alpha_1=\frac{a}{d}\Rightarrow a=d\cdot\sin\alpha_1$

习题 8-10 图

解：由叠加原理可知

$\vec{B_A}=\vec{B_{P0}}+\vec{B_{Q0}}$

$$\boldsymbol{B}_A=\boldsymbol{B}_{PO}+\boldsymbol{B}_{OQ}$$

A 点位于 PO 段的延长线上，$\boldsymbol{B}_{PO}=0$，所以

$$\boldsymbol{B}_A=\boldsymbol{B}_{OQ}$$

直电流 OQ 在 A 点的磁感应强度为

$\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\cdot(\sin\beta_2-\sin\beta_1)$.

$$B_A=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\beta_2-\sin\beta_1)$$

将 $r=d\sin(\pi-\alpha)$，$\beta_1=-\pi/6$，$\beta_2=\pi/2$ 代入上式，有

$$B_A=B_{OQ}=\frac{\mu_0 I}{4\pi d\sin(\pi-\alpha)}(\sin\beta_2-\sin\beta_1)$$

$$=\frac{4\pi\times10^{-7}\times20}{4\pi\times1.73\times10^{-2}}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\ \mathrm{T}=1.73\times10^{-4}\ \mathrm{T}$$

B_A 的方向垂直纸面向上。

8-11. 高为 h 的等边三角形的回路载有电流 I，试求该三角形的中心处的磁感应强度。

分析：根据磁感应强度的叠加原理，等边三角形的中心处 O 的磁感应强度为三段相同直电流的磁感应强度的矢量和。由于三段直电流对 O 点对称分布，所以各段直电流在 O 点的磁感应强度的大小相同，方向也相同。

解：如解图 8-11 所示，由磁感应强度的叠加原理，O 点磁感应强度 $\boldsymbol{B}_0$ 为

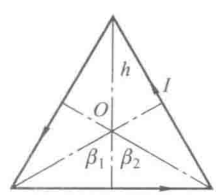
$$\boldsymbol{B}_0=3\ \boldsymbol{B}_1$$

B_1 是一段直电流在 O 点的磁感应强度，大小为

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\beta_2-\sin\beta_1)$$

$\boldsymbol{B}_1$ 的方向垂直纸面向上。式中 $\beta_1=-\pi/3$，$\beta_2=\pi/3$，$r=h/3$，得

$$B_1=\frac{\mu_0 3\sqrt{3}I}{4\pi h}$$



解图 8-11

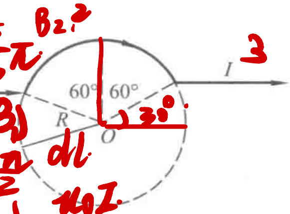
O 点磁感应强度 $\boldsymbol{B}_0$ 的大小为

$$B_0=3B_1=\frac{\mu_0 9\sqrt{3}I}{4\pi h}$$

$\boldsymbol{B}_0$ 垂直纸面向上。

$B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\cdot(\sin\beta_2-\sin\beta_1)$　$-\frac{\pi}{2}$　$B_1\ \frac{5}{6}\pi$　$B_2\ ?$　dl　$-\frac{\pi}{2}$　$(\frac{\sqrt{3}}{2}+1)\cdot\frac{\mu_0 I}{4\pi r}$　3

8-12. 如习题 8-12 图所示，一根无限长直导线，通有电流 I，中部一段弯成圆弧形，求圆心处的磁感应强度的大小。



习题 8-12 图

解：圆心处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_0$ 为圆弧段和两段直电流各自在圆心处的磁感应强度的矢量和。由右手螺旋定则可知，这三段电流在圆心处的磁感应强度都垂直纸面向下。

根据电流相对圆心分布的对称性，设一段直电流的磁感应强度为 B_1，半个圆弧段电流的磁感应强度为 B_2，有

R

$r=a$

$$B_0=2(B_1+B_2)$$

式中
$$B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\beta_2-\sin\beta_1)$$

$a=R\cdot\cos 60^\circ=\frac{R}{2}$

将 $r=R\cos 60^\circ=R/2$，$\beta_1=-90^\circ$（$-\frac{\pi}{2}$），$\beta_2=-60^\circ$（$-\frac{\pi}{3}$）代入上式，得

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\beta_2-\sin\beta_1)=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}(2-\sqrt{3})$$

半个圆弧段是整个圆环的 1/6，利用圆电流在圆心处磁感应强度的结果，有

$\vec{B}=\frac{\mu_0 I\sin\theta}{4\pi r^2}\cdot 2\pi R$

$$B_2=\frac{\mu_0 I}{2R}\times\frac{1}{6}=\frac{\mu_0 I}{12R}$$

$\times\frac{1}{6}=\frac{\mu_0 I\sin\theta}{2R}$

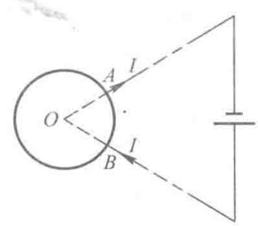
所以
$$B_0=2(B_1+B_2)=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$\vec{B}=\frac{\mu_0 I\sin\theta}{2r}$

$2(B_1+B_2)=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}(2-\sqrt{3})+\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

$\boldsymbol{B}_0$ 的方向垂直纸面向下。

8-13. 两根长直导线沿半径方向引到铁环上 A、B 两点，并与很远的电源相连，如习题 8-13 图所示。求环中心的磁感应强度。



习题 8-13 图

解：如解图 8-13 所示，直电流 I_1 沿径向流至 B 点，分流为 I_2 和 I_3 至 A 点，汇合为 $I_4(=I_1)$ 沿径向流出。设四段电流在 O 点的磁感应强度分别为 $\boldsymbol{B}_1$、$\boldsymbol{B}_2$、$\boldsymbol{B}_3$ 和 $\boldsymbol{B}_4$，环中心 O 的磁感应强度为

$\vec{B}_1=\vec{B}_4=0$

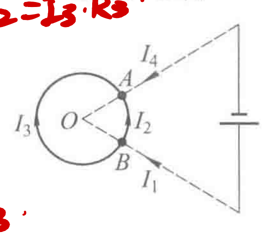
$$\boldsymbol{B}_0=\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{B}_i$$

O 点在 I_1 和 I_4 的延长线上，有 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_4=0$。因 I_2 和 I_3 沿圆环反向流动，故 $\boldsymbol{B}_2$、$\boldsymbol{B}_3$ 的方向相反。

$U=I_2\cdot R_2=I_3\cdot R_3$

设铁环上 A、B 两点的电势差为 U，有

$$U=I_2R_2=I_3R_3$$



解图 8-13

式中 R 为一段圆弧的电阻，其值与长度 l 成正比，即 $R\propto l$。可有

$R=\frac{l}{rS}$

$$I_2l_2=I_3l_3$$

$I_2\cdot l_2=I_3\cdot l_3$

设铁环半径为 r，$\boldsymbol{B}_2$、$\boldsymbol{B}_3$ 的大小分别为

$B_2=\int\frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}dl=\frac{\mu_0 I_2}{4\pi r^2}\cdot l_2$

$$B_2=\frac{\mu_0 I_2}{4\pi r^2}\int_{l_2}\mathrm{d}l=\frac{\mu_0}{4\pi r^2}I_2 l_2$$

$$B_3=\frac{\mu_0 I_3}{4\pi r^2}\int_{l_3}\mathrm{d}l=\frac{\mu_0}{4\pi r^2}I_3 l_3=B_2$$

由此可得 $$B_0=B_2-B_3=0$$

$B_0=B_2-B_3=0$

8-14. A 和 B 为两个正交放置的圆形线圈，其圆心相重合。A 线圈半径 $R_A=0.2\ \mathrm{m}$，$N_A=10$ 匝，通有电流 $I_A=10\ \mathrm{A}$。B 线圈半径为 $R_B=0.1\ \mathrm{m}$，$N_B=20$ 匝，通有电流 $I_B=5\ \mathrm{A}$。求两线圈公共中心处的磁感应强度。

分析：两线圈公共中心处的磁感应强度为各线圈在圆心的磁感应强度的矢量和。

解：取坐标系 $Oxyz$，设 A 线圈在 xOz 平面内，B 线圈在 yOz 平面内，电流 I_A 和 I_B 的方向如解图8-14 所示。两线圈在公共中心处 O 点的磁感应强度分别为

$$\boldsymbol{B}_A=\frac{N_A\mu_0 I_A}{2R_A}\boldsymbol{j}=3.14\times10^{-4}\boldsymbol{j}\ \mathrm{T}$$

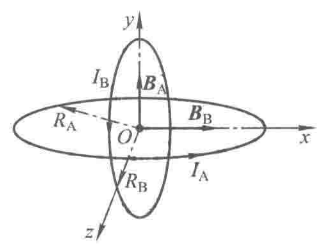
$$\boldsymbol{B}_B=\frac{N_B\mu_0 I_B}{2R_B}\boldsymbol{i}=6.28\times10^{-4}\boldsymbol{i}\ \mathrm{T}$$

O 点处的 $\boldsymbol{B}$ 为 $$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_A+\boldsymbol{B}_B$$

其大小为 $$B=\sqrt{B_A^2+B_B^2}=7.0\times10^{-4}\ \mathrm{T}$$

$\boldsymbol{B}$ 在 xOy 平面内，与 x 轴正方向的夹角为

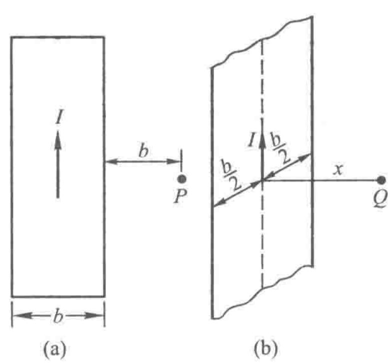
$$\alpha=\arctan\frac{B_A}{B_B}=26.56^\circ$$



解图 8-14

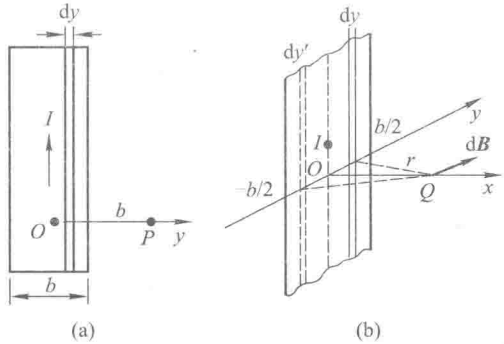
8-15. 电流均匀地流过宽为 b 的无限长平面导体薄板，电流为 I，沿板长方向流动。求：(1) 在薄板平面内，距板的一边为 b 的 P 点的磁感应强度[见习题 8-15 图(a)]；(2) 通过板的中线并与板面垂直的直线上一点 Q 处的磁感应强度，Q 点到板面的距离为 x[见习题 8-15 图(b)]。

分析：将载流导体薄板视为由无限长载流细条平行排列而成。利用无限长载流直导线磁感应强度的规律和磁感应强度的叠加原理求解。



习题 8-15 图

解:(1) 取坐标轴 Oy,原点位于薄板的中线,如解图 8-15(a) 所示。在板上 y 处取宽为 dy 的长直电流微元,载流 $dI=Idy/b$。



解图 8-15

该长直电流微元在 P 点的磁感应强度为

$$dB=\frac{\mu_0 dI}{2\pi\left(\dfrac{b}{2}+b-y\right)}=\frac{\mu_0 I}{\pi b(3b-2y)}dy$$

$d\boldsymbol{B}$ 的方向垂直纸面向里。

板上所有细条在 P 点磁感应强度的方向相同,有

$$B=\int dB=\frac{\mu_0 I}{\pi b}\int_{-b/2}^{b/2}\frac{dy}{(3b-2y)}=\frac{\mu_0 I}{2\pi b}\ln 2$$

$\boldsymbol{B}$ 的方向垂直纸面向里。

(2) 取坐标系如解图 8-15(b) 所示。板上宽为 dy 的电流微元在 Q 点的磁感应强度的大小为

$$dB=\frac{\mu_0 dI}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I}{2\pi rb}dy$$

$d\boldsymbol{B}$ 垂直于 $\boldsymbol{r}$,与 y 轴正方向成 θ 角。

将 $d\boldsymbol{B}$ 按坐标轴分解,有

$$dB_x=dB\sin\theta,\quad dB_y=dB\cos\theta$$

因薄板相对 Q 点对称,有

$$B_x=\int dB_x=0$$

所以,Q 点磁感应强度沿 y 轴正向,有

$$B=B_y=\int dB_y=\int dB\cos\theta$$

即
$$B=\int_{-b/2}^{b/2}\frac{\mu_0 I}{2\pi br}\cos\theta\mathrm{d}y$$

将 $r=x\sec\theta, y=x\tan\theta, \mathrm{d}y=x\sec^2\theta\mathrm{d}\theta$ 代入上式，得
$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi b}\int_{-\arctan(b/2x)}^{+\arctan(b/2x)}\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 I}{\pi b}\arctan\frac{b}{2x}$$
B 的方向与平面平行。

由上述结果可知：

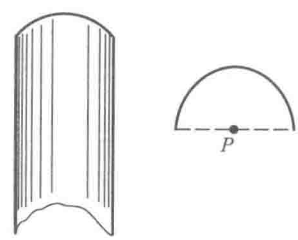
（1）$x\gg b$ 时，有 $\arctan\frac{b}{2x}\approx\frac{b}{2x}, B\approx\frac{\mu_0 I}{\pi b}\cdot\frac{b}{2x}=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$

这是无限长直电流在 x 处的磁感应强度。

（2）$x\ll b$ 时，有 $\arctan\frac{b}{2x}\approx\frac{\pi}{2}, B\approx\frac{\mu_0 I}{\pi b}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\mu_0 I}{2b}$

为无限大载流薄板附近离板 x 处的磁感应强度。

8-16. 在半径 $R=1$ cm 的“无限长”半圆柱形金属薄片中，有电流 $I=5$ A 自下而上通过，如习题 8-16 图所示，试求圆柱轴线上一点 P 处的磁感应强度。

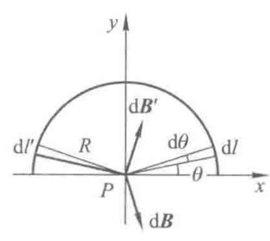


习题 8-16 图

分析：半圆柱面电流可看成是由宽为 dl 的长直电流排列而成的。可利用无限长直电流磁感应强度的结果和叠加原理求解。

解：取坐标系如解图 8-16 所示，在半圆柱面上取宽为 dl 的无限长电流微元 dI，有
$$\mathrm{d}I=\frac{I}{\pi R}\mathrm{d}l=\frac{I}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

在轴线上 P 点处的磁感应强度为
$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2\pi R}=\frac{\mu_0 I\mathrm{d}\theta}{2\pi^2 R}$$

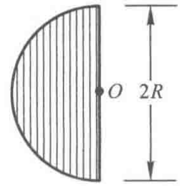


解图 8-16

d**B** 的方向如解图 8-16 所示。

半圆柱面电流对 P 点呈对称分布，由磁感应强度的叠加原理可知，P 点的磁感应强度 **B** 沿 x 轴正方向，有
$$B_y=0,\quad B=B_x=\int\mathrm{d}B_x=\int\mathrm{d}B\sin\theta$$

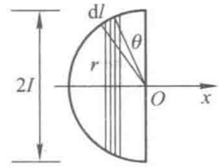
解得
$$B_x=\int\mathrm{d}B_x=\int_0^{\pi}\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}=6.37\times10^{-5}\ \mathrm{T}$$



习题 8-17 图

8-17. 半径为 R 的木球上绕有细导线，所绕线圈很紧密，相邻的线圈彼此平行地靠着，以单层盖住半个球面，共有 N 匝，如习题 8-17 图所示。设导线中通有电流 I，求在球心 O 处的磁感应强度。

分析：利用圆电流轴线上磁感应强度的结果和磁感应强度的叠加原理求解。



解图 8-17

解：半球面上的线圈可看成 N 个串联的同轴圆电流，根据圆电流轴线上磁感应强度的结论可知，球心 O 的磁感应强度沿轴线。取此轴为 Ox，如解图 8-17 所示。

由于线圈以单层密绕方式覆盖半个球面，因此可沿球面取弧长 $\mathrm{d}l$ 为微元，其中含有 $\mathrm{d}N$ 个同轴而半径渐变的圆电流，有

$$\mathrm{d}I=I\mathrm{d}N=I\frac{N\mathrm{d}l}{\pi R/2}=\frac{2IN}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

已知半径为 r 的圆电流 I 在轴线上 x 处的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 I r^2}{2\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}$$

利用此结果作代换：$B\to\mathrm{d}B$，$I\to\mathrm{d}I$，各圆电流的半径为 $r=R\cos\theta$，可得 $\mathrm{d}N$ 个圆电流在 x 轴上 O 点的磁感应强度为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 NIR^2\cos^2\theta}{\pi\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 NI\cos^2\theta}{\pi R}\mathrm{d}\theta$$

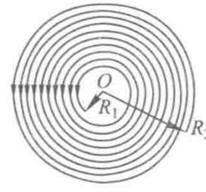
上式中利用了 $x^2+r^2=R^2$。对上式积分，得 N 匝密绕线圈在 O 点磁感应强度为

$$B=\int\mathrm{d}B=\int_0^{\pi/2}\frac{\mu_0 NI\cos^2\theta}{\pi R}\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 NI}{4R}$$

$\boldsymbol{B}$ 沿 x 轴，其方向由电流绕向决定（呈右手螺旋关系）。

8-18. 一均匀密绕的平面螺旋线圈，总匝数为 N，线圈的内半径为 R_1，外半径为 R_2，如习题 8-18 图所示。当导线中通有电流 I 时，求螺旋线圈中心点 O 处的磁感应强度。

解：平面螺旋线圈可看成由 N 个串联的同心圆电流平铺而成，所有圆电流在中心点 O 处的磁感应强度方向均沿 O 点垂直于线圈平面的中心轴。所以，O 点的磁感应强度为所有圆电流在该点处磁感应强度的代数和。



习题 8-18 图

在线圈平面内取 $r\to r+\mathrm{d}r$ 范围的线圈为微元，其中分

布有 dN 匝线圈，电流微元为 dI，有

$$dI=\frac{NIdr}{R_2-R_1}$$

半径为 r 的圆电流 I 在圆心处的磁感应强度为 $B=\frac{\mu_0 I}{2r}$，由此得电流微元在 O 处的磁感应强度为

$$dB=\frac{\mu_0 NI}{2(R_2-R_1)r}dr$$

对上式积分，有

$$B=\int dB=\frac{\mu_0 NI}{2(R_2-R_1)}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}=\frac{\mu_0 NI}{2(R_2-R_1)}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

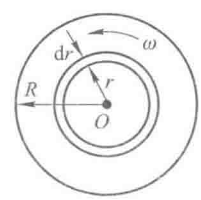
由电流方向可得，$\boldsymbol{B}$ 垂直于纸面向上。

8-19. 一个塑料圆盘，半径为 R，电荷 q 均匀分布于表面，圆盘绕通过圆心垂直于盘面的轴转动，角速度为 ω。求圆盘中心处的磁感应强度。

分析：旋转的带电圆盘可等效为半径连续变化的同心载流圆电流。参照上题分析求解。

解：如解图 8-19 所示，在圆盘上取半径为 r 宽为 dr 的细圆环，环上的电荷量为

$$dq=\sigma 2\pi r dr=\frac{q}{\pi R^2}2\pi r dr=\frac{2q}{R^2}r dr$$



解图 8-19

设想一垂直于盘面、沿半径设置的固定面，在圆盘转动的一个周期 T 内，宽为 dr 的细圆环上的电量 dq 全部垂直通过了该固定面。根据电流定义，这个电流微元为

$$dI=\frac{dq}{T}=\frac{dq}{2\pi}\omega=\frac{q\omega}{\pi R^2}r dr$$

圆电流微元 dI 在盘心的磁感应强度为

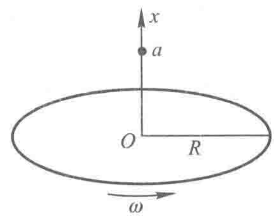
$$dB=\frac{\mu_0 dI}{2r}=\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2}dr$$

积分得到整个圆盘转动时，在盘心的磁感应强度为

$$B=\int dB=\int_0^R\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2}dr=\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R}$$

$\boldsymbol{B}$ 的方向沿轴线，在解图 8-19 中垂直纸面向上。

8-20. 如习题 8-20 图所示，半径为 R，电荷线密度为 $\lambda(\lambda>0)$ 的均匀带电圆环，绕圆心且与圆平面垂直的轴以角速度 ω 转动，求：(1) 圆心 O 处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_0$；(2) 轴线上距圆心为 a 处的一点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小和方向。



习题 8-20 图

分析：绕圆心轴转动的均匀带电圆环相当于一个圆电流。

解：根据电流的定义，等效圆电流为

$$I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\lambda\,\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\lambda v=\lambda R\omega$$

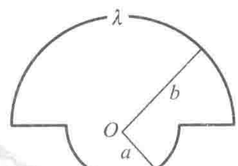
(1) 圆心 O 处磁感应强度 $\boldsymbol{B}_0$ 沿 x 轴正方向，大小为

$$B_0=\frac{\mu_0 I}{2R}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{2}$$

(2) 轴线上距圆心为 a 处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 沿 x 轴正方向，大小为

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2\left(R^2+a^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0\lambda R^3\omega}{2\left(R^2+a^2\right)^{3/2}}$$

8-21. 如习题 8-21 图所示，有一闭合回路由半径为 a 和 b 的两个同心共面半圆连接而成，其上均匀分布线密度为 λ 的电荷，当回路以匀角速度 ω 绕过点 O 垂直于回路平面的轴转动时，求圆心 O 点的磁感应强度的大小。



习题 8-21 图

分析：均匀带电回路绕轴匀速转动时，在圆心 O 点形成的磁场，由四段运动的带电线段构成。

解：运动电荷 q 以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动时，$\boldsymbol{r}$ 处的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 由 q 指向考察点。

在带电回路上任取一 $\mathrm{d}q$，在圆心 O 点的磁感应强度为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}q}{r^3}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})$$

因 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{r}$，且处同一平面，有

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}v\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}v$$

圆心 O 点处磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于纸面向上。

对半径分别为 a 和 b 的圆弧段，$dq=\lambda r d\theta, v=r\omega$，有

$$dB_a=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dq}{r^2}v=\frac{\mu_0}{4\pi}\lambda\omega d\theta=dB_b$$

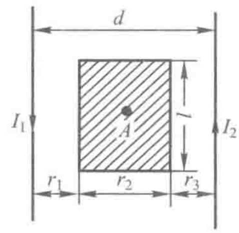
对两个直线段，$dq=\lambda dr, v=r\omega$，有

$$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dq}{r^2}v=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\lambda\omega dr}{r}$$

圆心 O 点处磁感应强度为

$$B=\int dB=2\int(dB_a+dB')$$
$$=\frac{\mu_0}{2\pi}\lambda\omega\left(\int_0^{\pi}d\theta+\int_a^b\frac{dr}{r}\right)=\frac{\mu_0\lambda\omega}{2\pi}\left(\pi+\ln\frac{b}{a}\right)$$

8-22. 两平行长直导线相距 $d=40$ cm，每根导线载有电流 $I_1=I_2=20$ A，电流流向如习题 8-22 图所示。求：(1) 两导线所在平面内与该两导线等距的一点 A 处的磁感应强度；(2) 通过图中斜线所示面积的磁通量（$r_1=r_3=10$ cm，$l=25$ cm）。



习题 8-22 图

解：如解图 8-22 所示，取坐标轴 Ox。取平面内任意点 P，两电流在 P 点的磁感应强度为

$$B_P=B_{P_1}+B_{P_2}=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}+\frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-x)}$$

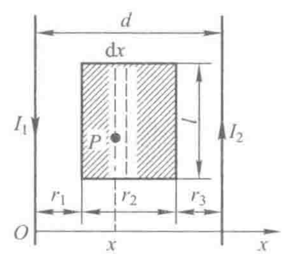
$\boldsymbol{B}_P$ 的方向垂直纸面向上，在纸面内是坐标 x 的函数。

(1) 在 A 点处，$x=d/2$，有

$$B_A=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)=\frac{2\mu_0 I_1}{\pi d}=4.0\times10^{-5}\ \mathrm{T}$$

(2) 取矩形面积的法线方向垂直纸面向上，与 $\boldsymbol{B}$ 的方向一致，通过面积元 dS 的磁通量为

$$d\Phi=\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=BdS\cos0°=BdS=Bldx$$



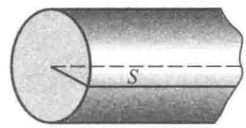
解图 8-22

通过矩形面积的磁通量为

$$\Phi=\int d\Phi=\int_S\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{r_1}^{r_1+r_2}Bldx=\int_{r_1}^{r_1+r_2}\left[\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}+\frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-x)}\right]ldx$$
$$=\frac{\mu_0 I_1 l}{\pi}\ln\frac{r_1+r_2}{r_1}=2.2\times10^{-6}\ \mathrm{Wb}$$

4. 安培环路定理

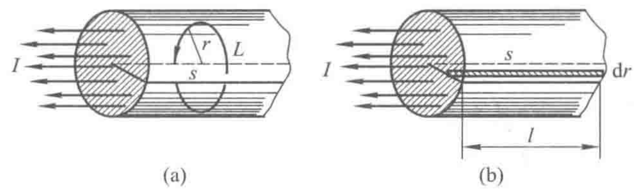
8-23. 一根很长的铜导线，载有电流 10 A，在导线内部通过中心线作一平面 S，如习题 8-23 图所示。试计算通过导线 1 m 长的 S 平面内的磁感应通量。



习题 8-23 图

解：如解图 8-23（a）所示，在导线截面内以中心线为圆心，r 为半径作闭合回路 L，运用安培环路定理，有

$$\oint_L \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = B2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2}\pi r^2$$



解图 8-23

得导线内磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}, \quad r<R$$

式中 R 为导线截面半径，$\boldsymbol{B}$ 与 L 的绕向一致。

如解图 8-23(b)所示，在平面 S 上取长为 l，宽为 $\mathrm{d}r$ 的面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，可有

$$\mathrm{d}\Phi = \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = B\mathrm{d}S\cos 0° = B\mathrm{d}S = Bl\mathrm{d}x$$

通过矩形面积的磁通量为

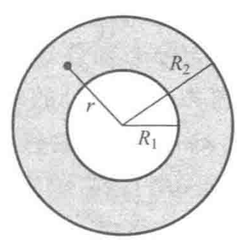
$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^R Bl\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 Il}{2\pi R^2}\int_0^R r\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 Il}{4\pi}$$

上式中，令 $l=1$ m，得通过导线 1 m 长的 S 平面内的磁通量为

$$\Phi = \frac{\mu_0 Il}{4\pi} = \frac{4\times3.14\times10^{-7}\times10\times1}{4\times3.14}\ \mathrm{Wb} = 1.0\times10^{-6}\ \mathrm{Wb}$$

8-24. 如习题 8-24 图所示的无限长空心柱形导体半径分别为 R_1 和 R_2，导体内载有电流 I，设电流 I 均匀分布在导体的横截面上。求证导体内部各点（$R_1<r<R_2$）的磁感应强度 B 由下式给出：

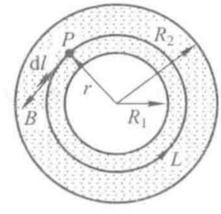
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R_2^2-R_1^2)}\frac{r^2-R_1^2}{r}$$



习题 8-24 图

试以 $R_1=0$ 的极限情形来检验这个公式。$r=R_2$时又怎样？

证明：由电流分布可知，磁感应线为轴对称分布。如解图 8-24 所示，在导体截面上取任意 P 点为考察点，过 P 作同轴的半径为 r 的闭合回路 L，令 L 的绕行方向与电流呈右手螺旋关系。



解图 8-24

对回路 L 运用安培环路定理，因各处的 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的方向一致，有

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=B\cdot 2\pi r=\mu_0 I'$$

式中 I'是环路 L 所围电流

$$I'=I\frac{r^2-R_1^2}{R_2^2-R_1^2}$$

由此解得导体内部任意点 P 处磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi(R_2^2-R_1^2)}\frac{r^2-R_1^2}{r}\quad (R_1<r<R_2)$$

命题得证。

在上式中，令 $R_1=0$，有

$$B=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R_2^2}$$

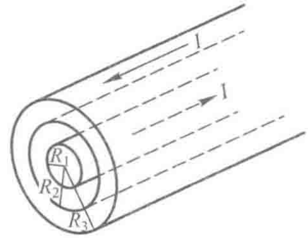
这是半径为 R_2的实心柱形载流导体内，离轴 r 处磁感应强度的大小。

在导线表面 $r=R_2$，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R_2}$$

这是电流 I 集中在轴线上，离轴为 R_2处的磁感应强度的大小。

8-25. 有一根很长的同轴电缆，由一圆柱形导体和一同轴圆筒状导体组成，圆柱的半径为 R_1，圆筒的内外半径分别为 R_2和 R_3，如习题 8-25 图所示。在这两导体中，载有大小相等而方向相反的电流 I，电流均匀分布在各导体的截面上。求：(1) 圆柱导体内各点($r<R_1$)的磁感应强度；(2) 两导体之间($R_1<r<R_2$)的磁感应强度；(3) 外圆筒导体内($R_2<r<R_3$)的磁感应强度；(4) 电缆外($r>R_3$)各点的磁感应强度。



习题 8-25 图

解：无限长同轴电缆电流的磁感应强度呈轴

对称分布，可运用安培环路定理求解。

（1）在圆柱导体内，以 $r(r<R_1)$ 为半径，作同轴的闭合回路 L_1，令 L_1 的绕行方向与圆柱内的电流呈右手螺旋关系，运用安培环路定理，有

$$\oint_{L_1} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I'$$

式中 I' 是环路 L_1 所围电流

$$I' = \frac{I\pi r^2}{\pi R_1^2} = \frac{Ir^2}{R_1^2}$$

得圆柱内各点 $(r<R_1)$ 磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R_1^2} \quad (r<R_1)$$

（2）在两导体之间，以 $r(R_1<r<R_2)$ 为半径，作同轴的闭合回路 L_2，使 L_2 的绕行方向与圆柱电流 I 呈右手螺旋关系，运用安培环路定理，有

$$\oint_{L_2} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (R_1<r<R_2)$$

（3）在外圆筒导体内，以 $r(R_2<r<R_3)$ 为半径，作同轴的闭合回路 L_3，使 L_3 的绕行方向与圆柱电流 I 呈右手螺旋关系，运用安培环路定理，有

$$\oint_{L_3} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 (I-I')$$

式中 I' 是环路 L 所围外圆筒导体内的电流，与圆柱电流 I 的流向相反。

$$I' = I\frac{r^2-R_2^2}{R_3^2-R_2^2}$$

所以，有

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1-\frac{r^2-R_2^2}{R_3^2-R_2^2}\right) \quad (R_2<r<R_3)$$

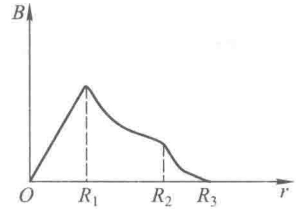
（4）以 $r(r>R_3)$ 为半径，在电缆外作同轴的闭合回路 L_4，运用安培环路定理可有

$$\oint_{L_4} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

在电缆外空间，有

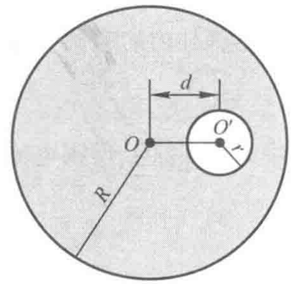
$$B = 0 \quad (r>R_3)$$

根据以上（1）—（4）的计算结果，作 $B-r$ 曲线如解图 8-25 所示。



解图 8-25

8-26. 在半径为 R 的无限长金属圆柱体内部挖去一半径为 r 的无限长圆柱体，两柱体的轴线平行，相距为 d，如习题 8-26 图所示。今有电流沿空心柱体的轴线方向流动，电流 I 均匀分布在空心柱体的截面上。(1) 分别求圆柱轴线上和空心部分轴线上的磁感应强度的大小；(2) 当 $R=1.0\ \mathrm{cm}$，$r=0.5\ \mathrm{mm}$，$d=5.0\ \mathrm{mm}$ 和 $I=31\ \mathrm{A}$ 时，计算上述两处磁感应强度的值。



习题 8-26 图

分析：利用“补偿法”和磁感应强度的叠加原理求解。设想空心柱体由半径为 R 的电流均匀分布于圆截面的圆柱和半径为 r 的通有等值反向电流的圆柱构成。各处的磁感应强度，为两个反向电流磁感应强度的矢量和。这两个无限长圆柱电流的磁感应强度都具有各自的轴对称分布，可由安培环路定理求得。

解：设半径为 R 的圆柱截面上均匀分布的电流为 I_1，半径为 r 的圆柱截面上均匀分布有与 I_1 流向相反的电流 I_2，有

$$I_1=\frac{IR^2}{R^2-r^2},\quad I_2=\frac{Ir^2}{R^2-r^2}$$

设 I_1 和 I_2 在场点的磁感应强度分别为 $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$，有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2$$

(1) 圆柱轴线 O 点的磁感应强度 B_O：对半径为 R 的圆柱电流 I_1 而言，O 点在轴线上，故有 $B_1=0$；对半径为 r 的圆柱电流 I_2 而言，O 点在圆柱外。以 O' 为圆心，以 d 为半径在截面内作安培环路，有

$$\oint_L \boldsymbol{B}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=B_2\cdot 2\pi d=\mu_0 I_2$$

得

$$B_2=\frac{\mu_0 Ir^2}{2\pi d(R^2-r^2)}$$

所以，圆柱轴线 O 点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_O=\boldsymbol{B}_2$，其方向垂直于 d，与 I_2 呈右手螺旋关系。

空心部分轴线 O' 点的磁感应强度 $B_{O'}$：O' 点处于圆柱电流 I_2 的轴线上，故有 $B_2=0$；对半径为 R 的圆柱电流 I_1，O' 点处于圆柱内部。以 O 为圆心，以 d 为半径在截面内作安培环路，有

$$\oint_L \boldsymbol{B}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=B_1\cdot 2\pi d=\mu_0 I_1'$$

式中

$$I_1'=\frac{I_1 d^2}{R^2}=\frac{Id^2}{R^2-r^2}$$

是环路所围电流,得

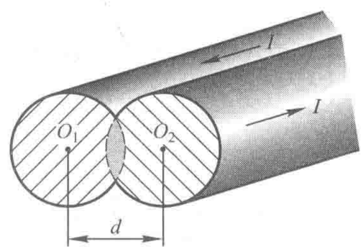
$$B_1=\frac{\mu_0 Id}{2\pi(R^2-r^2)}$$

所以,空心部分轴线 O'点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_{O'}=\boldsymbol{B}_1$,其方向垂直于 d,与 I_1呈右手螺旋关系。

(2) 代入数据,可得

$$B_O=3.11\times10^{-6}\ \mathrm{T},\quad B_{O'}=3.11\times10^{-4}\ \mathrm{T}$$

8-27. 如习题 8-27 图所示,一柱形导体由两无限长平行放置的、表面绝缘的柱形导体组成,其中部分交叠在一起。设两个圆柱体横截面(即图中斜线所示)的面积皆为 S,两圆柱轴线间距为 d。如在两横截面中通有等值反向的电流 I,且在横截面内均匀分布。求两导体交叠部分中的磁感应强度。



习题 8-27 图

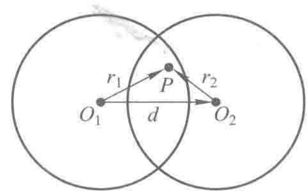
分析:两导体交叠部分中,场点 P 的磁感应强度为两圆柱电流各自在该点磁感应强度的矢量和,每个圆柱电流的磁感应强度都具轴对称分布,可由安培环路定理求得。

解:两导体截面的电流密度分别为

$$\boldsymbol{j}=\pm\frac{I}{S}\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{k}$ 为垂直纸面向外的单位矢量。

在两导体的交叠区域任取场点 P,如解图 8-27 所示。以 O_1为圆心,过 P 点作半径为 r_1 的安培环路可得



解图 8-27

$$\boldsymbol{B}_1=\frac{\mu_0 I\pi r_1^2}{2\pi r_1 S}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}_{r1})=\frac{\mu_0 I}{2S}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_1)$$

式中 $\boldsymbol{r}_1$为从 O_1指向 P 点的矢量,$\boldsymbol{e}_{r1}$为 $\boldsymbol{r}_1$的单位矢量。

以 O_2为圆心,过 P 点作半径为 r_2的安培环路可得

$$\boldsymbol{B}_2=-\frac{\mu_0 I}{2S}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_2)$$

式中 $\boldsymbol{r}_2$为从 O_2指向 P 点的矢量。

P 点的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2=\frac{\mu_0 I}{2S}[\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)]=\frac{\mu_0 I}{2S}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{d}$$

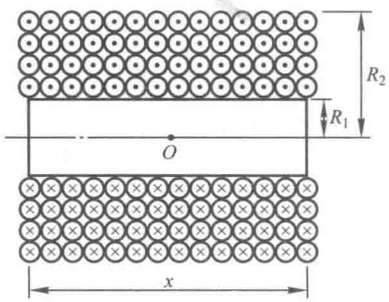
式中利用了矢量关系 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{d}+\boldsymbol{r}_2$。

由上述结果可知,在两导体交叠区域内的磁感应强度均匀分布,垂直于 d 向上。

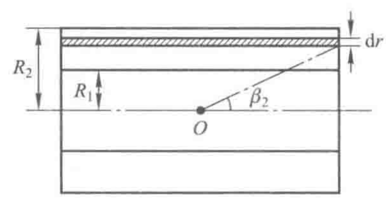
8-28. 一多层密绕的螺线管,长为 l,内半径为 R_1,外半径为 R_2,如习题 8-28 图所示。设总匝数为 N,导线中通过的电流为 I。试求螺线管轴线上中心 O 点处的磁感应强度。

解:已知半径为 R、总匝数为 N、通过电流为 I 的单层密绕螺线管轴线中心 O 点处磁感应强度为

$$B=\mu_0 nI\cos\beta=\mu_0 nI\frac{\dfrac{l}{2}}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{l}{2}\right)^2}}=\frac{\mu_0 NI}{\sqrt{(2R)^2+l^2}}$$



习题 8-28 图



解图 8-28

在多层密绕螺线管中取厚度为 dr 的薄层螺线管,此薄层中有电流匝数

$$I\mathrm{d}N=I\frac{N}{(R_2-R_1)}\mathrm{d}r$$

作代换,$B\to\mathrm{d}B$,$NI\to I\mathrm{d}N$,$R\to r$,薄层螺线管轴线中心 O 点处磁感应强度为

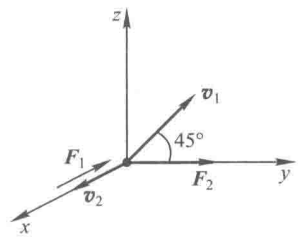
$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 NI\mathrm{d}r}{(R_2-R_1)\sqrt{(2r)^2+l^2}}$$

对上式直接积分,有

$$B=\int\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 NI}{R_2-R_1}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(2r)^2+l^2}}=\frac{\mu_0 NI}{2(R_2-R_1)}\ln\frac{R_2+\sqrt{R_2^2+\left(\dfrac{l}{2}\right)^2}}{R_1+\sqrt{R_1^2+\left(\dfrac{l}{2}\right)^2}}$$

5. 洛伦兹力

8-29. 一带有电荷量为 4.0×10^{-9} C 的粒子，在 yz 平面内沿着和 Oy 轴成 45° 角的方向以速度 $v_1=3\times10^6$ m/s 运动，它受到均匀磁场的作用力 F_1 逆 Ox 轴方向；当这个粒子沿 Ox 轴方向以速度 $v_2=2\times10^6$ m/s 运动时，它受到沿 Oy 轴方向的作用力 $F_2=4\times10^2$ N。求磁感应强度的大小和方向（如习题 8-29 图所示）。



习题 8-29 图

解：根据洛伦兹力 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$，由 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_1$ 的方向判断，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 可有 B_y 和 $-B_z$ 分量；由 $\boldsymbol{v}_2$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的方向判断，磁感应强度沿 Oz 轴负方向。空间磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 具有唯一确定的大小和方向，由此可判定，$\boldsymbol{B}$ 沿 Oz 轴负方向，即 $\boldsymbol{B}=-B\boldsymbol{k}$。

以上结论也可通过求解洛伦兹力分量式方程得到。

$\boldsymbol{B}$ 的大小为

$$B=\frac{F_2}{qv_2\sin\theta}=\frac{4\times10^2}{4.0\times10^{-9}\times2\times10^6\times\sin 90^\circ}\ \text{T}=5\times10^4\ \text{T}$$

$\boldsymbol{F}_1$ 的大小为

$$F_1=qv_1B\sin 135^\circ=4.24\ \text{N}$$

8-30. 一电子以 1.0×10^6 m/s 的速度进入一均匀磁场，速度方向与磁场方向垂直。已知电子在磁场中作半径为 0.1 m 的圆周运动，求磁感应强度的大小和电子的旋转角速度。

解：根据 $\boldsymbol{F}=e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{B}$ 时，电子作匀速率圆周运动所受的磁场力最大，有

$$|F_{\text{Max}}|=evB=\frac{m_e v^2}{R}$$

式中 m_e 为电子质量，可得

$$B=\frac{m_e v}{eR}=\frac{9.1\times10^{-31}\times1.0\times10^6}{1.6\times10^{-19}\times0.1}\ \text{T}=5.69\times10^{-5}\ \text{T}$$

由

$$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi m_e}{eB}$$

得电子作圆周运动的角速度为

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{eB}{m_e}=1.0\times10^7\ \text{s}^{-1}$$

8-31. 一质子以 1.0×10^7 m/s 的速度射入磁感应强度 $B=1.5$ T 的均匀磁场中，其速度方向与磁场方向成 30° 角。计算：(1) 质子作螺旋运动的半径；(2) 螺距；(3) 旋转频率。

解：将质子速度按磁场方向分解，有

$$v_{\perp}=v\sin\theta,\quad v_{//}=v\cos\theta$$

(1) $v_{\perp}$ 使质子在磁场中作匀速率圆周运动，有

$$ev_{\perp}B=m_{\mathrm{p}}\frac{v_{\perp}^2}{R}$$

圆周运动半径为

$$R=\frac{m_{\mathrm{p}}v_{\perp}}{eB}=\frac{m_{\mathrm{p}}v\sin\theta}{eB}=3.48\times10^{-2}\ \mathrm{m}$$

(2) $v_{//}$ 使质子在磁场中作匀速直线运动，运动轨迹为螺旋线。螺距为

$$h=v_{//}T=v_{//}\frac{2\pi R}{v_{\perp}}=2\pi R\cot\theta=0.38\ \mathrm{m}$$

(3) 旋转频率为

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{eB}{2\pi m_{\mathrm{p}}}=2.28\times10^{7}\ \mathrm{s}^{-1}$$

8-32. 一电子在 $B=2.0\times10^{-3}$ T 的均匀磁场中作半径 $R=20$ cm 的螺旋线运动，螺距 $h=50$ cm。已知电子的比荷 $e/m_{\mathrm{e}}=1.76\times10^{11}$ C/kg，求这个电子的速度。

解：电子在均匀磁场中作螺旋运动的半径为

$$R=\frac{m_{\mathrm{e}}v_{\perp}}{eB}$$

得

$$v_{\perp}=\frac{eRB}{m_{\mathrm{e}}}=7.04\times10^{7}\ \mathrm{m/s}$$

螺距为

$$h=v_{//}T=v_{//}\frac{2\pi m_{\mathrm{e}}}{eB}$$

得

$$v_{//}=\frac{heB}{2\pi m_{\mathrm{e}}}=2.80\times10^{7}\ \mathrm{m/s}$$

所以，电子速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小为

$$v=\sqrt{v_{//}^2+v_{\perp}^2}=7.5\times10^{7}\ \mathrm{m/s}$$

与 $\boldsymbol{B}$ 的夹角为

$$\alpha=\arctan\frac{v_{\perp}}{v_{//}}=68.2°$$

8-33. 一束单价铜离子以 1.0×10^5 m/s 的速率进入质谱仪的均匀磁场，转过 180°后各离子打在照相底片上，如磁感应强度为 0.50 T，试计算质量为 63 u 和 65 u 的两同位素分开的距离（$1\ \mathrm{u}=1.66\times10^{-27}$ kg）。

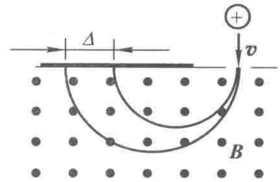
解：如解图 8-33，带电粒子在均匀磁场中作圆周运动的直径为

$$d=2R=\frac{2mv}{eB}$$

两种同位素粒子分开的距离为

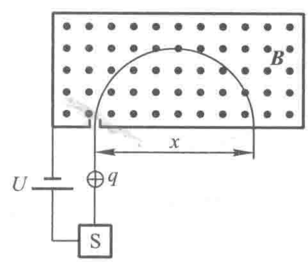
$$\Delta=d_1-d_2=2(R_1-R_2)$$

$$=2\left(\frac{m_1v}{qB}-\frac{m_2v}{qB}\right)=8.4\times10^{-3}\ \mathrm{m}$$



解图 8-33

8-34. 如习题 8-34 图所示为测定离子质量所用的装置。离子源 S 产生一质量为 m、电荷量为 $+q$ 的离子，离子从源出来时的速度很小，可以看成是静止的。离子经电势差 U 加速后进入磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的均匀磁场，在这磁场中，离子沿一半圆周运动后射到离入口缝隙 x 远处的感光底片上，并予以记录。试证明离子的质量为 $m=\frac{B^2q}{8U}x^2$。



习题 8-34 图

证：设离子受电场作用获得的速度为 v。根据动能定理，有

$$qU=\frac{1}{2}mv^2$$

得

$$v=\sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

速率为 v 的离子垂直进入均匀磁场后，受磁场力作用作匀速率圆周运动，有

$$qvB=m\frac{v^2}{R}$$

轨道半径为

$$R=\frac{mv}{qB}=\frac{1}{qB}m\sqrt{\frac{2qU}{m}}=\frac{1}{qB}\sqrt{2qUm}$$

$R=\frac{x}{2}$ 时

$$m=\frac{B^2q}{8U}x^2$$

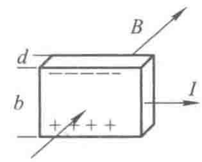
命题得证。

8-35. 在霍耳效应实验中，宽 1.0 cm、长 4.0 cm、厚 1.0×10^{-3} cm 的导体沿长度方向载有 3.0 A 的电流，当磁感应强度 $B=1.5$ T 的磁场垂直地通过该薄导体时，产生 1.0×10^{-5} V 的霍耳电压（在宽度两端）。试由这些数据求：(1) 载流子的漂移速度；(2) 每立方厘米的载流子数；(3) 假设载流子是电子，试就一给定的电流和磁场方向在图上画出霍耳电压的极性。

解：如解图 8-35 所示，导体的宽为 $b=1.0$ cm，厚为 $d=1.0\times10^{-3}$ cm。

(1) 霍耳电场的强度为

$$E_H=\frac{U}{b}=\frac{1.0\times10^{-5}}{1.0\times10^{-2}}\ \text{V/m}=1.0\times10^{-3}\ \text{V/m}$$



解图 8-35

载流子的漂移速度为

$$\bar{v}=\frac{E_H}{B}=6.7\times10^{-4}\ \text{m/s}$$

(2) 由电流

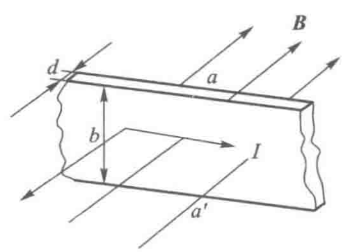
$$I=nq\bar{v}S=nq\bar{v}bd$$

得，载流子密度为

$$n=\frac{I}{q\bar{v}bd}=2.8\times10^{29}\,\text{m}^{-3}=2.8\times10^{23}\,\text{cm}^{-3}$$

(3) 载流子为电子时，电压极性如解图 8-35 所示。

8-36. 一铜片厚为 $d=1.0$ mm，放在 $B=1.5$ T 的磁场中，磁场方向与铜片表面垂直，如习题 8-36 图所示。已知铜片里每立方米有 8.4×10^{22} 个自由电子，当铜片中有电流 $I=200$ A 时，(1) 求铜片两边的电势差 $U_{aa'}$；(2) 铜片宽度 b 对 $U_{aa'}$ 有无影响？为什么？



习题 8-36 图

解：(1) 由霍耳电势差可得

$$U_{aa'}=-\frac{1}{nq}\frac{IB}{d}=-\frac{200\times1.5}{8.4\times10^{22}\times10^{6}\times1.6\times10^{-19}\times1.0\times10^{-3}}\ \text{V}$$
$$=-2.2\times10^{-5}\ \text{V}$$

$U_{aa'}<0$ 表明，$V_a<V_{a'}$。

(2) 通过铜片截面的电流 I 恒定时，宽度 b 对 $U_{aa'}$ 无影响。

8-37. 在一气泡室中，磁场为 20 T，一高能质子垂直于磁场飞过，留下一半径为 3.5 m 的圆弧径迹。求此质子的动量和能量。

解:设高能质子的质量为 m_p,带电荷量为 q。由

$$R=\frac{m_p v}{qB}=\frac{p}{qB}$$

得 $$p=qRB=1.6\times10^{-19}\times3.5\times20\ \mathrm{kg\cdot m/s}=1.12\times10^{-17}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

按经典理论估算的动能为

$$E_k=\frac{p^2}{2m_{p_0}}=\frac{(1.12\times10^{-17})^2}{2\times1.67\times10^{-27}}\ \mathrm{J}=3.76\times10^{-8}\ \mathrm{J}=235\ \mathrm{GeV}$$

此值远大于质子的静止能

$$m_{p_0}c^2=1.67\times10^{-27}\times(3\times10^8)^2\ \mathrm{J}=1.5\times10^{-10}\ \mathrm{J}\approx1\ \mathrm{GeV}$$

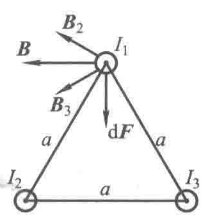
因而需用相对论计算质子能量

$$E=\sqrt{c^2p^2-m_{p_0}^2c^4}\approx cp=3\times10^8\times1.12\times10^{-17}\ \mathrm{J}=21\ \mathrm{GeV}$$

6. 安培力、磁力矩和磁场力的功

8-38. 彼此相距 10 cm 的三根平行的长直导线中各通有 10 A 同方向的电流,试求各导线上每 1 cm 上作用力的大小和方向。

分析:三个长直电流各处于等边三角形的三个顶角,每一电流都受另两个电流合磁场的安培力。由电流分布的对称性可判断:各电流受安培力的大小相同,方向不同。



解图 8-38

解:如解图 8-38 所示,设三个相同的电流分别为 I_1、I_2 和 I_3,彼此相距 a。

考察电流 I_1 的受力:设 I_2 和 I_3 在 I_1 处的磁感应强度分别为 $\boldsymbol{B}_2$ 和 $\boldsymbol{B}_3$,它们的矢量和为 $\boldsymbol{B}$,由解图 8-38 可知,$\boldsymbol{B}$ 的方向在纸面内水平向左,大小为

$$B=2\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi a}$$

在纸面内,电流元 $I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 受安培力的大小为

$$\mathrm{d}F_1=I_1\mathrm{d}l_1B=\frac{\sqrt{3}\mu_0 I^2}{2\pi a}\mathrm{d}l_1$$

令 $\mathrm{d}l_1=1$ cm,得电流为 I_1 的导线上每厘米所受磁场力的大小为

$$\mathrm{d}F_1=3.46\times10^{-6}\ \mathrm{N}$$

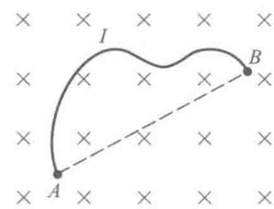
$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1$ 指向等边三角形的中心。

同样的分析也适用于其他两根导线电流,$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2$、$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_3$ 的方向均指向等边三角

形中心。

用两电流间相互作用力计算一导线受力后,再求所受合力,所得结果相同。

8-39. 任意形状的一段导线 AB 如习题 8-39 图所示,其中通有电流 I,导线放在和均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 垂直的平面内。试证明导线 AB 所受的力等于 A 到 B 间载有同样电流的直导线所受的力。



习题 8-39 图

证明 1:取坐标系 xOy 如解图 8-39 所示。在导线 AB 上任取电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$,受安培力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$$

载流导线 AB 受安培力为

$$F=\int_A^B \mathrm{d}\boldsymbol{F}=\int_A^B I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$$

因 I、$\boldsymbol{B}$ 不随 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 变化,有

$$\boldsymbol{F}=I\left(\int_A^B \mathrm{d}\boldsymbol{l}\right)\times\boldsymbol{B}$$

如解图 8-39(a)所示,$\left(\int_A^B \mathrm{d}\boldsymbol{l}\right)$ 是 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 沿任意曲线由 A 到 B 的矢量和 $\boldsymbol{L}_{AB}$,即有

$$\int_A^B \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{L}_{AB}=L_{AB}\boldsymbol{i}$$

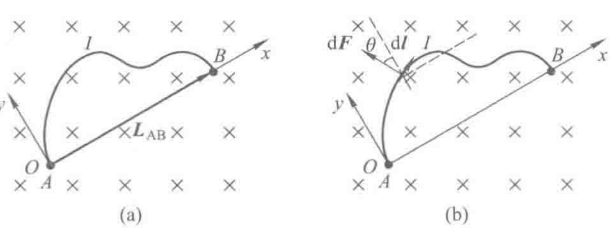
所以
$$\boldsymbol{F}=I\left(\int_A^B \mathrm{d}\boldsymbol{l}\right)\times\boldsymbol{B}=I(L_{AB}\boldsymbol{i})\times\boldsymbol{B}=I\boldsymbol{L}_{AB}\times\boldsymbol{B}=IL_{AB}B\boldsymbol{j}$$

$\boldsymbol{F}$ 垂直于 $\boldsymbol{L}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 构成的平面沿 y 轴正方向。

在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的一段任意载流导线 AB 所受的磁场力,等于一段由 A 到 B 的长直电流所受之力。

证明 2:如解图 8-39(b)所示,电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 受安培力的大小为 $\mathrm{d}F=IB\mathrm{d}l$,在 x,y 方向的分量分别为

$$\mathrm{d}F_x=-IB\mathrm{d}l\sin\theta=-IB\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}F_y=IB\mathrm{d}l\cos\theta=IB\mathrm{d}x$$



解图 8-39

整段导线受力为 $$F_x=\int \mathrm{d}F_x=-IB\int \mathrm{d}y=0$$

$$F_y=\int \mathrm{d}F_y=IB\int_{x_A}^{x_B}\mathrm{d}x=IB(x_B-x_A)=IBL_{AB}$$

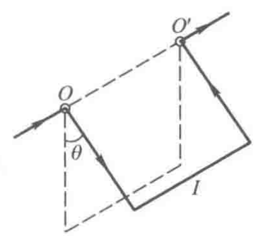
即 $$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_y=IL_{AB}B\boldsymbol{j}$$

证明 3:添加一直电流由 B 到 A,构成一闭合载流线圈,有

$$\boldsymbol{F}=0=\boldsymbol{F}_{AB}+\boldsymbol{F}_{BA}$$

所以 $$\boldsymbol{F}_{AB}=-\boldsymbol{F}_{BA}=-IL_{BA}B\boldsymbol{j}=IL_{AB}B\boldsymbol{j}$$

8-40. 截面积为 S、密度为 ρ 的铜导线被弯成正方形的三边,可以绕水平轴转动,如习题 8-40 图所示。导线放在方向为竖直向上的均匀磁场中,当导线中的电流为 I 时,导线离开原来的竖直位置偏转一角度 θ 而平衡。如 $S=2\ \mathrm{mm}^2$,$\rho=8.9\ \mathrm{g/cm}^3$,$\theta=15°$,$I=10\ \mathrm{A}$,求磁感应强度为多少?



习题 8-40 图

分析:对 OO' 轴,由载流导线所受重力矩和磁力矩相平衡求解。

解:设导线各边的质量为 m、长为 l。受重力对 OO' 轴的力矩为

$$M_G=2mg\frac{l}{2}\sin\theta+mgl\sin\theta=2\rho l^2Sg\sin\theta$$

$\boldsymbol{M}_G$ 由 O 指向 O'。受磁力对 OO' 轴的力矩为

$$M_m=F_ml\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=Il^2B\cos\theta$$

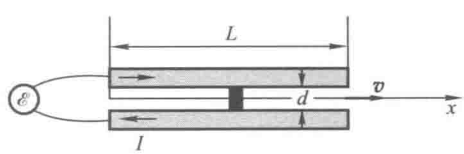
$\boldsymbol{M}_m$ 由 O' 指向 O,式中 $F_m=IlB$,是正方形中与 OO' 轴平行的一边所受安培力。

由两力矩平衡,得

$$B=\frac{2S\rho g}{I}\tan\theta=9.35\times10^{-3}\ \mathrm{T}$$

8-41. 如习题 8-41 图所示是一种"电磁导轨炮"的原理图。通以电流 I 后,在两条平行导轨间可自由滑动的导电物体(如子弹)会被磁力加速而发射出去。设两条半径为 r 的圆柱形导轨的间距为 d,并可近似为半无限长。试证明作用在导电物上的磁场力为

$$F=\frac{\mu_0I^2}{2\pi}\ln\frac{d+r}{r}$$



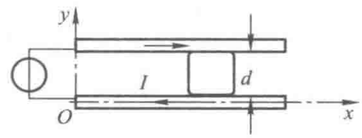
习题 8-41 图

分析：平行导轨、导电物体与电源构成闭合回路，导电物体受电流磁场的作用力而被发射。

解：取坐标系 xOy，如解图 8-41 所示。两半无限长导轨间 y 处的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{d+2r-y}\right)$$

$\boldsymbol{B}$ 垂直纸面向下。



解图 8-41

导电物体的宽度为 d，流过的电流为 I，受磁场力的大小为

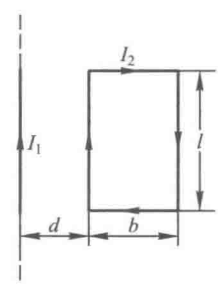
$$F=\int \mathrm{d}F=\int IB\mathrm{d}y=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\int_r^{r+d}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{d+2r-y}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d+r}{r}$$

$\boldsymbol{F}$ 的方向向右。

8-42. 如习题 8-42 图所示，在长直导线旁有一矩形线圈，导线中通有电流 $I_1=20$ A，线圈中通有电流 $I_2=10$ A。已知 $d=1$ cm，$b=9$ cm，$l=20$ cm，求矩形线圈上受到的合力是多少？

解：矩形线圈 I_2 在长直电流 I_1 的非均匀磁场中，上下两边受合力为零，左右两边受力大小不等、方向相反。



习题 8-42 图

电流 I_1 在线圈平面的磁感应强度垂直纸面向里，在 d 处为

$$B_1(d)=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

在 $(d+b)$ 处为

$$B_1(d+b)=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+b)}$$

线圈左右两边受力分别为

$$F_{左}=I_2B_1(d)l=\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d}，向左$$

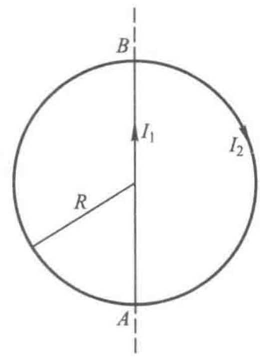
$$F_{右}=I_2B_1(d+b)l=\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi(d+b)}，向右$$

所受合力为

$$F=F_{左}-F_{右}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}l\left[\frac{1}{d}-\frac{1}{(d+b)}\right]=7.2\times10^{-4}\ \mathrm{N}$$

方向向左。

8-43. 半径为 R 的平面圆形线圈中载有电流 I_2，另一无限长直导线 AB 中载有电流 I_1。(1) 设 AB 通过圆心，并和圆形线圈在同一平面内（如习题 8-43 图所示），求圆形线圈所受的磁场力；(2) 若 AB 与圆心相距 $d(d>R)$，仍在同一平面内，求圆形线圈所受的磁场力。



习题 8-43 图

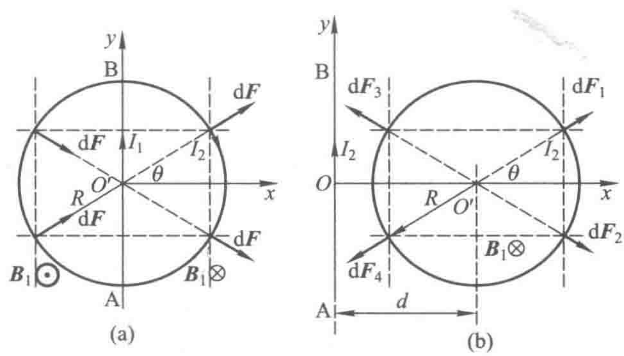
分析：利用圆电流 I_2 所受 I_1 磁场力的局部对称性，由力的叠加原理求解合力。

解：(1) 圆线圈上各电流元 $I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 处的磁感应强度为

$$B_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi R\cos\theta}$$

受力的大小为　$\mathrm{d}F=I_2B_1\mathrm{d}l=\dfrac{\mu_0 I_1 I_2\mathrm{d}l}{2\pi R\cos\theta}$

由解图 8-43(a) 可知，圆线圈所受磁场力相对 x 轴有对称性，合力的 y 分量为零，即 $F_y=0$。线圈所受合磁力沿 x 轴正方向。



解图 8-43

电流元 $I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 受力 $\mathrm{d}F$ 的 x 分量

$$\mathrm{d}F_x=\mathrm{d}F\cos\theta$$

对 $\mathrm{d}F_x$ 积分，得圆线圈所受合力为

$$F=F_x=\int \mathrm{d}F_x=\int \mathrm{d}F\cos\theta=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l=\mu_0 I_1 I_2$$

也可表示为

$$\boldsymbol{F}=\mu_0 I_1 I_2 \boldsymbol{i}$$

(2) 设圆线圈在 I_1 的右侧,各电流元 $I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 所在处的 $\boldsymbol{B}_1$ 都垂直纸面向里,大小为

$$B_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+R\cos\theta)}$$

所受磁场力为

$$\mathrm{d}F=I_2 B_1\mathrm{d}l=\frac{\mu_0 I_1 I_2 R\mathrm{d}\theta}{2\pi(d+R\cos\theta)}$$

如解图 8-43(b)所示,圆线圈受力相对 x 轴有对称性,所受合力的 y 分量为零,即 $F_y=0$。圆线圈受合力在 x 方向,大小为

$$\begin{aligned}F&=F_x=\int \mathrm{d}F_x=\int \mathrm{d}F\cos\theta\\&=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I_1 I_2 R\cos\theta\mathrm{d}\theta}{2\pi(d+R\cos\theta)}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{d}{d+R\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta\\&=\mu_0 I_1 I_2\left(1-\frac{2d}{\sqrt{d^2-R^2}}\right)<0\end{aligned}$$

整个圆线圈受磁场力的方向沿 x 轴负方向。

计算积分时用到公式:$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\theta}{d+R\cos\theta}=\frac{2}{\sqrt{d^2-R^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{d-R}{d+R}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$。

8-44. 假定§8-6 的图 8-42(b) 中磁悬浮列车的速度达 400 km/h,列车上两相邻推进磁体的距离为 10.0 m。问钢轨内侧推进线圈的交变电流频率为多少才能对列车产生驱动力,使之高速前进?

分析:在交变电流变化的一个周期内,钢轨内侧推进线圈磁场的极性相应地作了一次 N→S 或 S→N 的变换,在此过程中对列车完成了向前吸引和推斥的作用,使列车向前运行两个磁体距离,即 $L=20$ m。

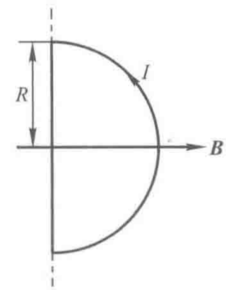
解:磁悬浮列车的速度为

$$v=\frac{400\times10^3}{3\ 600}\ \mathrm{m/s}=111\ \mathrm{m/s}$$

交变电流的频率应为

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{v}{L}=\frac{111}{20}\ \mathrm{Hz}=5.55\ \mathrm{Hz}$$

8-45. 一半径为 $R=0.1\ \mathrm{m}$ 的半圆形闭合线圈，载有电流 $I=10\ \mathrm{A}$，放在均匀磁场中，磁场方向与线圈面平行，如习题 8-45 图所示。已知 $B=0.5\ \mathrm{T}$，求：(1) 线圈所受力矩的大小和方向（以直径为转轴）；(2) 若线圈受力矩的作用转到线圈平面与磁场垂直的位置，并保持电流 I 不变，则力矩做功多少？



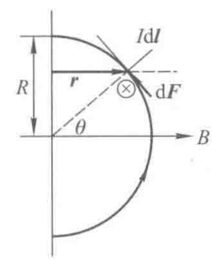
习题 8-45 图

解：(1) 线圈的直线段是转轴，力矩为零。线圈圆弧段上的电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，受磁场力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$$

$$\mathrm{d}F=IB\mathrm{d}l\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=IB\mathrm{d}l\cos\theta$$

方向如解图 8-45 所示。



解图 8-45

$\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 对转轴（线圈直径）的力矩为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{F}$$

圆弧段上所有电流元受磁力对转轴的力矩 $\mathrm{d}\boldsymbol{M}$ 的方向相同，都沿直径轴向上。所以，线圈受力矩的大小为

$$M=\int\mathrm{d}M=IB\int r\cos\theta\mathrm{d}l$$

将 $r=R\cos\theta$，$\mathrm{d}l=R\mathrm{d}\theta$，代入上式，有

$$M=IBR^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}BI\pi R^2=7.85\times10^{-2}\ \mathrm{N\cdot m}$$

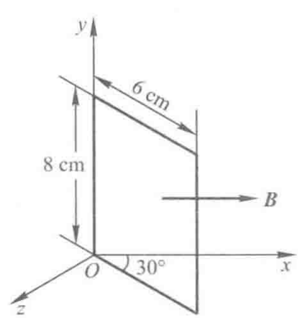
另解：线圈的磁矩为 $\boldsymbol{m}=IS\boldsymbol{e}_n$，单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 垂直线圈平面向外。由均匀磁场中载流线圈受磁矩 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$ 可知，$\boldsymbol{M}$ 沿直径轴向上，大小为

$$M=mB\sin\frac{\pi}{2}=ISB=\frac{1}{2}IB\pi R^2=7.85\times10^{-2}\ \mathrm{N\cdot m}$$

(2) 保持 I 不变，磁力矩做功为

$$A=I\Delta\Phi=I(BS-0)=IB\frac{\pi R^2}{2}=7.85\times10^{-2}\ \mathrm{J}$$

8-46. 如习题 8-46 图所示，一矩形线圈可绕 Oy 轴转动，线圈中载有电流 0.10 A，放在磁感应强度 $B=0.50\ \mathrm{T}$ 的均匀磁场中，B 的方向平行于 Ox 轴，求维持线圈在图示位置时的力矩。



习题 8-46 图

解：设线圈电流顺时针流动，受磁力矩的大小为

$$M_m=mB\sin\alpha=ISB\sin60^\circ=2.08\times10^{-4}\ \mathrm{N\cdot m}$$

$\boldsymbol{M}_m$沿 y 轴向下,外力矩 $\boldsymbol{M}$ 应与其等大、反向,即 $\boldsymbol{M}=-\boldsymbol{M}_m$。外力矩 $\boldsymbol{M}$ 沿 y 轴向上。

8-47. 一螺线管长为 30 cm,直径为 15 mm,由绝缘的细导线密绕而成,每厘米绕有 100 匝,当导线中通以 2.0 A 的电流后,把这螺线管放到 $B=4.0$ T 的均匀磁场中。求:(1) 螺线管的磁矩;(2) 螺线管所受力矩的最大值。

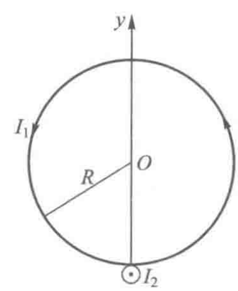
解:(1) 载流螺线管的磁矩为

$$m=NIS=30\times100\times2\times\pi\left(\frac{15\times10^{-3}}{2}\right)^2=1.06\ \mathrm{A\cdot m^2}$$

(2) 螺线管所受力矩最大值为

$$M_{\max}=mB\sin\frac{\pi}{2}=4.2\ \mathrm{N\cdot m}$$

8-48. 有一半径为 R 的圆线圈,通有电流 I_1,另有一通有电流 I_2的无限长直导线,垂直于圆线圈平面放置,如习题 8-48 图所示。设圆线圈可绕 y 轴转动。(1) 试求圆线圈在图示的位置时所受到的磁力矩;(2) 若长直导线放在圆线圈的中心位置,此时圆线圈所受的磁力矩多大?



习题 8-48 图

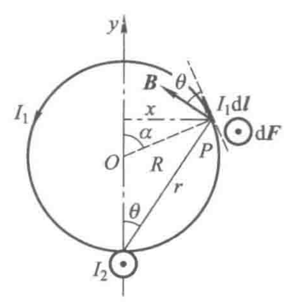
解:(1) 如解图 8-48 所示,在圆线圈上 P 点处取电流元 $I_1\,\mathrm{d}l$,长直电流 I_2在 P 点处的磁感应强度大小为

$$B=\frac{\mu_0I_2}{2\pi r}$$

电流元 $I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 所受安培力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 的方向垂直纸面向外,其大小为

$$\mathrm{d}F=I_1B\mathrm{d}l\sin\theta=\frac{\mu_0I_1I_2}{2\pi r}\sin\theta\mathrm{d}l$$

若在 y 轴左侧的圆线圈上取一与 P 点对称的电流元,其受力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}'$与 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 的大小相等,方向相反,形成一对力偶,使圆线圈可绕 y 轴转动。



解图 8-48

$\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 对 y 轴的力矩 $\mathrm{d}\boldsymbol{M}$ 向下,大小为

$$\mathrm{d}M=x\mathrm{d}F\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\mu_0I_1I_2}{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}l$$

式中 $x=r\sin\theta$,由图示几何关系可知,$\mathrm{d}l=R\mathrm{d}\alpha$,$\alpha=2\theta$,$\mathrm{d}M$ 可表示为

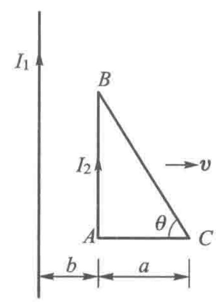
$$\mathrm{d}M=\frac{\mu_0RI_1I_2}{4\pi}(1-\cos\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

所以,圆线圈所受到的磁力矩为

$$M=2\int \mathrm{d}M=\frac{\mu_0 RI_1I_2}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos\alpha)\,\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{2}\mu_0 RI_1I_2$$

(2) 将长直导线放在圆线圈的圆心位置时,圆线圈上的所有电流元与 I_2 的磁感应强度处处平行,因而整个圆线圈都不受力,磁力矩为零。

8-49. 在载有电流 I_1 的长直导线的磁场中,放置一等腰直角三角形线圈,直角边长为 a,通有电流 I_2。开始时线圈和长直导线在同一平面内,如习题 8-49 图所示。保持电流 I_1 和 I_2 不变而将线圈绕不同轴线转过 180°,试求转动过程中磁力所做的功:(1) 绕 AB 边转动;(2) 绕 BC 边转动;(3) 绕 AC 边转动。



习题 8-49 图

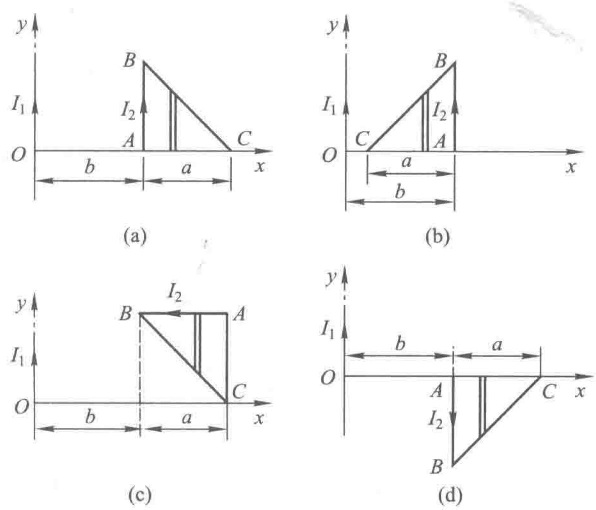
分析:电流恒定的线圈在磁场中移动或转动的过程中,磁力的功与通过线圈磁通量的增量相关。计算非均匀磁场中通过线圈的磁通量,需由积分完成。

解:磁力的功为

$$A=I_2\Delta\Phi=I_2(\Phi_i-\Phi_0)$$

式中 Φ_0 为通过线圈磁通量的初始值,Φ_i 为线圈转动后所通过的磁通量。

取电流 I_2 的方向为线圈的绕行方向,由右手螺旋定则确定的线圈平面法向 $\boldsymbol{n}$ 垂直纸面向里。在纸面内电流 I_1 的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的方向与 $\boldsymbol{n}$ 一致,故 $\Phi_0>0$。



解图 8-49

在解图 8-49(a)所示坐标系 xOy 中,电流 I_1 的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小为

$$B=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

通过面元 $dS=ydx=(a+b-x)dx$ 的磁通量为

$$d\Phi_0=\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}_0=BdS_0=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}ydx=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}(a+b-x)dx$$

通过线圈的磁通量为

$$\Phi_0=\int d\Phi_0=\int_b^{a+b}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}(a+b-x)dx$$
$$=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left[(a+b)\ln\frac{a+b}{b}-a\right]$$

(1) 绕 AB 边转过 180°。如解图 8-49(b)所示

$$dS=ydx=[x-(b-a)]dx$$

$$d\Phi_1=\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}_1=-BdS_1=-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}[x-(b-a)]dx$$

通过线圈的磁通量 Φ_1 为

$$\Phi_1=\int d\Phi_1=-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\int_{b-a}^{b}\frac{1}{x}[x-(b-a)]dx=-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left[a-(b-a)\ln\frac{b}{b-a}\right]$$

磁力所做的功为

$$A_1=I_2\Delta\Phi=I_2(\Phi_1-\Phi_0)$$
$$=-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left[(a+b)\ln\frac{a+b}{b}-(b-a)\ln\frac{b}{b-a}\right]$$

$A_1<0$ 表明,磁场力做负功。线圈从初始的稳定平衡方位转至非稳定平衡方位,需由外力克服磁场力做功。

(2) 绕 BC 边转过 180°。如解图 8-49(c)所示,$dS=ydx=(x-b)dx$,

$$d\Phi_2=\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}_2=-BdS_2=-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}(x-b)dx$$

通过线圈的磁通量为

$$\Phi_2=\int d\Phi_2=-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\int_b^{a+b}\left(1-\frac{b}{x}\right)dx=-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left(a-b\ln\frac{a+b}{b}\right)$$

磁力所做的功为

$$A_2=I_2\Delta\Phi=I_2(\Phi_2-\Phi_0)=-\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi}\ln\frac{a+b}{b}$$

$A_2<0$,在此过程中磁场力做负功。

(3) 绕 AC 边转过 180°。如解图 8-49(d)所示,通过线圈的磁通量与解图 8-49a 的相等反号,即

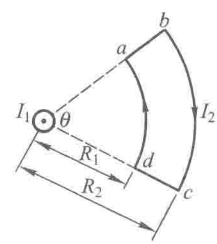
$$\Phi_3=-\Phi_0=-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left[(a+b)\ln\frac{a+b}{b}-a\right]$$

磁力所做的功为

$$\begin{aligned}A_3&=I_2\Delta\Phi=I_2(\Phi_3-\Phi_0)=-2I_2\Phi_0\\&=-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left[(a+b)\ln\frac{a+b}{b}-a\right]\end{aligned}$$

$A_3<0$,在此过程中磁场力做负功。

8-50. 在垂直于长直载有电流 I_1 的导线平面内,放置一扇形线圈 $abcd$,线圈中通有电流 I_2,线圈的半径分别为 R_1 和 R_2,张角为 θ,如习题 8-50 图所示。试求线圈各边所受的磁力以及线圈所受的磁力矩。



习题 8-50 图

解 1: 电流 I_1 的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

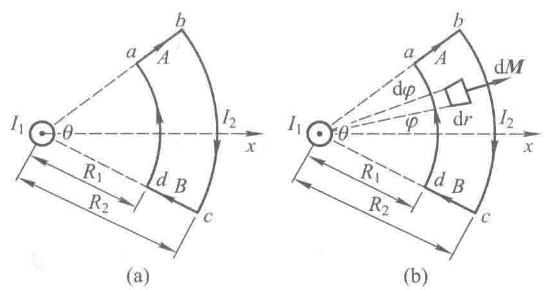
如解图 8-50(a)所示,扇形线圈的 da 段和 bc 段因处处与 I_1 的磁感应 B 线重合,所以　$F_{da}=F_{bc}=0$

线圈的 ab 段和 cd 段处处与 I_1 的磁感应 B 线相垂直,由对称性可知,这两段电流所受磁场力大小相等、方向相反,形成力偶,可使扇形线圈绕图示 x 轴转动。

分别在 ab 段和 cd 段的 A、B 两处对称地选取电流元 $I_2\,\mathrm{d}r$,它们受 I_1 的磁场力为

$$\mathrm{d}F_{ab}=\mathrm{d}F_{cd}=I_2 B\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}\mathrm{d}r$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{ab}$ 垂直纸面向上,$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{cd}$ 垂直纸面向下。



解图 8-50

线圈的 ab 段和 cd 段受 I_1 的磁场力为

$$F_{ab}=F_{cd}=\int_{R_1}^{R_2} I_2 B\mathrm{d}r=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{ab}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{cd}$ 对 x 轴的力矩 $\mathrm{d}\boldsymbol{M}$ 沿 x 轴正方向，有

$$\mathrm{d}M_{ab}=\mathrm{d}M_{cd}=\mathrm{d}F_{ab}\cdot y=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}\cdot r\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}$$

由上式求得线圈所受力矩为

$$M=2M_{ab}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}(R_2-R_1)\sin\frac{\theta}{2}$$

解 2: 扇形线圈所受力矩也可由 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$ 求解，$\boldsymbol{m}$ 为线圈磁矩。

如解图 8-50(b)所示，将扇形线圈分割成无数小扇形线圈，电流 I_2 顺时针流向不变，面积微元 $\mathrm{d}S=r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$，其线圈磁矩为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{m}=I_2\,\mathrm{d}S\boldsymbol{e}_n$$

$\boldsymbol{e}_n$ 为线圈平面法向的单位矢量，垂直纸面向里。

小扇形线圈微元所受力矩为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{M}=\mathrm{d}\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}_2\mathrm{d}SB\boldsymbol{e}_r$$

$\boldsymbol{e}_r$ 是沿径矢的单位矢量。

$\mathrm{d}\boldsymbol{M}$ 在线圈平面内，由对称性可知，$\boldsymbol{M}$ 垂直于 x 轴的分量 $M_y=\int\mathrm{d}M_y=0$。所以，有

$$\mathrm{d}M_x=I_2\mathrm{d}SB\cos\varphi=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

$$M=M_x=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}(R_2-R_1)\sin\frac{\theta}{2}$$

两种解法的结果一致。

7. 有磁介质时的磁场和磁化强度

8-51. 一均匀磁化棒的体积为 1 000 cm^3，其磁矩为 800 A · m^2，棒内的磁感应强度为 0.1 Wb/m^2，求棒内磁场强度的值。

解: 均匀磁化棒内的磁场强度、磁感应强度和磁化强度的关系为

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$$

式中

$$\boldsymbol{M}=\frac{\sum \boldsymbol{m}}{V}$$

设 $\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{M}$ 三者方向相同，有

$$H=\frac{B}{\mu_0}-\frac{\left|\sum \boldsymbol{m}\right|}{V}$$

代入数据可得

$$H=\left(\frac{0.1}{4\times3.14\times10^{-7}}-\frac{800}{1\ 000\times10^{-6}}\right)\ \mathrm{A\cdot m^{-1}}=-7.20\times10^{5}\ \mathrm{A\cdot m^{-1}}$$

式中“－”表示 $\boldsymbol{H}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 方向相反。

8-52. 细螺绕环中心周长 $l=10$ cm，环上均匀密绕线圈 $N=200$ 匝，线圈中通有电流 $I=100$ mA。(1) 求管内的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_0$和磁场强度 $\boldsymbol{H}_0$；(2) 若管内充满相对磁导率 $\mu_r=4\ 200$ 的磁性物质，则管内的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是多少？(3) 磁性物质内由导线中电流产生的 $\boldsymbol{B}_0$和由磁化电流产生的 $\boldsymbol{B}'$各是多少？

解：在细螺绕环内以平均半径 r 作同心环路，$\boldsymbol{H}$ 沿此环路的积分为

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=H\cdot 2\pi r=NI$$

得管内的磁场强度大小为

$$H=\frac{N}{2\pi r}I=\frac{N}{l}I$$

(1) 管内为真空时 $\boldsymbol{H}_0$的大小为

$$H_0=\frac{N}{l}I=\frac{200\times100\times10^{-3}}{10\times10^{-2}}\ \mathrm{A/m}=200\ \mathrm{A/m}$$

磁感应强度的大小为

$$B_0=\mu_0H_0=2.51\times10^{-4}\ \mathrm{T}$$

(2) 管内充满磁介质时，磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的大小不变

$$H=H_0=200\ \mathrm{A/m}$$

磁感应强度的大小为

$$B=\mu H=\mu_0\mu_r H=1.06\ \mathrm{T}$$

(3) 磁介质内由导线电流产生的磁感应强度大小为

$$B_0=2.51\times10^{-4}\ \mathrm{T}$$

磁化电流产生的磁感应强度大小为

$$B'=B-B_0\approx B=1.06\ \mathrm{T}$$

$B\gg B_0$表明，磁性物质内的磁感应强度主要由磁化电流产生。

8-53. 在细螺绕环上密绕线圈共 400 匝，环的平均周长是 40 cm，当导线内通有电流 20 A 时，利用冲击电流计测得环内磁感应强度是 1.0 T，计算：(1) 磁场强度；(2) 磁化强度；(3) 磁化率；(4) 磁化面电流和相对磁导率。

解：在细螺绕环内以平均半径 r 作同心环路，由安培环路定理

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = H \cdot 2\pi r = NI$$

得

$$H = \frac{N}{2\pi r} I = \frac{N}{l} I$$

(1) 环内磁场强度大小为

$$H = \frac{N}{l} I = \frac{400 \times 20}{40 \times 10^{-2}} \text{ A/m} = 2.0 \times 10^4 \text{ A/m}$$

(2) 磁化强度的大小为

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = 7.76 \times 10^5 \text{ A/m}$$

(3) 磁化率为

$$\chi_m = \frac{M}{H} = 38.8$$

(4) 磁化面电流为

$$I_s = \alpha_s l = Ml = 3.10 \times 10^5 \text{ A}$$

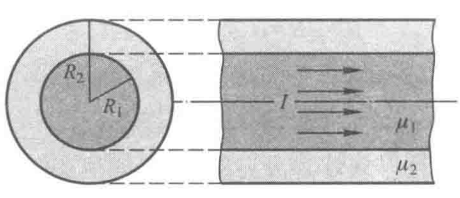
与每匝对应的磁化面电流为

$$i_s = I_s / N = 775 \text{ A}$$

相对磁导率为

$$\mu_r = \chi_m + 1 = 39.8$$

8-54. 一磁导率为 μ_1 的无限长圆柱形直导线，半径为 R_1，其中均匀地通有电流 I。在导线外包一层磁导率为 μ_2 的圆柱形不导电的磁介质，其外半径为 R_2，如习题 8-54 图所示。试求：(1) 磁场强度和磁感应强度的分布；(2) 半径为 R_1 和 R_2 处表面上磁化面电流线密度。



习题 8-54 图

解:(1) 在垂直于轴线的平面内以轴线为圆心,r 为半径作环路,由安培环路定理,有

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=H \cdot 2\pi r=I_1$$

式中 I_1是环路所围导线内的传导电流。

在圆柱形直导线内部,有 $I_1=\dfrac{Ir^2}{R_1^2}\quad(r<R_1)$

所以

$$H_1=\frac{Ir}{2\pi R_1^2},\quad B_1=\mu_1 H_1=\frac{\mu_1 Ir}{2\pi R_1^2}\quad(r<R_1)$$

在磁介质内,有

$$H_2=\frac{I}{2\pi r},\quad B_2=\mu_2 H_2=\frac{\mu_2 I}{2\pi r}\quad(R_1<r<R_2)$$

在磁介质外,有

$$H_3=\frac{I}{2\pi r},\quad B_3=\mu_0 H_3=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\quad(r>R_2)$$

(2) 设$\mu_{r1}>1,\mu_{r2}>1$,由 $\boldsymbol{M}=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{H}=(\mu_r-1)\boldsymbol{H}$ 可知,在磁介质内 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 同方向。取轴向(电流的流动方向)的单位矢量为 $\boldsymbol{k}$,磁介质表面法线的单位矢量为 $\boldsymbol{e}_n$。在导线表面 R_1处的磁化面电流的线密度 $\boldsymbol{\alpha}_{s1}$为

$$\boldsymbol{\alpha}_{s1}=\boldsymbol{M}_1\times\boldsymbol{e}_{n1}=(\mu_{r1}-1)\boldsymbol{H}_{1R_1}\times\boldsymbol{e}_{n1}=-\frac{(\mu_{r1}-1)}{2\pi R_1}I\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{\alpha}_{s1}$与电流 I 的方向相反。

在磁导率为 μ_2的介质内表面 R_1处,$\boldsymbol{e}_{n2}=-\boldsymbol{e}_{n1}$,磁化面电流的线密度 $\boldsymbol{\alpha}_{s2}$为

$$\boldsymbol{\alpha}_{s2}=\boldsymbol{M}_2\times\boldsymbol{e}_{n2}=(\mu_{r2}-1)\boldsymbol{H}_{2R_1}\times\boldsymbol{e}_{n2}=\frac{(\mu_{r2}-1)I}{2\pi R_1}\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{\alpha}_{s2}$与电流 I 的方向相同。

在两种磁介质的界面 R_1上,磁化面电流线密度的大小为

$$\alpha_s(R_1)=\alpha_{s2}-\alpha_{s1}=\frac{\mu_2-\mu_1}{2\pi\mu_0 R_1}I$$

若 $\mu_2>\mu_1$,在 R_1界面上的磁化面电流与 I 同方向。

在磁导率为 μ_2的磁介质外表面 R_2处,$\boldsymbol{e}'_{n2}=-\boldsymbol{e}_{n2}$,界面上的磁化面电流线密度为

$$\boldsymbol{\alpha}'_{s2}=\boldsymbol{M}_2\times\boldsymbol{e}'_{n2}=-\frac{(\mu_{r2}-1)}{2\pi R_2}I\boldsymbol{k}=-\frac{(\mu_2-\mu_0)}{2\pi\mu_0 R_2}I\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{\alpha}'_{s2}$与电流 I 的方向相反。

8-55. 截面积为矩形的铁环，内、外直径分别为 10 cm 和 16 cm，高为 3 cm。在环上均匀地密绕线圈 500 匝。（1）当线圈中电流为 0.6 A，铁的相对磁导率 $\mu_r=800$ 时，铁芯中的磁通量是多少？（2）当铁环中的磁通量等于 6.8×10^{-4} Wb，$\mu_r=1\ 200$ 时，线圈中通有多大的电流？

解：设铁环的内半径为 R_1，外半径为 R_2，高为 h。由 H 的环路定理，可得铁芯内距环中心轴 r 处的磁感应强度为

$$B=\mu H=\frac{\mu_0\mu_r NI}{2\pi r}$$

（1）通过铁环截面 S 的磁通量为

$$\begin{aligned}\Phi&=\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mu_0\mu_r NIh}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0\mu_{r1}NIh}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}\\&=\frac{4\pi\times10^{-7}\times800\times500\times0.6\times3\times10^{-2}}{2\pi}\ln\frac{8}{5}\ \mathrm{Wb}=6.8\times10^{-4}\ \mathrm{Wb}\end{aligned}$$

（2）当 $\mu_r=1\ 200$，通过铁芯截面的磁通量 $\Phi'=6.8\times10^{-4}$ Wb 时，所需电流 I' 为

$$I'=\frac{2\pi\Phi'}{\mu_0\mu_{r1}Nh\ln\dfrac{R_2}{R_1}}=\frac{2\pi\times6.8\times10^{-4}}{4\pi\times10^{-7}\times1\ 200\times500\times3\times10^{-2}\times\ln\dfrac{8}{5}}\ \mathrm{A}=0.4\ \mathrm{A}$$

*8-56. 例题 8-4 说明了在实验室中用亥姆霍兹线圈能产生均匀磁场的原理.（1）写出线圈轴线上各点磁感应强度 B 的变化率函数;（2）试编写一计算机程序，画出两线圈的距离分别是 $r=R$、$0.9\ R$ 和 $1.1\ R$ 时线圈轴线上中心至 $0.1\ R$ 范围内磁场变化率的曲线，并比较所得的三条曲线，说明为什么仅当 $r=R$ 时在轴线上中点附近的磁场基本上是均匀的.（设线圈半径 $R=0.2$ m，线圈匝数 $N=1\ 000$ 以及电流 $I=1$ A）

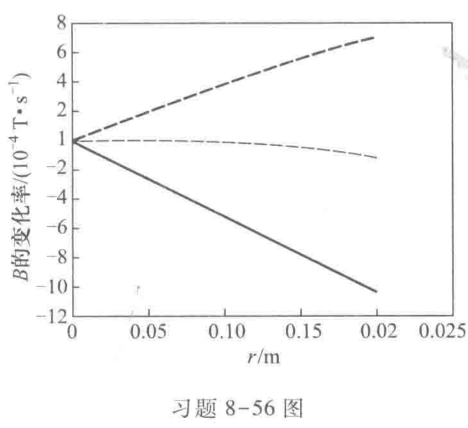
解：（1）$\mathrm{d}B/\mathrm{d}x=(-3\mu_0\ IR^2/2)\left[(R^2+(r/2+x)^2)^{-5/2}(r/2+x)+(R^2+(r/2-x)^2)^{-5/2}(r/2-x)\right]$

（2）仅当 $r=R$ 时在轴线上中点附近磁场变化率几乎为零，其他情况则随位置几乎线性增大.

参考程序

```
% 亥姆后霍兹线圈的磁场的变化率
```

```
clear
mu0=4*pi*10^(-7);N=1000;I=1;R=0.2;      % 设定电流线圈的各
                                          参量
A=mu0*N*I*R^2/2;
r1=R;r2=0.9*R;r3=1.1*R;                  % 假设两线圈分别等
                                          于,小于和大于 R
dx=0.001;                                % 设定位置步长
x=[0:dx:0.1*R];                          % 仅计算轴线中点附
                                          近的磁场(0~0.1
                                          R)
% 下面分别计算 r=R、0.9 R、1.1 R 时的磁场变化率,即 dB/dx
Bx1=-3*A*((R^2+(r1/2+x).^2).^(-5/2).*(r1/2+x)-(R^2+
(r1/2-x).^2).^(-5/2).*(r1/2-x)); Bx2=-3*A*((R^2+(r2/2+x).^
2).^(-5/2).*(r2/2+x)-(R^2+(r2/2-x).^2).^(-5/2).*(r2/2-
x));% Bx3=-3*A*((R^2+(r3/2+x).^2).^(-5/2).*(r3/2+x)-(R^2+
(r3/2-x).^2).^(-5/2).*(r3/2-x));
plot(x,Bx1,'b',x,Bx2,'k',x,Bx3,'k:')% 画出两线圈间磁场大小的曲
                                       线图
xlabel('距离/m');ylabel('B 的变化率/T/m')
```



习题 8-56 图

第九章　电磁感应　电磁场理论

一、教学基本要求

1. 掌握法拉第电磁感应定律,理解动生电动势和感生电动势的概念和规律。

2. 理解自感系数和互感系数的定义和意义。

3. 理解磁能密度、磁场能量的概念,能分析、计算简单对称情况下磁场的能量。

4. 理解位移电流概念和全电流环路定理,麦克斯韦方程组积分形式及其物理意义。

5. 了解电磁场的物质性和电磁场量的相对性。

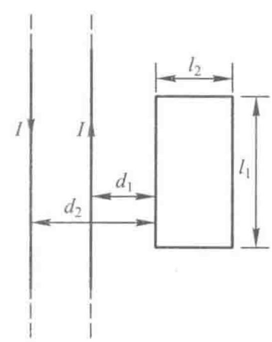
二、本章习题分类

1. 法拉第电磁感应定律和楞次定律
2. 动生电动势
3. 感生电动势和感生电场
4. 自感和互感
5. 磁能
6. 位移电流和全电流环路定理

三、习题分析与解答

1. 法拉第电磁感应定律和楞次定律

9-1. 在两条平行长直载流输电导线的平面内,有一矩形线圈,如习题 9-1 图所示。如两导线中电流同为 $I=I_0\sin\omega t$,但方向相反。试计算线圈中的感生电动势。



习题 9-1 图

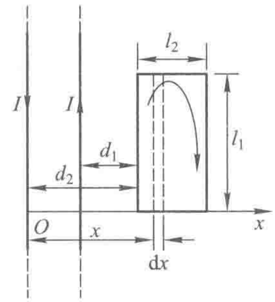
解: 取坐标轴 Ox,并设 t 时刻两电流的方向如解图 9-1 所示。在 x 处的磁感应强度的大小为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi(x-d_2+d_1)}-\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$\boldsymbol{B}$ 的方向垂直纸面向里。

取顺时针为线圈的绕行方向，通过面元 $dS=l_1dx$ 的磁通量为

$$d\Phi=\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=B\cdot dS=\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi(x-d_2+d_1)}-\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\right]l_1dx$$



解图 9-1

通过矩形线圈的磁通量为

$$\Phi=\int_{d_2}^{d_2+l_2}\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi(x-d_2+d_1)}-\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\right]l_1dx$$

$$=\frac{\mu_0 Il_1}{2\pi}\left(\ln\frac{d_1+l_2}{d_1}-\ln\frac{d_2+l_2}{d_2}\right)$$

$$=\frac{\mu_0 Il_1}{2\pi}\ln\frac{(d_1+l_2)d_2}{(d_2+l_2)d_1}$$

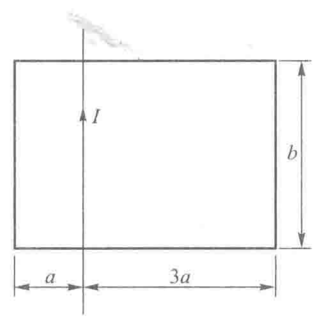
矩形线圈中的感生电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{\mu_0 l_1}{2\pi}\ln\frac{(d_1+l_2)d_2}{(d_2+l_2)d_1}\frac{d}{dt}(I_0\sin\omega t)$$

$$=-\frac{\mu_0 I_0\omega l_1}{2\pi}\ln\frac{(d_1+l_2)d_2}{(d_2+l_2)d_1}\cos\omega t$$

$\mathscr{E}>0$ 时，电动势的实际方向与绕行方向一致为顺时针，反之，$\mathscr{E}$ 的实际方向为逆时针。

9-2. 一无限长直导线与一矩形线框处在同一平面内，彼此绝缘，如习题 9-2 图所示。若直导线中通有电流 $I=At$，A 为正值常量，试求此线框中的感应电动势的大小和方向。



习题 9-2 图

解：取坐标轴 Ox 垂直于导线向右为正，坐标原点位于电流处。线框的绕行方向设为顺时针。在线框上取面元 $dS=bdx$，通过面元的磁通量为

$$d\Phi=\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=\pm\frac{\mu_0 I}{2\pi x}bdx$$

由线框的绕向可知，通过电流左侧线框的磁通量为负值，与右侧 $x=a$ 范围内的正值磁通量相消。

通过线框的磁通量为

$$\Phi=\int_a^{3a}\frac{\mu_0 I}{2\pi x}bdx=\frac{\mu_0 bI}{2\pi}\ln 3$$

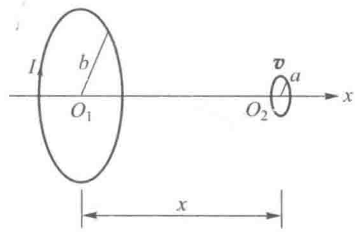
由法拉第电磁感应定律，线框中的电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln 3\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$=-\frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln 3\,\frac{\mathrm{d}(At)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 bA}{2\pi}\ln 3$$

$\mathscr{E}<0$ 表明，线框中电动势的方向与所设方向相反，为逆时针绕向。

9-3. 两个线圈的半径分别为 a 和 $b(b\gg a)$，共轴放置，如习题 9-3 图所示。今在大线圈中通有电流 I，并使小线圈以速度 v 沿轴线方向匀速平移，移动时保持线圈平面平行共轴。求两线圈中心相距 $x(x\gg b)$ 的瞬时，小线圈中的感应电动势的大小和方向。



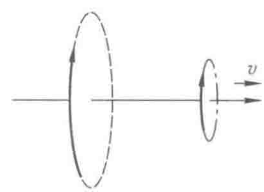
习题 9-3 图

解：大线圈在轴线上小线圈处的磁场可视为均匀场，其磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 Ib^2}{2\left(b^2+x^2\right)^{3/2}}$$

由电流 I 的方向可知，$\boldsymbol{B}$ 沿 x 轴负方向。

取小线圈的绕行方向如解图 9-3 所示，其面法向与 $\boldsymbol{B}$ 一致，沿 x 轴负方向。因 $b\gg a$，可以认为小线圈处在均匀磁场中，故有



解图 9-3

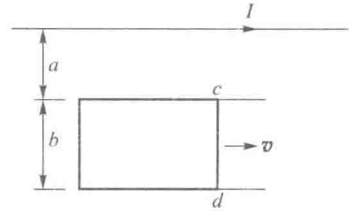
$$\Phi=BS=\frac{\mu_0\pi Ia^2b^2}{2\left(b^2+x^2\right)^{3/2}}$$

根据法拉第电磁感应定律，小线圈中的感应电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0\pi Ia^2b^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{\left(b^2+x^2\right)^{3/2}}\right]=\frac{3\mu_0\pi Ia^2b^2vx}{2\left(b^2+x^2\right)^{5/2}}\approx\frac{3\mu_0\pi Ia^2b^2v}{2x^4}$$

式中 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$。小线圈沿 x 轴正向平移时，$v<0$，感应电动势的方向与假定方向一致。

9-4. 在长直导线旁有一导体线框，两者在同一平面内，线框中 cd 段可以自由滑动，如习题 9-4 图所示。设导线中的电流 $I=I_0e^{-\lambda t}(\lambda>1)$。开始时，导线 cd 在线框的最左端，以速度 $\boldsymbol{v}$ 向右匀速滑动。试求线框中的感应电动势。（忽略线框中的感应电流对磁场的影响）

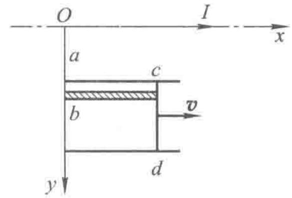


习题 9-4 图

分析：空间磁感应强度随时间的变化和线框中 cd 段的滑动，都使通过线框的磁通量随时间而

变。t 时刻通过线框的磁通量含有两个与 t 相关的因子:电流 I 和 cd 段的坐标。由法拉第电磁感应定律求得线框中的感应电动势应含有相应的两项。

解:取坐标系 xOy,如解图 9-4 所示。取线框的绕行方向为顺时针,设 t 时刻 cd 段滑至 x 处。通过线框上狭条面元的磁通量为



解图 9-4

$$d\Phi = \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}x\,dy$$

t 时刻通过线框的磁通量为

$$\Phi = \int_a^{a+b}\frac{\mu_0 I}{2\pi y}x\,dy = \frac{\mu_0 Ix}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

根据法拉第电磁感应定律,有

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}\frac{d(e^{-\lambda t}x)}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}\left(e^{-\lambda t}\frac{dx}{dt} - \lambda x e^{-\lambda t}\right)$$

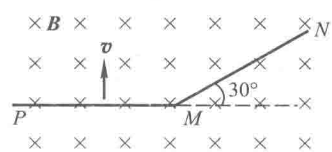
因$\dfrac{dx}{dt}=v$,并 $x=vt$,可得

$$\mathscr{E} = -\frac{\mu_0 v}{2\pi}I_0 e^{-\lambda t}(1-\lambda t)\ln\frac{a+b}{a}$$

当$\mathscr{E}>0$ 时,线框中的电动势为顺时针绕向,反之则为逆时针。

2. 动生电动势

9-5. PM 和 MN 两段导线,其长均为 10 cm,在 M 处相接成 30°角,若使导线在均匀磁场中以速度 $v=15$ m/s 运动,方向如习题 9-5 图所示,磁场方向垂直纸面向内,磁感应强度为 $B=25\times10^{-2}$ T,问 P、N 两端之间的电势差为多少?哪一端电势高?



习题 9-5 图

解:取电动势的假定方向沿导线 $P\to M\to N$。对整段导线,有

$$\mathscr{E}_{PN} = \mathscr{E}_{PM} + \mathscr{E}_{MN}$$

其中
$$\mathscr{E}_{PM} = (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{l}_{PM} = vBl_{PM}\cos\pi = -vBl_{PM}$$
$$\mathscr{E}_{MN} = (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{l}_{MN} = vBl_{MN}\cos 150° = -vBl_{MN}\cos 30°$$

因 $l_{PM}=l_{MN}$,所以

$$\mathscr{E}_{PN} = \mathscr{E}_{PM} + \mathscr{E}_{MN} = -vBl_{PM}(1+\cos 30°) = -7.0\times10^{-3}\ \text{V}$$

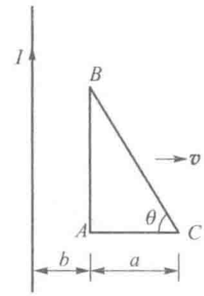
式中负号表明,导线上的动生电动势方向与假设方向相反,沿 $N\to M\to P$。

P、N 两端间的电势差为

$$U_{PN}=V_P-V_N=-\mathscr{E}_{PN}=7.0\times10^{-3}\ \text{V}$$

运动导线上 P 端的电势高。

9-6. 长直导线与直角三角形线圈共面放置，如习题 9-6 图所示。若直导线中通有恒定电流 I，线圈以速度 $\boldsymbol{v}$ 向右平动。求线圈在图示的位置时各边的感应电动势以及总电动势。



习题 9-6 图

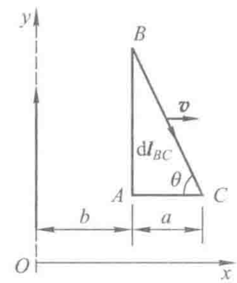
解：取坐标系 xOy，如解图 9-6 所示。恒定电流 I 的磁感应强度大小为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

直边 l_{AB} 上各点处的磁感应强度相同，动生电动势为

$$\mathscr{E}_{AB}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{l}_{AB}=vBl_{AB}=\frac{\mu_0 I l_{AB} v}{2\pi b}=\frac{\mu_0 I a v}{2\pi b}\tan\theta$$

式中利用了几何关系 $l_{AB}=a\tan\theta$。$\mathscr{E}_{AB}$ 的方向由 A 指向 B。



解图 9-6

斜边 l_{BC} 上各点处的磁感应强度方向相同，大小不同。取微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{BC}$，有

$$\mathrm{d}\mathscr{E}_{BC}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{BC}=vB\mathrm{d}l_{BC}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-vB\mathrm{d}l_{BC}\sin\theta$$

$$=-vB\tan\theta\mathrm{d}x=-\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\tan\theta\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

式中利用了几何关系 $\mathrm{d}l_{BC}\sin\theta=\tan\theta\mathrm{d}x$。

斜边 l_{BC} 的动生电动势为

$$\mathscr{E}_{BC}=\int\mathrm{d}\mathscr{E}_{BC}=-\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\tan\theta\int_b^{a+b}\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\frac{a+b}{b}\tan\theta$$

$\mathscr{E}_{BC}<0$ 表明，其方向为由 C 指向 B。

横边 l_{AC} 在运动中不"切割"磁感线，动生电动势 $\mathscr{E}_{AC}=0$。总电动势为

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_{AB}+\mathscr{E}_{BC}+\mathscr{E}_{AC}=\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\left(\frac{a}{b}-\ln\frac{a+b}{b}\right)\tan\theta$$

总电动势 $\mathscr{E}>0$ 表明，三角形线圈内的电动势为顺时针绕向。

总电动势的另解：取顺时针为线圈的绕行方向，设 t 时刻三角形线圈直边 l_{AB} 运动至 x' 处。通过 x 处长狭条面元的磁通量为

$$\mathrm{d}\Phi=\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}y\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\tan\theta(a+x'-x)\mathrm{d}x$$

t 时刻通过三角形线圈的磁通量为

$$\Phi=\int\mathrm{d}\Phi=\int_{x'}^{a+x'}\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\tan\theta(a+x'-x)\,\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\tan\theta\left[(a+x')\ln\frac{a+x'}{x'}-a\right]$$

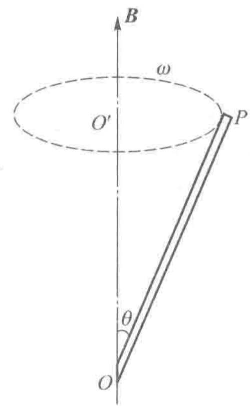
总电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\tan\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(a+x')\ln\frac{a+x'}{x'}-a\right]=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\tan\theta\left(\frac{a}{x'}-\ln\frac{a+x'}{x'}\right)$$

$x'=b$ 时，有

$$\mathscr{E}=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\left(\frac{a}{b}-\ln\frac{a+b}{b}\right)\tan\theta$$

9-7. 在磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的均匀磁场中，有一长为 L 的导体棒 OP，以角速度 ω 绕 OO' 轴转动。OO' 轴与磁场方向平行。导体棒与磁场方向间的夹角为 θ，如习题 9-7 图所示。求导体棒中的感应电动势，哪一端电势高？



习题 9-7 图

解 1：导体棒以匀角速 ω 转动时，棒上各点的线速度为 $v=r\omega=l\sin\theta\omega$。沿导体棒 $O\to P$，在棒上 l 处取微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，有

$$\mathrm{d}\mathscr{E}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=vB\mathrm{d}l\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\omega B\sin^2\theta l\mathrm{d}l$$

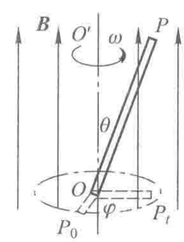
对上式积分，得导体棒上的动生电动势为

$$\mathscr{E}_{OP}=\int(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\omega B\sin^2\theta\int_0^L l\mathrm{d}l=\frac{1}{2}\omega BL^2\sin^2\theta$$

$\mathscr{E}_{OP}>0$，导体棒上的动生电动势方向由 $O\to P$，P 端的电势高。

解 2：导体棒在垂直于 $\boldsymbol{B}$ 方向上的长度为 $L_\perp=L\sin\theta$，动生电动势 $\mathscr{E}_{OP}$ 是由 $L_\perp$ 切割磁感线而形成的。在与 $\boldsymbol{B}$ 平行方向，棒的长度 $L_{//}=L\cos\theta$ 不切割磁感线，对电动势 $\mathscr{E}_{OP}$ 无贡献。设想以 $L_\perp$ 在转动中扫过的扇形面积的边界为回路，$L_\perp$ 为回路的运动边。取回路的绕向为 $O\to P_0\to P_t\to O$，如解图 9-7 所示。t 时刻通过扇形回路磁通量为

$$\Phi=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}BL^2\sin^2\theta\cdot\phi$$



解图 9-7

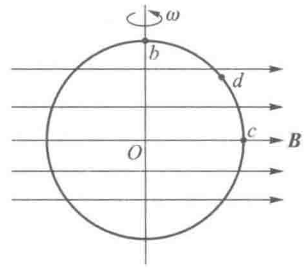
回路中的电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}BL^2\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}B\omega L^2\sin^2\theta$$

式中 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\omega$，负号表示电动势的方向与设定绕向相反，为 $O\to P_t\to P_0\to O$。因扇形边界是虚设的，电动势实际存在于导体

棒,其方向为 $O \to P$。

9-8. 一圆环半径为 a,处于磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的均匀磁场中,如习题 9-8 图所示。圆环可绕垂直于磁场的直径以角速度 ω 匀速转动。设圆环的电阻为 R,当圆环转至图示位置时,问环上 b、c 两点的电势哪一点高? d、c 两点的电势哪一点高?(d 为 bc 的中点。)

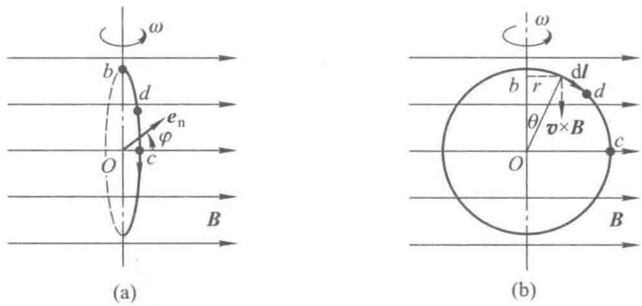


习题 9-8 图

分析:圆环绕垂直于磁场的直径轴匀速转动时,环上产生交变的动生电动势和交变电流,形成回路。圆环的电阻均匀分布,圆环各截面的电流在每一瞬时都相同。圆环各段两点间电势的高低与各段动生电动势的大小相关。

解:取环内感应电流为 $b \to d \to c$ 方向,并设 $t=0$ 时,圆环面法向 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 方向一致。如解图 9-8(a)所示,t 时刻环面转过的角度为 $\varphi=\omega t$,有

$$\Phi=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=BS\cos\varphi=Ba^2\pi\cos\omega t$$



解图 9-8

圆环中的电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=Ba^2\pi\omega\sin\omega t$$

圆环中的电流为

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R}=\frac{Ba^2\pi\omega}{R}\sin\omega t$$

$\omega t=\dfrac{\pi}{2}$时环面转至图示位置,有

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_{\mathrm{Max}}=Ba^2\pi\omega,\quad I=I_{\mathrm{Max}}=\frac{\mathscr{E}_{\mathrm{Max}}}{R}=\frac{Ba^2\pi\omega}{R}$$

在圆环上沿感应电流方向取线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 如解图 9-8(b)所示,有

$$\mathrm{d}\mathscr{E}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=vB\mathrm{d}l\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=vB\mathrm{d}l\sin\theta$$

式中 $v=r\omega=a\omega\sin\theta,\mathrm{d}l=a\mathrm{d}\theta$，有

$$\mathrm{d}\mathscr{E}=a^2\omega B\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$$

圆环上 b、c 段的电动势为

$$\mathscr{E}_{bc}=\int\mathrm{d}\mathscr{E}=a^2\omega B\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{Ba^2\pi\omega}{4}$$

d、c 段的电动势为

$$\mathscr{E}_{dc}=a^2\omega B\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=Ba^2\omega\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)$$

同理可得，b、d 段的电动势为

$$\mathscr{E}_{bd}=a^2\omega B\int_0^{\pi/4}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=Ba^2\omega\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)$$

可见，圆环上各段的电动势不是均匀分布的。

圆环的电阻均匀分布，b、c 段的电阻为 $R_{bc}=R/4$。b 到 c 点的电势变化为

$$V_b+\mathscr{E}_{bc}-IR_{bc}=V_c$$

得

$$U_{bc}=V_b-V_c=IR_{bc}-\mathscr{E}_{bc}=0$$

b、c 两点的电势相同。

d、c 段的电阻为 $R_{dc}=R/8$，有

$$U_{dc}=V_d-V_c=IR_{dc}-\mathscr{E}_{dc}=-\frac{1}{4}Ba^2\omega$$

d 点的电势低。

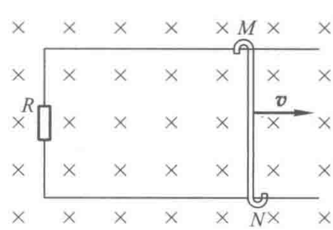
同理可得，b、d 段的电阻为 $R_{bd}=R/8$，有

$$U_{bd}=V_b-V_d=IR_{bd}-\mathscr{E}_{bd}=\frac{1}{4}Ba^2\omega$$

b 点的电势高。

随着圆环的绕轴转动，环上各段的电动势都将发生大小和方向的交替变化，两点间的电势差也随之变化。

9-9. 如习题 9-9 图所示，导线 MN 在导线架上以速度 $\boldsymbol{v}$ 向右滑动。已知导线 MN 的长为 50 cm，$v=4.0\ \mathrm{m/s}$，$R=0.20\ \Omega$，磁感应强度 $B=0.50\ \mathrm{T}$，方向垂直于回路平面。试求：(1) MN 运动时所产生的动生电动势；(2) 电阻 R 上所消耗的功率；(3) 磁场作用在 MN 上的力。



习题 9-9 图

分析：导线 MN 上的电动势可用导线在磁场中作切割磁感线运动的动生电动势求得，也可从导线运动使回路的磁通量发生变化产生的电动势求解。回路中电流所受安培力与导线运动方向相反，电阻消耗的能量来源于外力克服安培力，使导线匀速运动的功。

解：(1) MN 运动时的动生电动势为

$$\mathscr{E}_i = vBl = 4\times0.5\times0.5\ \text{V} = 1\ \text{V}$$

$\mathscr{E}_i$由 N 指向 M。

(2) 电阻 R 消耗的功率为

$$P_i = \frac{\mathscr{E}_i^2}{R} = 5\ \text{W}$$

(3) 磁场作用在 MN 上的安培力为

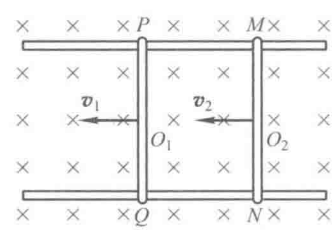
$$F = IBl = \frac{1}{R}v\,(Bl)^2 = 1.25\ \text{N}$$

$\boldsymbol{F}$ 的方向向左。

能使导线 MN 以 $\boldsymbol{v}$ 向右匀速运动，需对导线 MN 施以向右的力 $\boldsymbol{F}'$，$\boldsymbol{F}'$与 $\boldsymbol{F}$ 大小相等，方向相反。$\boldsymbol{F}'$的功率为

$$P' = \boldsymbol{F}'\cdot\boldsymbol{v} = 1.25\times4\ \text{W} = 5\ \text{W}$$

9-10. 如习题 9-10 图所示，PQ 和 MN 为两根金属棒，各长 1 m，电阻都是 $R=4\ \Omega$，放置在均匀磁场中，已知 $B=2$ T，方向垂直纸面向里。当两根金属棒在导轨上分别以 $v_1=4$ m/s 和 $v_2=2$ m/s 的速度向左运动时，忽略导轨的电阻，试求：(1) 在两棒中动生电动势的大小和方向，并在图上标出；(2) 金属棒两端的电势差 U_{PQ} 和 U_{MN}。



习题 9-10 图

解：(1) PQ 上的电动势为

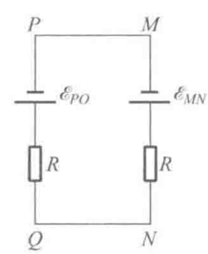
$$\mathscr{E}_{PQ} = v_1Bl = 8\ \text{V}$$

$\mathscr{E}_{PQ}$由 P 指向 Q。

MN 上的电动势为

$$\mathscr{E}_{MN} = v_2Bl = 4\ \text{V}$$

$\mathscr{E}_{MN}$由 M 指向 N，等效回路如解图 9-10 所示。



解图 9-10

(2) 取逆时针为有源回路的绕行方向，回路中的电流为

$$I_i = \frac{\sum\mathscr{E}_i}{\sum R_i} = \frac{\mathscr{E}_{PQ}-\mathscr{E}_{MN}}{2R} = \frac{8-4}{2\times4}\ \text{A} = 0.5\ \text{A}$$

$I_i>0$,电流与设定的逆时针绕行方向一致。

PQ 间的电势差由

$$V_P+\mathscr{E}_{PQ}-I_iR=V_Q$$

可得

$$U_{PQ}=V_P-V_Q=I_iR-\mathscr{E}_{PQ}=-6\ \mathrm{V}$$

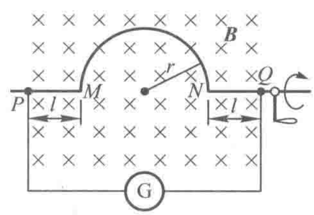
MN 间的电势差由

$$V_N-\mathscr{E}_{MN}-I_iR=V_M$$

可得

$$U_{MN}=-\mathscr{E}_{MN}-I_iR=-6\ \mathrm{V}$$

9-11. 一导线 PQ 弯成如习题 9-11 图所示的形状(其中 MN 是一半圆,半径 $r=0.10\ \mathrm{m}$,PM 和 NQ 段的长度均为 $l=0.10\ \mathrm{m}$),在均匀磁场($B=0.50\ \mathrm{T}$)中绕轴线 PQ 转动,转速 $n=3\ 600\ \mathrm{r/min}$。设电路的总电阻(包括电表 G 的内阻)为 $1\ 000\ \Omega$,求导线中的动生电动势和感应电流的频率以及它们的最大值各是多少。



习题 9-11 图

解:通过电路的磁通量随半圆导线绕轴线转动而变化,转动的角速度为

$$\omega=\frac{2\pi n}{60}=120\pi\ \mathrm{rad/s}$$

设 $t=0$ 时,半圆导线处在图示位置。取顺时针为电路的绕行方向,t 时刻的磁通量为

$$\Phi=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=BS_1+BS_2\cos\ \omega t$$

式中 S_1 是矩形部分面积,S_2 是半圆导线所围面积

$$S_2=\pi r^2/2。$$

电动势为

$$\mathscr{E}_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=BS_2\omega\sin\ \omega t=\mathscr{E}_{\mathrm{m}}\sin\ \omega t$$

感应电流为

$$I_i=\frac{\mathscr{E}_i}{R}=I_{\mathrm{m}}\sin\ \omega t$$

交变电动势和交变电流的频率为

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=60\ \mathrm{Hz}$$

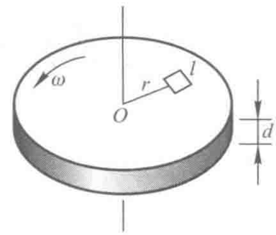
最大值分别为

$$\mathscr{E}_{\mathrm{m}}=BS_2\omega=\frac{B\pi r^2\omega}{2}=2.96\ \mathrm{V}$$

$$I_{\mathrm{m}}=\frac{\mathscr{E}_{\mathrm{m}}}{R}=2.96\times10^{-3}\ \mathrm{A}$$

9-12. 一电磁“涡流”制动器由一电导率为 γ 和厚度为 d 的圆盘组成，此盘绕通过其中心的轴旋转，且有一覆盖面积为 l^2 的磁场 $\boldsymbol{B}$ 垂直于圆盘。如习题 9-12 图所示，若在离轴 r 处的面积 l^2 很小，当圆盘角速度为 ω 时，试证明阻碍圆盘转动的磁力矩的近似表达式为

$$M=\gamma d l^2 B^2 r^2$$



习题 9-12 图

解：设 $\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于圆盘向下。圆盘旋转时，被磁场覆盖部分产生沿径向的动生电动势

$$\mathscr{E}_i=\int \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_r^{r+l}\omega r B\mathrm{d}r=\left(r+\frac{1}{2}l\right)lB$$

式中 $v=r\omega$，$\mathrm{d}l=-\mathrm{d}r$，$\mathscr{E}_i$沿径向指向圆心。

将圆盘被磁场覆盖的这一小面积等效为电源，内阻为

$$R_i=\frac{1}{\gamma}\frac{l}{ld}=\frac{1}{\gamma d}$$

圆盘的其他部分与电动势构成闭合回路的电阻很小可忽略，因而流经小面积部分的电流为

$$I=\frac{\mathscr{E}_i}{R}=\gamma d\left(r+\frac{l}{2}\right)lB$$

I 沿半径向圆心方向流动。

流经小面积部分的电流 I 受磁场的安培力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$ 作用，$\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 垂直于半径，与圆盘的转动方向相反。对中心轴力矩的大小为

$$M=\int r\mathrm{d}F=\int_r^{r+l} rIB\mathrm{d}r=\gamma d l^2 B^2\left(r^2+\frac{3}{2}rl+\frac{7}{12}l^2\right)\approx \gamma d l^2 B^2 r^2$$

$\boldsymbol{M}$ 使圆盘转动的角速度 ω 变慢，是阻力矩。

若设 $\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于圆盘向上，结论相同。

3. 感生电动势和感生电场

9-13. 有一螺线管，每米有 800 匝。在管内中心放置一绕有 30 圈的半径为 1 cm 的圆形小回路，在 0.01 s 时间内，螺线管中产生 5 A 的电流。问小回路中产生的感生电动势为多少？

解：螺线管内的磁感应强度为

$$B=\mu_0 nI$$

通过小回路的磁通链为

$$\Psi = N\Phi = NBS = \mu_0 NnI\pi r^2$$

小回路中电动势的大小为

$$|\mathscr{E}_i| = \frac{d\Psi}{dt} = N\mu_0 n\pi r^2 \frac{dI}{dt}$$

$$= 30\times 4\pi\times 10^{-7}\times 800\times\pi\times 0.01^2\times\frac{5}{0.01}\ \text{V} = 4.74\times 10^{-3}\ \text{V}$$

9-14. 电子感应加速器中的磁场在直径为 0.50 m 的圆柱形区域内是均匀的,若磁场的变化率为 1.0×10^{-2} T/s。试计算离中心距离为 0.10 m、0.50 m、1.0 m 处各点的感生场强。

解:以圆柱轴线到考察点的距离 r 为半径,在垂直于 $\boldsymbol{B}$ 的平面内作闭合回路 L,所围磁场面积为 S。设 L 的绕向使 $\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 方向一致。由于场分布的对称性,L 上各点 $\boldsymbol{E}$ 的大小相同,处处沿 L 的切向,有

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$$

即有

$$E2\pi r = -\frac{dB}{dt}\pi r^2$$

得

$$E = \begin{cases} -\dfrac{r}{2}\dfrac{dB}{dt} & (r<R) \\[2ex] -\dfrac{R^2}{2r}\dfrac{dB}{dt} & (r>R) \end{cases}$$

当 $dB/dt<0$ 时,$\boldsymbol{E}$ 线与 L 的绕向一致,处处沿 L 的切线方向,当 $dB/dt>0$ 时,则相反。

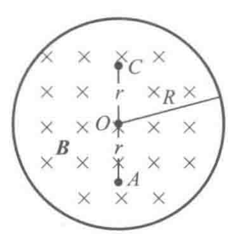
在圆柱形区域内、外各点处感生电场 $\boldsymbol{E}$ 的大小为

$r_1 = 0.10$ m 时,　$|\boldsymbol{E}_1| = \dfrac{r_1}{2}\dfrac{dB}{dt} = 5.0\times 10^{-4}$ V/m

$r_2 = 0.50$ m 时,　$|\boldsymbol{E}_2| = \dfrac{R^2}{2r_2}\dfrac{dB}{dt} = 6.25\times 10^{-4}$ V/m

$r_3 = 1.0$ m 时,　$|\boldsymbol{E}_3| = \dfrac{R^2}{2r_3}\dfrac{dB}{dt} = 3.13\times 10^{-4}$ V/m

9-15. 如习题 9-15 图所示,一个限定在半径为 R 的圆柱体内的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$,以 1×10^{-2} T/s 的恒定变化率减少,电子在磁场中 A、O、C 各点处时,求它所获得的瞬时加速度(大小和方向)。设 $r=5.0$ cm。



习题 9-15 图

解:根据变化磁场与感应电场的关系可知,在圆柱体

内的 A、C 两点处 $\boldsymbol{E}$ 的大小相同,$\boldsymbol{E}$ 线为顺时针绕向的同心圆。

过 A、C 两点,以 r 为半径作顺时针的圆周回路 L,根据

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

有

$$E\cdot 2\pi r=-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cdot \pi r^2$$

得 A、C 两处的感应电场为

$$E=E_A=E_C=-\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

代入数据,得

$$E=-\frac{5\times10^{-2}}{2}\times(-10^{-2})\ \mathrm{V/m}=2.5\times10^{-4}\ \mathrm{V/m}$$

$\boldsymbol{E}$ 的方向为顺时针沿 L 的切向。

在 O 点处,$\boldsymbol{E}_O=0$,电子不受力,$\boldsymbol{a}_O=0$。

在 A、C 两处电子受电场力为

$$\boldsymbol{F}_e=-e\boldsymbol{E}$$

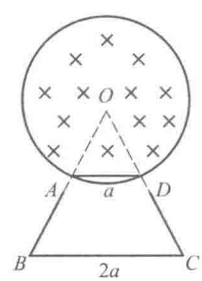
设电子的质量为 m_e,瞬时加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{F}_e}{m_e}=-\frac{e}{m_e}\boldsymbol{E}$$

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 反向,大小为

$$a=\frac{e}{m_e}E=\frac{1.602\times10^{-19}}{9.1\times10^{-31}}\times2.5\times10^{-4}\ \mathrm{m/s^2}=4.4\times10^{7}\ \mathrm{m/s^2}$$

9-16. 在半径为 a 的无限长圆柱空间内,均匀磁场随时间增大,即$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}>0$。一等腰梯形线框 $ABCD$,上底长为 a,下底长为 $2a$,放置如习题 9-16 图所示。试求线框各边上的感应电动势以及整个线框中的感应电动势。



习题 9-16 图

解 1:根据电磁感应定律,匀强磁场变化时,有

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\cdot \boldsymbol{S}$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 为感生电场,以同心圆方式分布在圆柱形磁场的内、外区域。$\boldsymbol{S}$ 为任意回路 L 所围磁场的有向面积。

取逆时针绕向的三角形回路 $OADO$,有

$$\mathscr{E}_1=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\cdot \boldsymbol{S}_{OAD}=\mathscr{E}_{OA}+\mathscr{E}_{AD}+\mathscr{E}_{DO}$$

回路的 OA 和 DO 边处处与 $\boldsymbol{E}$ 垂直，即

$$\mathscr{E}_{OA}=\mathscr{E}_{DO}=0$$

故有
$$\mathscr{E}_{AD}=\mathscr{E}_1=-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}S_{OAD}\cos\pi=\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}S_{OAD}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$\mathscr{E}_{AD}$由 A 指向 D。

线框边 AB 和 CD 同样因处处与 $\boldsymbol{E}$ 垂直，有

$$\mathscr{E}_{AB}=\mathscr{E}_{CD}=0$$

同理，再取逆时针绕向的三角形回路 $OBCO$，有

$$\mathscr{E}_2=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{S}_{OBC}=\mathscr{E}_{OB}+\mathscr{E}_{BC}+\mathscr{E}_{CO}=\mathscr{E}_{BC}$$

式中$\mathscr{E}_{OB}=\mathscr{E}_{OA}+\mathscr{E}_{AB}=0$，$\mathscr{E}_{CO}=\mathscr{E}_{CD}+\mathscr{E}_{DO}=0$，$S_{OBC}$为回路所围磁场的扇形面积。由此可得

$$\mathscr{E}_{BC}=\mathscr{E}_2=-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}S_{OBC}\cos\pi=\frac{\pi a^2}{6}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$\mathscr{E}_{BC}$由 B 指向 C。

整个线框中的感应电动势为

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_{BC}-\mathscr{E}_{AD}=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$\mathscr{E}>0$，线框中电动势为逆时针绕向。

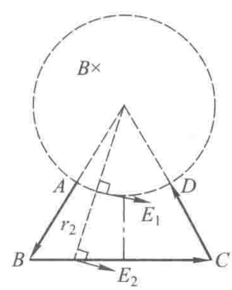
解 2：整个线框中的感应电动势也可由 $\mathscr{E}=\oint_L\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 求解。

如解图 9-16 所示，取 L 为逆时针绕向。注意到 AB 和 CD 边处处与 $\boldsymbol{E}$ 垂直，故有

$$\mathscr{E}=\oint_L\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{BC}\boldsymbol{E}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{DA}\boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

式中 $\boldsymbol{E}_1$和 $\boldsymbol{E}_2$分别为圆柱区域内、外的感生电场强度，均与圆柱径向相垂直，

$$E_1=\frac{r_1}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t},\quad (r_1<a)\,;\quad E_2=\frac{a^2}{2r_2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t},\quad (r_2>a)$$



解图 9-16

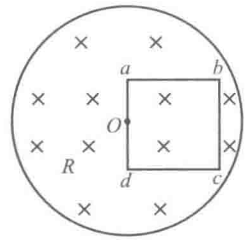
所以
$$\mathscr{E}=\int_{BC}\frac{a^2}{2r_2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cos\theta\mathrm{d}l_2+\int_{DA}\frac{r_1}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cos(\pi-\theta)\mathrm{d}l_1$$

将几何关系 $\cos\theta\mathrm{d}l_2=r_2\mathrm{d}\theta$ 和 $r_1\cos\theta=h_1=\dfrac{a}{2}\sqrt{3}$代入上式，得

$$\mathscr{E}=\frac{a^2}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\mathrm{d}\theta-\frac{a}{4}\sqrt{3}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\int_0^a\mathrm{d}l_1=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

两种解法的结果一致。

9-17. 在半径为 R 的圆柱体内，有磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的均匀磁场。一边长为 l 的正方形线圈放在磁场中，其 ad 边的中点通过圆柱轴线 O 点，如习题 9-17 图所示。设磁场以 $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$ 的恒定速率增加，试求线圈各边的感应电动势以及整个线框中的感应电动势。



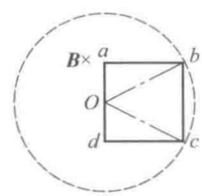
习题 9-17 图

解：根据电磁感应定律，匀强磁场变化时，有

$$\mathscr{E}=\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\cdot \boldsymbol{S}$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 为感生电场，在圆柱形均匀磁场的内、外区域，感生电场 $\boldsymbol{E}$ 线呈同心圆分布。$\boldsymbol{S}$ 为任意回路所围磁场的有向面积。

如解图 9-17 所示，直线段 ad、Ob 和 Oc 均与 $\boldsymbol{E}$ 相垂直，对这些线段，有 $\int_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$，所以 $\mathscr{E}_{ad}=0$。为求 ab 边的电动势，取逆时针绕向的三角形回路 $ObaO$，回路电动势为



解图 9-17

$$\mathscr{E}_1=\oint_{L_1} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{Ob} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{ba} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{aO} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$=\int_{ba} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathscr{E}_{ba}$$

$$=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\cdot \boldsymbol{S}_1=-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}S_1\cos\ \pi=\frac{l^2}{4}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

ab 边的电动势 $\mathscr{E}_{ab}=-\mathscr{E}_{ba}$，由 b 指向 a。

取逆时针绕向的三角形回路 $OcbO$，可得 cb 边的电动势为

$$\mathscr{E}_{cb}=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\cdot \boldsymbol{S}_2=\frac{l^2}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$\mathscr{E}_{cb}$ 由 c 指向 b。

同理可得
$$\mathscr{E}_{dc}=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\cdot \boldsymbol{S}_3=\frac{l^2}{4}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$\mathscr{E}_{dc}$ 由 d 指向 c。

整个线框中的感应电动势

$$\mathscr{E}=\sum_{i=0}^{4}\mathscr{E}_i=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\cdot \boldsymbol{S}=-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}S\cos\ \pi=l^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$\mathscr{E}>0$，为逆时针绕向。

4. 自感和互感

9-18. 在长为 60 cm、直径为 5.0 cm 的空心纸筒上绕多少匝才能得到自感为 6.0×10^{-3} H 的线圈？

解：取长直螺线管模型作估算。当线圈匝数为 N、电流为 I 时，管内磁感应强度大小为

$$B=\mu_0\frac{N}{l}I$$

通过螺线管的磁通链为

$$\Psi=NBS=\mu_0\frac{N^2}{l}I\pi\frac{d^2}{4}$$

自感系数为

$$L=\frac{\Psi}{I}=\frac{\mu_0 N^2\pi d^2}{4l}$$

代入数据，求得线圈匝数为

$$N=\sqrt{\frac{4Ll}{\mu_0\pi d^2}}=1.2\times10^3\text{ 匝}$$

9-19. 已知一个空心密绕的螺绕环，其平均半径为 0.10 m，横截面积为 6 cm^2，环上共有线圈 250 匝，求螺绕环的自感。又若线圈中通有 3 A 的电流时，求线圈中的磁通量及磁链。

解：螺绕环通有电流 I 时，环内磁感应强度的大小为

$$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi\bar{R}}=\mu_0 nI$$

式中 n 为螺绕环单位长度的匝数

$$n=\frac{N}{2\pi\bar{R}}$$

通过螺绕环的磁通链为

$$\Psi=NBS=N\mu_0 nIS$$

螺绕环的自感系数为

$$L=\frac{\Psi}{I}=\mu_0 NnS=\mu_0\frac{N^2}{2\pi\bar{R}}S=7.5\times10^{-5}\text{ H}$$

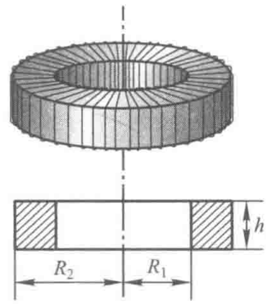
当 $I=3$ A 时，通过一匝线圈的磁通量为

$$\Phi = BS = \mu_0 \frac{N}{2\pi R} IS = \mu_0 nIS = 9.0\times10^{-7}\ \mathrm{Wb}$$

通过螺绕环的磁通链为

$$\Psi = NBS = N\mu_0 nIS = 2.25\times10^{-4}\ \mathrm{Wb}$$

9-20. 一截面为长方形的螺绕管，其尺寸如习题 9-20 图所示，共有 N 匝，求此螺绕管的自感。



习题 9-20 图

分析：螺绕环内的磁感应强度沿半径方向非均匀分布。

解：如解图 9-20 所示，设螺绕环通有电流 I，由安培环路定理可得，管内距轴线 r 处的磁场强度和磁感应强度分别为

$$H = \frac{NI}{2\pi r}$$

和
$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

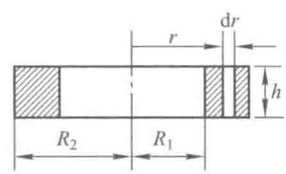
通过螺绕管的磁通链数为

$$\Psi = N\Phi = N\int_S B\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 N^2 Ih}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 N^2 Ih}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

S 为螺线环的截面积。

螺绕环的自感系数为

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$



解图 9-20

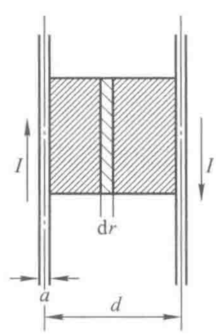
9-21. 两根平行长直导线，截面积的半径都是 a，中心相距为 d，载有大小相等方向相反的电流。设 $d \gg a$，且两导线内部的磁通量都可略去不计。求这一对导线长为 l 的一段的自感系数。

解：如解图 9-21 所示，在两导线所在平面的阴影区域内取长为 l，宽为 $\mathrm{d}r$ 的面元，通过此面元的磁通量为

$$\mathrm{d}\Phi = \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}\right] l\mathrm{d}r$$

通过平面内两导线间长为 l，宽为 $(d-2a)$ 面积的磁通量为

$$\Phi = \int \mathrm{d}\Phi = \int_a^{d-a}\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}\right] l\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$



解图 9-21

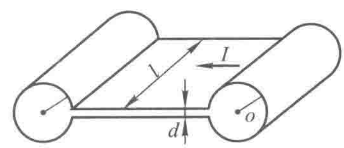
这对导线长为 l 的一段的自感系数为

$$L_l=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

两导线间单位长度的自感系数为

$$L=\frac{\Phi}{Il}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

9-22. 将金属薄片弯成如习题 9-22 图所示形状的器件,两侧是半径为 a 的圆柱,中间是边长为 l、间隔为 d 的两正方形的平面,且 $l\gg a$, $a\gg d$。试求该器件的自感系数。



习题 9-22 图

分析:电流 I 在器件内形成回路,求得通过回路的磁通量后,根据定义求解自感系数。圆柱电流的磁场可用无限长螺线管模型处理,正方形平面电流则可用无限大平面电流近似。

解:正方形上、下两平面的电流流向相反,在两平面间的磁感应强度设为 B_1,是平行于圆柱轴线向外的均匀磁场,有

$$B_1=2\times\frac{\mu_0 i}{2}=\frac{\mu_0 I}{l}$$

两圆柱电流内的磁感应强度设为 B_2,与 B_1 同向,也是均匀磁场,

$$B_2=\mu_0 i=\frac{\mu_0 I}{l}$$

通过回路所围面积的磁通量为

$$\Phi=\Phi_1+2\Phi_2=B_1S_1+2B_2S_2=\mu_0 I\left(d+\frac{2\pi a^2}{l}\right)$$

式中 $S_1=ld$, $S_2=\pi a^2$。该器件的自感系数为

$$L=\frac{\Phi}{I}=\mu_0\left(d+\frac{2\pi a^2}{l}\right)$$

9-23. 一圆形线圈 A 由 50 匝细线绕成,其面积为 4 cm^2,放在另一个匝数为 100 匝、半径为 20 cm 的圆形线圈 B 的中心,两线圈同轴。设线圈 B 中的电流在线圈 A 所在处所激发的磁场可看作是均匀的。求:(1) 两线圈的互感;(2) 当线圈 B 中的电流以 50 A/s 的变化率减小时,线圈 A 内磁通量的变化率;(3) 线圈 A 中的感生电动势。

解:(1)设线圈 B 中通有电流 I_B,圆心处的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 N_B I_B}{2R}$$

通过线圈 A 的磁通链为

$$\Psi_A=N_A BS_A=N_A N_B\frac{\mu_0 I_B}{2R}S_A$$

互感系数为

$$M=\frac{\Psi_A}{I_B}=N_A N_B\frac{\mu_0}{2R}S_A$$

$$=50\times100\times\frac{4\pi\times10^{-7}}{2\times0.2}\times4\times10^{-4}\ \text{H}=6.28\times10^{-6}\ \text{H}$$

(2)当$\frac{\mathrm{d}I_B}{\mathrm{d}t}=-50$ A/s 时,线圈 A 中磁通链的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}\Psi_A}{\mathrm{d}t}=N_A N_B\frac{\mu_0}{2R}S_A\frac{\mathrm{d}I_B}{\mathrm{d}t}$$

$$=50\times100\times\frac{4\pi\times10^{-7}}{2\times0.2}\times4\times10^{-4}\times(-50)\ \text{Wb/s}=-3.14\times10^{-4}\ \text{Wb/s}$$

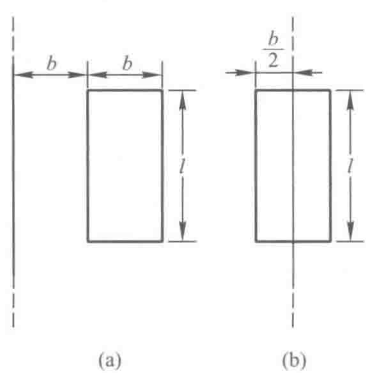
(3)线圈 A 中感生电动势的大小为

$$\mathscr{E}_A=\left|-M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|=3.14\times10^{-4}\ \text{V}$$

9-24. 一矩形线圈长 $l=20$ cm,宽 $b=10$ cm,由 100 匝表面绝缘的导线绕成,放置在一根长直导线的旁边,并和直导线在同一平面内,该直导线是一个闭合回路的一部分,其余部分离线圈很远,其影响可略去不计。求习题 9-24 图(a)、(b)两种情况下,线圈与长直导线间的互感。

分析:两回路间的互感系数决定于两回路的相对位置、方位、大小、形状和非铁磁质环境,与回路中是否有电流无关。可通过计算长直电流在矩形线圈中的磁通链,求得互感系数。

解:(a)取坐标轴 Ox 垂直于长直电流向右为正,坐标原点位于长直电流处。设长直电流为 I,在 x 处的磁感应强度为



习题 9-24 图

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

通过矩形线圈的磁通链为

$$\Psi_a=N\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_b^{2b} N\frac{\mu_0 I}{2\pi x}l\mathrm{d}x=N\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln 2$$

互感系数为

$$M_a=\frac{\Psi_a}{I}=N\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln 2=2.8\times10^{-6}\ \mathrm{H}$$

(b) 矩形线圈相对长直导线对称,通过的磁通链为零,有

$$\Psi_b=0$$

互感系数为
$$M_b=0$$

9-25. 题 9-20 中,如在螺线环的轴线上有一无限长的直导线,求它们的互感系数。

解:设直导线中通有电流 I,在螺线环中的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

通过螺线环的磁通链为

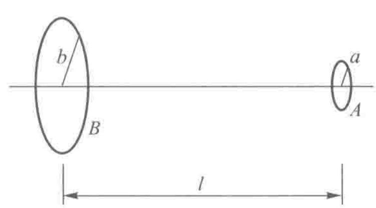
$$\Psi=N\Phi=N\int_S B\mathrm{d}S=\frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

互感系数为

$$M=\frac{\Psi}{I}=\frac{\mu_0 Nh}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

9-26. 两个圆线圈 A 和 B,半径分别为 a 和 b,且 $b\gg a$,共轴放置,两线圈中心相距为 $l(l\gg b)$,如习题 9-26 图所示。今在小线圈中通有电流 $I=I_0 e^{\lambda t}(\lambda>0)$。求大线圈中的感应电动势。(提示:先求出两线圈的互感系数。)

解:小线圈中通有电流,在大线圈处的磁场是非均匀的,无法求得通过大线圈的磁通量和感应电动势。但是,当两线圈的相对位置、方位、大小、形状不变,周围无铁磁性介质时,互感系数是一常量,与回路中是否有电流无关。因此,可设大线圈中通有电流 I_b,计算通过小线圈的磁通量来求解。又因 $b\gg a$ 以



习题 9-26 图

及 $l \gg b$，小线圈处的磁感应强度可视为均匀，为

$$B_b=\frac{\mu_0 I_b b^2}{2\left(b^2+l^2\right)^{3/2}}$$

通过小线圈的磁通量为

$$\Phi_a=B_b S_a=\frac{\mu_0 I_b \pi a^2 b^2}{2\left(b^2+l^2\right)^{3/2}}$$

两线圈间的互感系数为

$$M=\frac{\Phi_a}{I_b}=\frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2\left(b^2+l^2\right)^{3/2}}$$

小线圈中通有电流 $I_a=I_0 e^{\lambda t}$ 时，大线圈中感应电动势的大小为

$$|\mathscr{E}_b|=M\frac{dI_a}{dt}=\frac{\mu_0 I_0 \pi a^2 b^2 \lambda}{2\left(b^2+l^2\right)^{3/2}}e^{\lambda t}$$

5. 磁能

9-27. 一根长直导线，载有电流 I，已知电流均匀分布在导线的圆形横截面上。试证：单位长度导线内所储存的磁能为$\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$。

解：设导线圆形横截面的半径为 R，无限长直电流在导线内的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 r}{2\pi R^2}I \quad (r<R)$$

磁能密度为 $$w_m=\frac{B^2}{2\mu_0}=\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 r}{2\pi R^2}I\right)^2=\frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R^4}$$

在导线内取长为 l、厚为 dr 的同轴圆柱壳为体积微元，$dV=2\pi rl dr$。圆柱壳体积微元内储存的磁能为

$$dW_m=w_m dV=\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi R^4}r^3 dr$$

长为 l 的导线内储存的磁能为

$$W_m=\int dW_m=\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi R^4}\int_0^R r^3 dr=\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}l$$

单位长度导线内储存的磁能为

$$W'_{\mathrm{m}}=\frac{W_{\mathrm{m}}}{l}=\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

9-28. 假定从地面到海拔 6×10^6 m 的范围内，地磁场为 5×10^{-5} T，试粗略计算在这区域内地磁场的总磁能。

解：地磁场的磁能密度为

$$w_{\mathrm{m}}=\frac{B^2}{2\mu_0}$$

从地面到海拔 $h=6\times10^6$ m 的区域作为球壳，其体积为

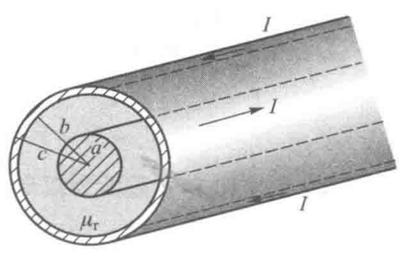
$$\Delta V=\frac{4}{3}\pi[(R_{\mathrm{E}}+h)^3-R_{\mathrm{E}}^3]$$

式中 $R_{\mathrm{E}}=6\ 400$ km，为地球半径。

该区域内总地磁场能为

$$W_{\mathrm{m}}=w_{\mathrm{m}}\Delta V=\frac{B^2}{2\mu_0}\frac{4}{3}\pi[(R_{\mathrm{E}}+h)^3-R_{\mathrm{E}}^3]=6.85\times10^{18}\ \mathrm{J}$$

9-29. 一同轴电缆，由半径为 a 的导体圆柱芯线及内、外半径分别为 b 和 c 的同轴导体圆筒组成，如习题 9-29 图所示。筒与柱间有相对磁导率为 μ_r 的磁介质，导体圆柱和圆筒的磁导率近似为 μ_0。电缆工作时，电流由圆柱流入，沿圆筒流回，而且在导体横截面上电流是均匀分布的。试求一段长为 l 的电缆所储存的磁场能量，并由此计算电缆单位长度的自感。



习题 9-29 图

解：设电缆工作时的电流为 I，磁感应强度的分布可由安培环路定理得到，为

$$B=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}, & r\leqslant a\\[2ex] \dfrac{\mu_0\mu_r I}{2\pi r}, & a<r\leqslant b\\[2ex] \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1-\dfrac{r^2-b^2}{c^2-b^2}\right), & b<r\leqslant c\\[2ex] 0, & r>c\end{cases}$$

磁能密度为 $w_m=\dfrac{B^2}{2\mu}$，在径向的 3 个区间内取厚度为 dr、长为 l 的同轴圆筒为体积元 $dV=2\pi rl dr$。在长为 l 的电缆中，设 3 个区间所储存的磁能分别为 W_{m1}、W_{m2} 和 W_{m3}，则总磁能（自感磁能）为

$$W_m=\int w_m dV=W_{m1}+W_{m2}+W_{m3}$$

其中

$$W_{m1}=\int w_{m1}dV_1=\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi a^4}\int_0^a r^3 dr=\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}l$$

$$W_{m2}=\int w_{m2}dV_2=\frac{\mu_0\mu_r I^2 l}{4\pi}\int_a^b\frac{dr}{r}=\frac{\mu_0\mu_r I^2 l}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$W_{m3}=\int w_{m3}dV_3=\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\int_b^c\left(\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}\right)^2\frac{dr}{r}$$

$$=\frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi(c^2-b^2)^2}\left(4c^4\ln\frac{c}{b}-3c^4+4b^2c^2-b^4\right)$$

总磁能

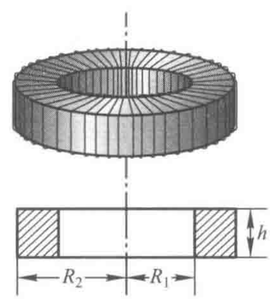
$$W_m=W_{m1}+W_{m2}+W_{m3}$$

$$=\frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}\left[1+4\mu_r\ln\frac{b}{a}+\frac{1}{(c^2-b^2)^2}\left(4c^4\ln\frac{c}{b}-3c^4+4b^2c^2-b^4\right)\right]$$

长为 l 的电缆的自感系数为

$$L=\frac{2W_m}{I^2}=\frac{\mu_0 l}{8\pi}\left[1+4\mu_r\ln\frac{b}{a}+\frac{1}{(c^2-b^2)^2}\left(4c^4\ln\frac{c}{b}-3c^4+4b^2c^2-b^4\right)\right]$$

9-30. 真空中有一截面为矩形的螺绕环，环的内、外半径分别为 R_1 和 R_2，高为 h，如习题 9-30 图所示。环内充满相对磁导率为 μ_r 的磁介质，环上共绕有 N 匝线圈，通有电流 I，试求螺绕环内的磁场能。



习题 9-30 图

解：螺绕环内的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0\mu_r NI}{2\pi r}$$

磁能密度为

$$w_m=\frac{B^2}{2\mu}=\frac{\mu_0\mu_r N^2 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

在环内取高为 h、截面宽为 dr 的同轴圆环，此环内的磁场能为

$$dW_m=w_m dV=\frac{\mu_0\mu_r N^2 I^2}{8\pi^2 r^2}\cdot 2\pi rh dr=\frac{\mu_0\mu_r N^2 I^2 h}{4\pi r}dr$$

螺绕环内的磁场能为

$$W_m=\int \mathrm{d}W_m=\frac{\mu_0\mu_r N^2 I^2 h}{4\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\mu_0\mu_r N^2 I^2 h}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

6. 位移电流和全电流环路定理

9-31. 试证明平行板电容器中的位移电流可写为 $I_d=C(\mathrm{d}U/\mathrm{d}t)$，式中 C 是电容器的电容，U 是两极板间的电势差。如果不是平行板电容器，上式可以应用吗？如果是圆柱形电容器，其中的位移电流密度和平板电容器时有何不同？

证：高斯定理给出电位移通量 Ψ 与自由电荷 Q 之间的普适关系

$$\Psi=\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=Q$$

当 Q 为电容器极板所带电荷时，有

$$C=\frac{Q}{U}$$

可得

$$\Psi=CU$$

当 Q 随时间 t 变化时，位移电流为

$$I_d=\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$$

由此得证。

以上证明过程并未涉及电容器类型，因此，位移电流 $I_d=\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$ 不但对平行板电容器适用，对任何电容器都适用。

对平行板电容器，有 $D=\frac{Q}{S}=\sigma$，可得位移电流密度的大小为

$$\delta_d=\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}$$

平行板电容器极板间的位移电流均匀分布，位移电流密度 δ_d 与 $\boldsymbol{D}$ 的方向一致。

对圆柱形电容器，有 $D=\frac{\lambda}{2\pi r}$，λ 为圆柱面上自由电荷的线密度。当 λ 随 t 变化时，位移电流密度的大小为

$$\delta_d=\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2\pi r}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}$$

圆柱形电容器内的位移电流密度 δ_d 与 $\boldsymbol{D}$ 的方向一致，垂直于圆柱轴线，其值反比于半径 r。

9-32. 在一对巨大的圆形极板（电容 $C=1.0\times10^{-12}$ F）上，加上频率为 50 Hz、峰值为 174 000 V 的交变电压，计算极板间位移电流的最大值。

解：设交变电压为 $U=U_m\cos\omega t$，峰值 $U_m=1.74\times10^5$ V，$\omega=2\pi\nu$，$\nu=50$ Hz。由高斯定理和电容定义

$$\Psi=\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=Q,\quad C=\frac{Q}{U}$$

可得

$$\Psi=CU$$

位移电流为

$$I_d=\frac{d\Psi}{dt}=C\frac{dU}{dt}=C\frac{d}{dt}(U_m\cos\omega t)$$

$$=-C\omega U_m\sin\omega t=-I_m\sin\omega t$$

式中 $I_m=C\omega U_m=2\pi\nu CU_m$，为位移电流的最大值。代入数据，得

$$I_m=2\pi\nu CU_m=5.47\times10^{-5}\ \text{A}$$

9-33. 有一平板电容器，极板是半径为 R 的圆形板，现将两极板由中心处用长直引线连接到一远处的交变电源上，使两极板上的电荷量按规律 $q=q_0\sin\omega t$ 变化。略去极板边缘效应，试求两极板间任一点的磁场强度。

分析：不计边缘效应的平行板电容器内，位移电流均匀分布。位移电流与圆形极板中心的长直传导电流共同激发的磁场具有轴对称分布。

解：在两极板间以中心轴线为圆心，以 $r(r<R)$ 为半径，在垂轴平面内作积分环路。根据全电流环路定理，有

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$$

即

$$H\cdot 2\pi r=\frac{dD}{dt}\cdot \pi r^2$$

得两极板间离轴 r 处的磁场强度为

$$H=\frac{r}{2}\frac{dD}{dt}$$

对平行板电容器，有

$$D=\sigma=\frac{q}{S}=\frac{q_0\sin\omega t}{\pi R^2}$$

所以

$$H=\frac{r}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{q_0\sin\omega t}{\pi R^2}\right)=\frac{r}{2\pi R^2}\omega q_0\cos\omega t$$

在极板内部的磁场强度为全电流所激发，随 r 增大。

9-34. 一圆形极板电容器，极板的面积为 S，两极板的间距为 d。一根长为 d 的极细的导线在极板间沿轴线与两板相连，已知细导线的电阻为 R，两极板外由导线沿中心轴在远处接交变电压 $U=U_0\sin\omega t$，求：(1) 细导线中的电流；(2) 通过电容器的位移电流；(3) 通过极板外接线中的电流；(4) 极板间离轴线为 r 处的磁场强度。设 r 小于极板的半径。

分析：全电流为位移电流与传导电流之和。圆形极板与轴向导线内的传导电流共同激发的磁场具有轴对称性。

解：(1) 根据欧姆定律可知，细导线中的传导电流为

$$I_R=\frac{U}{R}=\frac{U_0}{R}\sin\omega t$$

(2) 通过电容器的位移电流为

$$I_d=\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$$

$$=CU_0\omega\cos\omega t=\frac{\varepsilon_0 S}{d}U_0\omega\cos\omega t$$

式中 $C=\varepsilon_0\dfrac{S}{d}$。

(3) 极板外接线中的电流为

$$I_C=I_R+I_d=\frac{U_0}{R}\sin\omega t+\frac{\varepsilon_0 S}{d}U_0\omega\cos\omega t$$

也可写为　$I_C=I_R+I_d=\dfrac{U_0}{R}\sqrt{1+(RWC)^2}\sin[\omega t-\arctan(RWC)]$

(4) 根据全电流激发磁场的轴对称性，在极板间以 $r\left(r<R=\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}\right)$ 为半径，在垂轴平面内作积分回路，有

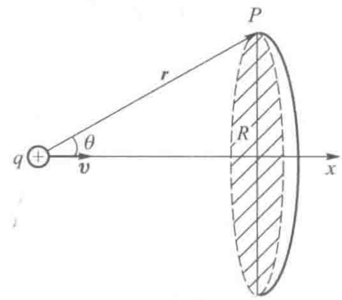
$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=H\cdot 2\pi r=I_R+I_d'=I_R+\frac{I_d}{S}\pi r^2$$

得

$$H=\frac{U_0}{2\pi}\left[\frac{1}{rR}\sin\omega t+\frac{\varepsilon_0\pi r\omega}{d}\cos\omega t\right]$$

*9-35. 点电荷 $+q$ 以速度 $\boldsymbol{v}(v\ll c)$ 作匀速直线运动，试从位移电流得到运动电荷的磁场的关系式。（提示：当电荷低速运动时，可以认为电荷周围的电场仍

保持球对称分布。电荷在运动,电场在变化,所以产生磁场。以点电荷为球心,过场点 P 作球面,求出通过截面圆的 $\boldsymbol{D}$ 通量,如习题 9-35 图所示)。



习题 9-35 图

分析:场点 P 的磁场由运动电荷的变化电场激发。以电荷的运动方向为轴线,变化电场的分布具轴对称性,也即位移电流密度的分布具有轴对称性。由此可知,磁场线以绕轴的同心圆方式分布。P 点的磁场强度可由全电流的环路定理求得。

解:以电荷的运动方向为轴线,t 时刻 q 的位置为球心,作半径为 r、高为 $h=r(1-\cos\theta)$ 的球冠面 S,有

$$S=2\pi rh=2\pi r^2(1-\cos\theta)$$

通过 S 面的 $\boldsymbol{D}$ 通量为

$$\Psi=\int_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=DS$$

式中 $D=\dfrac{q}{4\pi r^2}$,得

$$\Psi=\frac{1}{2}q(1-\cos\theta)$$

通过 S 面的位移电流为 $I_\mathrm{d}=\dfrac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}q\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

设位移电流激发的磁场强度为 $\boldsymbol{H}$。过场点 P,以垂轴的球冠底面 S_R 的边界作为积分环路 L,在 L 上的 $\boldsymbol{H}$ 处处沿切向、大小相同。取 L 的绕向与 $\boldsymbol{H}$ 一致,有

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=H2\pi R=I_\mathrm{d}$$

式中 $R=r\sin\theta$。得

$$H=\frac{I_\mathrm{d}}{4\pi R}=\frac{1}{4\pi r\sin\theta}q\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{q}{4\pi r}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

为得到 H 与 v 的关系,令 t 时刻 q 距 S_R 圆心的距离为 l,点电荷速率为

$$v=-\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

作变量代换,有

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=-v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}$$

由几何关系 $R\cot\theta=l$,得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}=-\frac{\sin^2\theta}{R}=-\frac{\sin\theta}{r}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=v\frac{\sin\theta}{r}$$

将此式代入 H 表式，有

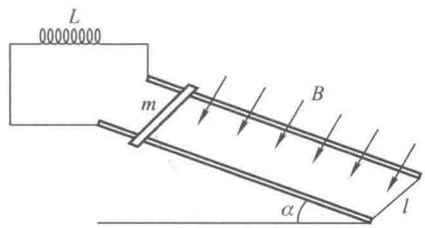
$$H=\frac{qv}{4\pi r^2}\sin\ \theta$$

考虑到 $\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{r}$ 间的右手螺旋关系，上式可表示为

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{4\pi r^3}q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}$$

这就是运动电荷激发磁场的关系式。

*9-36. 如习题 9-36 所示，在方向垂直于轨道面向下的均匀磁场中，$B=0.2$ T，有一长 $l=1$ m 质量 $m=0.1$ kg 的金属杆，沿一倾角 $\alpha=30°$金属滑道由静止下滑，若滑道与自感 $L=0.5$ H 的线圈相连，(1) 试编写一计算机程序，考察该金属杆的运动速度及线圈内电流随时间的变化关系；(2) 如果改变自感 L 的大小，金属杆的运动速度及线圈内电流将如何变化?



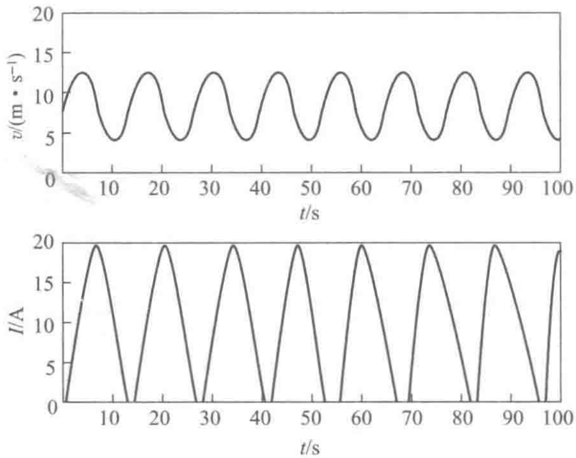
习题 9-36 图

答：(1) 速度及电流均随时间作振荡；(2) 振荡周期随 L 的增大而有所增长.

参考程序

```
% 金属杆的运动速度及线圈内电流
clear
global m a L g sita B;            % 定义全局变量
m=0.1;a=1;L=0.1;g=9.8;sita=pi/6;B=0.05;
                                  % 输入已知条件
tspan=[0 100];                    % 设定积分时间
y0=[0 0]';                        % 初时条件 t=0,金属杆从静止下落
[t,y]=ode23('indctn',tspan,y0);
                                  % 求解名为"indctn"的微分方程
subplot(2,1,1)
plot(t,y(:,1),'k');               % 下落速度对时间的曲线图
xlabel('时间(s)');ylabel('下落速度(m/s)');
subplot(2,1,2)
plot(t,y(:,2),'b');               % 下落电流对时间的曲线图
```

```
xlabel('时间(s)');ylabel('线圈电流(A)');
                                    % 感应线运动的微分方程:m(dv/dt)
                                      =mgsin α-Bai; L(di/dt)=Bav
function yp=indctn(t,y)
global m a L g sita B;              % 定义全局变量
yp=[g*sin(sita)-B*a*y(2)/m B*a*y(1)/L]';
                                    % 写入金属杆运动和回路电流的微分
                                      方程
```



解图 9-36

第四篇

振动、波动和光学

第十章　机械振动和电磁振荡

一、教学基本要求

1. 掌握简谐振动的基本特征,描述简谐振动的能量、特征量及各量之间的关系。

2. 掌握用解析法、旋转矢量法及图形法分析物体谐振动状态(相位和相位差)的方法。

3. 掌握一维简谐振动合成的规律。了解“拍”现象。了解李萨如图形。

4. 理解电磁振荡规律。

5. 了解阻尼振动、受迫振动和共振现象。

二、本章习题分类

1. 谐振动的运动学问题
2. 谐振动的动力学问题
3. 阻尼振动和受迫振动
4. 电磁振荡
5. 简谐振动的合成

三、习题分析与解答

1. 谐振动的运动学问题

10-1. 一小球与轻弹簧组成的系统,按 $x=0.05\cos\left(8\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的规律而振动,式中 t 以 s 为单位,x 以 m 为单位。试求:(1) 振动的角频率、周期、振幅、初相、速度及加速度的最大值;(2) $t=1$ s、2 s、10 s 时刻的相位各为多少?(3) 分别画出位移、速度、加速度与时间的关系曲线。

解:(1) 将小球的运动学方程与谐振动的一般形式 $x=A\cos(\omega t+\phi_0)$ 作比较,可得

$$A=0.05\ \text{m},\quad \omega=8\pi=25.12\ \text{rad/s},$$

$$T=2\pi/\omega=0.25\ \text{s},\quad \phi_0=\pi/3$$

小球的速度为

$$v=\frac{dx}{dt}=-A\omega\sin(\omega t+\phi_0)$$

$$=-0.05\times 8\pi\sin\left(8\pi t+\frac{\pi}{3}\right)=-0.4\pi\sin\left(8\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\ (m/s)$$

速度最大值的绝对值即速度振幅，为

$$v_m=A\omega=0.4\pi\ m/s=1.26\ m/s$$

小球的加速度为

$$a=\frac{dv}{dt}=-A\omega^2\cos(\omega t+\phi_0)$$

$$=-0.05\times(8\pi)^2\cos\left(8\pi t+\frac{\pi}{3}\right)=-3.2\pi^2\cos\left(8\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\ (m/s^2)$$

加速度最大值的绝对值即加速度振幅，为

$$a_m=A\omega^2=3.2\pi^2\ m/s^2=31.6\ m/s^2$$

(2) $t=1$ s 时的相位为

$$(\omega t+\phi_0)\big|_{t=1s}=8\pi+\pi/3=25\pi/3$$

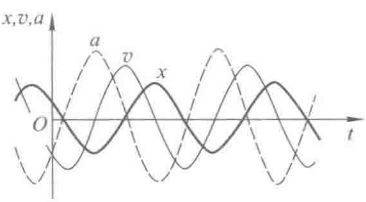
$t=2$ s 时的相位为

$$(\omega t+\phi_0)\big|_{t=2s}=16\pi+\pi/3=49\pi/3$$

$t=10$ s 时的相位为

$$(\omega t+\phi_0)\big|_{t=10s}=80\pi+\pi/3=241\pi/3$$

(3) $x(t)$、$v(t)$、$a(t)$ 曲线见解图 10-1。



解图 10-1

10-2. 有一个和轻弹簧相连的小球，沿 x 轴作振幅为 A 的谐振动，周期为 T。运动学方程用余弦函数表示。若 $t=0$ 时，球的运动状态为：(1) $x_0=-A$；(2) 过平衡位置向 x 正方向运动；(3) 过 $x=A/2$ 处向 x 负方向运动；(4) 过 $x=\frac{A}{\sqrt{2}}$ 处向 x 正方向运动。试用矢量图示法确定相应的初相位的值，并写出振动表式。

解：由 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，得 $\omega=\frac{2\pi}{T}$。

(1) $x_0=-A$，$v_0=0$；$\phi_0=\pm\pi$，振动表达式为

$$x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\pm\pi\right)\ (\text{SI 单位})$$

(2) $x_0=0$，$v_0=v_{max}>0$；$\phi_0=3\pi/2$ 或 $-\pi/2$，振动表达式为

$$x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{3\pi}{2}\right)\ 或\ x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{2}\right)$$

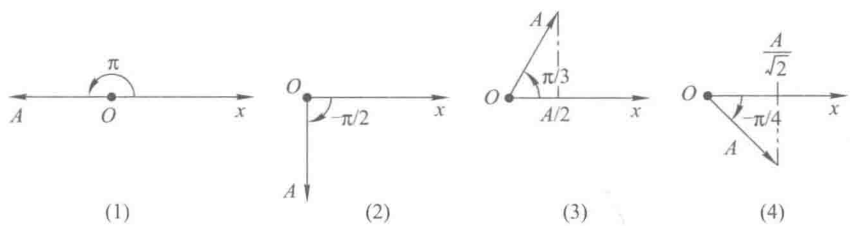
(3) $x_0=A/2, v_0<0; \phi_0=\pi/3$，振动表达式为

$$x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{3}\right)$$

(4) $x_0=\frac{A}{\sqrt{2}}, v_0>0; \phi_0=7\pi/4$ 或 $-\pi/4$，振动表达式为

$$x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{7\pi}{4}\right) \text{或} x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{4}\right)$$

各谐振动对应的旋转矢量图如解图 10-2 所示。



解图 10-2

10-3. 一振动质点的振动曲线如习题 10-3 图所示，试求：(1) 运动学方程；(2) 点 P 对应的相位；(3) 从振动开始到达点 P 相应位置所需的时间。

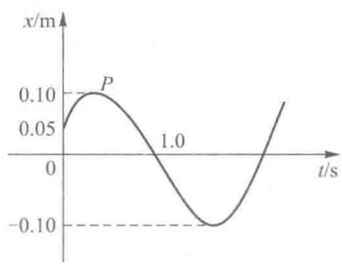
解：(1) 设质点振动的运动学方程为

$$x=A\cos(\omega t+\phi_0)$$

由振动曲线可知，$A=0.10$ m，初始值为 $x_0=0.05$ m，$v_0>0$，将初始值代入运动学方程，有

$$x_0=A\cos\phi_0$$

和 $$v_0=-A\omega\sin\phi_0>0$$



习题 10-3 图

可得 $$\phi_0=-\frac{\pi}{3}$$

由振动曲线 $t=1.0$ s 时，$x_1=0, v_1<0$ 可知，

$$\left(\omega\times1-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{2}$$

得 $$\omega=\frac{5\pi}{6}\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

所以，质点振动的运动学方程为

$$x=0.10\cos\left(\frac{5}{6}\pi t-\frac{\pi}{3}\right)\quad\text{(SI 单位)}$$

（2）在质点正方向位移的最大值处，有

$$(\omega t+\phi_0)=\left(\frac{5}{6}\pi t-\frac{\pi}{3}\right)=2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

点 P 对应的相位取 $k=0$，即

$$\left(\frac{5}{6}\pi t-\frac{\pi}{3}\right)_P=0$$

（3）由上式可得，振动开始后质点首次到达点正方向位移最大值所需的时间为

$$t=\frac{\pi}{3}\times\frac{6}{5\pi}\ \text{s}=\frac{2}{5}\ \text{s}=0.4\ \text{s}$$

10-4. 一质量为 10 g 的物体作谐振动，其振幅为 24 cm，周期为 4.0 s，当 $t=0$ 时，位移为+24 cm。求：（1）$t=0.5$ s 时，物体所在位置；（2）$t=0.5$ s 时，物体所受力的大小与方向；（3）由起始位置运动到 $x=12$ cm 处所需的最少时间；（4）在 $x=12$ cm 处，物体的速度、动能以及系统的势能和总能量。

解：由周期 $T=4.0$ s，得 $\omega=2\pi/T=2\pi/4=\pi/2$，由 $x_0=A$、$v_0=0$，得 $\phi_0=0$。所以，谐振动表达式为

$$x=A\cos(\omega t+\phi_0)=0.24\cos\frac{\pi}{2}t\ (\text{SI 单位})$$

谐振动的速度和加速度分别为

$$v=-A\omega\sin(\omega t+\phi_0)=-0.12\pi\sin\frac{\pi}{2}t$$

$$a=-A\omega^2\cos(\omega t+\phi_0)=-0.06\pi^2\cos\frac{\pi}{2}t$$

（1）$t=0.5$ s 时，物体所在位置为

$$x\big|_{t=0.5\ \text{s}}=0.24\cos\left(\frac{\pi}{2}\times0.5\right)\ \text{m}=0.17\ \text{m}$$

（2）$t=0.5$ s 时，物体的加速度为

$$a\big|_{t=0.5\text{s}}=-0.06\times(3.14)^2\times\cos\left(\frac{\pi}{2}\times0.5\right)\ \text{m/s}^2=-0.419\ \text{m/s}^2$$

物体所受力为　$F\big|_{t=0.5\text{s}}=ma\big|_{t=0.5\text{s}}=-4.19\times10^{-3}\ \text{N}$

物体受力 $\boldsymbol{F}$ 与位移的方向相反，指向平衡位置。

（3）物体由起始位置运动到 $x=12$ cm 处，有 $0.12=0.24\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$，且 $t>0$，得

$$\frac{\pi}{2}t=\frac{\pi}{3}$$

所以，所需最少时间为 $t=\frac{\pi}{3}\times\frac{2}{\pi}\ \text{s}=\frac{2}{3}\ \text{s}=0.67\ \text{s}$

(4) 在 $x=12$ cm 处，有 $v\big|_{\omega t=\pi/3}=-A\omega\sin\omega t\big|_{\omega t=\pi/3}$

$$=-0.24\times\frac{\pi}{2}\times\sin\frac{\pi}{3}\ \text{m/s}=-0.326\ \text{m/s}$$

$$E_k\big|_{\omega t=\pi/3}=\frac{1}{2}mv^2\bigg|_{\omega t=\pi/3}=5.31\times10^{-4}\ \text{J}$$

$$E_p\big|_{\omega t=\pi/3}=\frac{1}{2}kx^2\bigg|_{\omega t=\pi/3}=\frac{1}{2}m\omega^2x^2\bigg|_{\omega t=\pi/3}=1.78\times10^{-4}\ \text{J}$$

谐振动系统的机械能为

$$E=E_k+E_p=(5.31+1.78)\times10^{-4}\ \text{J}=7.09\times10^{-4}\ \text{J}$$

2. 谐振动的动力学问题

*10-5. 在一平板上放质量为 $m=1.0$ kg 的物体，平板在竖直方向上下作谐振动，周期为 $T=0.5$ s，振幅 $A=0.02$ m。试求：(1) 在振动位移最大时物体对平板的正压力；(2) 平板应以多大振幅作振动才能使重物开始跳离平板。

分析：物体在重力 $\boldsymbol{G}$ 和平板支持力 $\boldsymbol{F}_N$ 的作用下作谐振动，开始跳离平板条件是 $\boldsymbol{F}_N=0$。

解：如解图 10-5 所示，取坐标轴 x 向上为正。图 a 中物体位于平衡位置，图 b 中物体位于正向位移最大位置 A，图 c 中物体位于负向位移最大位置 $-A$。

由周期 $T=0.5$ s，振幅 $A=0.02$ m，可得角频率

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=4\pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

和加速度最大值 $|a_M|=A\omega^2$

物体的加速度 $\boldsymbol{a}$ 与位移 $\boldsymbol{x}$ 的大小成正比，方向相反。

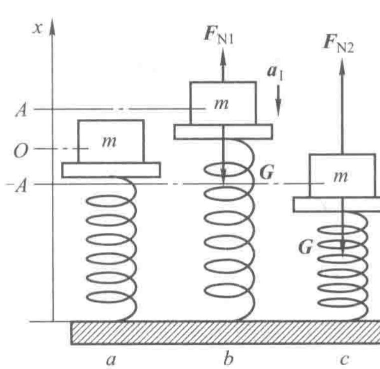
(1) 设物体在图 b 位置受平板支持力为 $\boldsymbol{F}_{N1}$，在图 c 位置受平板支持力为 $\boldsymbol{F}_{N2}$，有

$$F_{N1}-mg=ma_{M1}=-mA\omega^2$$

$$F_{N2}-mg=ma_{M2}=mA\omega^2$$

解得 $F_{N1}=6.64$ N，　$F_{N2}=12.96$ N

$F_{N1}<F_{N2}$，物体在最高处受平板支持



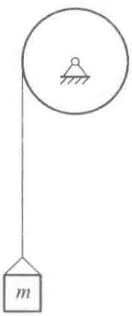
解图 10-5

力小于在最低处的。

(2) 由(1)的结果可知,增大振幅时物体将于最高处跳离平板,跳离时 $\boldsymbol{F}_{N1}=0$。

有
$$-mg=-mA\omega^2$$
得
$$A=g/\omega^2=0.062\ \mathrm{m}$$

10-6. 图示的提升运输设备,重物的质量为 1.5×10^4 kg,当重物以速度 $v=15$ m/min 匀速下降时,机器发生故障,钢丝绳突然被轧住。此时,钢丝绳相当于劲度系数 $k=5.78\times10^6$ N/m 的弹簧。求因重物的振动而引起钢丝绳内的最大张力。



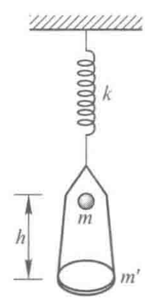
习题 10-6 图

分析:重物在匀速下降过程中受合力为零。钢丝绳被轧住时,由于惯性和钢丝绳弹性力的交互作用,重物以该时刻所处位置为平衡位置,开始作谐振动。

解:重物在最低处时,钢丝绳内的张力最大,设为 F_{Tm}。有
$$F_{Tm}-mg=ma_M=mA\omega^2$$
式中 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$,为谐振动系统的固有频率,$A$ 为谐振动的振幅。

重物匀速下降的速度值就是谐振动的最大速度 $v_m=A\omega$。由此可得
$$F_{Tm}=mg+mA\omega^2=m(g+v_m\omega)=m\left(g+v_m\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$
$$=1.5\times10^4\times\left(9.8+\frac{15}{60}\times\sqrt{\frac{5.78\times10^6}{1.5\times10^4}}\right)\ \mathrm{N}=2.21\times10^5\ \mathrm{N}$$

10-7. 一质量为 m' 的盘子刚性连接于竖直悬挂的轻弹簧下端,弹簧的劲度系数为 k,如习题 10-7 图所示。现有一质量为 m 的物体自离盘 h 高处自由落下掉在盘上,没有反弹,以物体掉在盘上的瞬时作为计时起点,求盘子的运动学方程。(取物体掉在盘子后的平衡位置为坐标原点,位移以向下为正。)



习题 10-7 图

分析:m、m' 一起振动的固有频率决定于 k 和 $(m+m')$,振动的初始速率 v_1 由 m 和 m' 的完全非弹性碰撞决定,空盘原来静止的位置为振动的初始位移。

解:取坐标轴 Oy 向下为正,如解图 10-7 所示,设空盘静止时轻弹簧的伸长量为 l_1,有

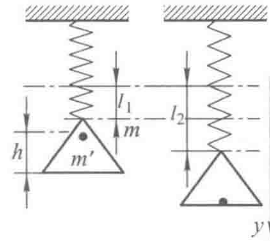
$$m'g-kl_1=0$$

取坐标原点 O 于 m、m'受合力为零处,设平衡时轻弹簧的伸长量为 l_2,有

$$(m+m')g-kl_2=0$$

m 和 m'一起振动的角频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m'+m}}$$



解图 10-7

初始位置为

$$y_0=-(l_2-l_1)=-mg/k$$

由动量守恒,有

$$mv_0=(m+m')v_1$$

式中 $v_0=\sqrt{2gh}$,可得 m 和 m'振动的初始速度 v_1 为

$$v_1=\frac{m}{m+m'}v_0=\frac{m}{m+m'}\sqrt{2gh}$$

由 m、m'一起振动的初始状态 $y_0<0$,$v_1>0$ 可知,谐振动对应的旋转矢量在第三象限。由此可得,振幅为

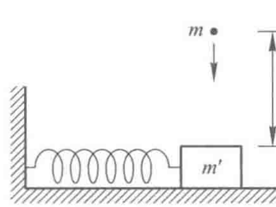
$$A=\sqrt{y_0^2+\left(\frac{v_1}{\omega}\right)^2}=\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{(m'+m)g}}$$

初相为
$$\phi_0=\arctan\left(\frac{-v_1}{\omega y_0}\right)+\pi=\arctan\sqrt{\frac{2kh}{(m'+m)g}}+\pi$$

m、m'一起振动的运动学方程为

$$\begin{aligned}y&=A\cos(\omega t+\phi_0)\\&=\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{(m'+m)g}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m'+m}}t+\arctan\sqrt{\frac{2kh}{(m'+m)g}}+\pi\right)\end{aligned}$$

10-8. 一个光滑水平面上的弹簧振子,弹簧的劲度系数为 k,所系物体的质量为 m',振幅为 A。有一质量为 m 的小物体从高度 h 处自由下落,如习题 10-8 图所示。(1) 当振子在最大位移处,物体正好落在 m'上,并粘在一起,这时系统的振动周期、振幅和振动能量有何变化?(2) 如果小物体是在振子到达平衡位置时落在 m'上,这些量又怎样变化?



习题 10-8 图

分析：小物体 m 粘到 m'上，成为质量为$(m+m')$的新振子，其固有频率（周期）不同于原振子，与 m 在何处与 m'相粘无关。但新振子的振幅与其初始运动状态，即相粘位置及水平运动速度相关。在粘连过程中振动系统的机械能若有损耗，其振幅将变小。

解：记原振子为 0，新振子为 1，有

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m'}}=\frac{2\pi}{T_0},\quad T_0=2\pi\sqrt{\frac{m'}{k}}$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m'+m}}=\frac{2\pi}{T_1},\quad T_1=2\pi\sqrt{\frac{m'+m}{k}}>T_0$$

（1）小物体 m 在 m'的最大位移处与其相粘。新振子的初始位置为 $x_{01}=A_0$，初始速率 $v_{01}=0$。新振子的振幅为

$$A_1=\sqrt{x_{01}^2+\left(\frac{v_{01}}{\omega_1}\right)^2}=A_0$$

振动能量为

$$E_1=\frac{1}{2}kA_1^2=\frac{1}{2}kA_0^2=E_0$$

新振子的振动周期变大，振幅和振动能量不变。

（2）小物体 m 在 m'的平衡位置处与其相粘。这是弹簧的原长处，也是新振子的平衡位置。此时 m'有最大速率 $v_{0m}=A_0\omega_0$。记新振子为 2，有 $\omega_2=\omega_1$，初始位置 $x_{02}=0$。设新振子的初始速度为 v_{02}，由动量守恒定律，有

$$m'v_{0m}=(m'+m)\ v_{02}$$

得
$$v_{02}=\frac{m'v_{0m}}{m'+m}=\frac{m'A_0\omega_0}{m'+m}$$

由机械能守恒定律可知，v_{02}也是新振子的最大振动速率，有

$$v_{02}=A_2\omega_2$$

所以，新振子的振幅为

$$A_2=\frac{v_{02}}{\omega_2}=\frac{m'A_0}{m'+m}\frac{\omega_0}{\omega_1}=\frac{m'A_0}{m'+m}\sqrt{\frac{m'+m}{m'}}=\sqrt{\frac{m'}{m'+m}}A_0<A_0$$

新振子的振动能量为

$$E_2=\frac{1}{2}kA_2^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{m'}{m'+m}\right)A_0^2=\frac{m'}{m'+m}E_0<E_0$$

新振子的振动周期变大，振幅和振动能量变小。

10-9. 一弹簧振子作谐振动，振幅 $A=0.20$ m，如弹簧的劲度系数 $k=2.0$ N/m，

所系物体的质量 $m=0.50$ kg，试求：(1) 当动能和势能相等时，物体的位移是多少？(2) 设 $t=0$ 时，物体在正最大位移处，达到动能和势能相等处所需的时间是多少？(在一个周期内)

解：设振子沿 x 方向作谐振动，有　$x=A\cos(\omega t+\phi_0)$

(1) 动能和势能分别为

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\phi_0)$$

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\phi_0)$$

动能和势能相等时，有　$\tan^2(\omega t+\phi_0)=1$

即
$$(\omega t+\phi_0)=(2j+1)\frac{\pi}{4},\quad j=0,1,2,3,\cdots$$

在谐振动的一个周期内，j 可取 4 个值($t\geqslant0$)，如 $j=0,1,2,3$。得

$$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A=\pm0.14\ \text{m}$$

另一解法：谐振动的总机械能为

$$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}mA^2\omega^2=\frac{1}{2}kA^2$$

动能和势能相等时，有

$$E=2E_k=2E_p$$

即有
$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}E=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}kA^2\right)$$

同样可得
$$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$$

(2) 由 $t=0$ 时，$x_0=A$，$v_0=0$，可得 $\phi_0=0$。有

$$x=A\cos\omega t$$

式中 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$。由(1)解得 $E_k=E_p$ 时，$x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}A$，可有

$$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A=A\cos\omega t$$

得
$$\omega t=(2j+1)\frac{\pi}{4},\quad j=0,1,2,3,\cdots$$

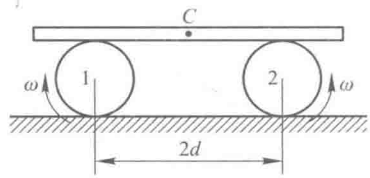
在计时开始后一个周期内的各时刻，上式中应取 $j=0,1,2,3$。所以，动能和势能相等的时刻为

$$t=(2j+1)\frac{\pi}{4\omega}=(2j+1)\frac{\pi}{8},\quad j=0,1,2,3.$$

代入数据，得

$$t_0=0.39\ \text{s};\quad t_1=1.18\ \text{s};$$
$$t_2=1.96\ \text{s};\quad t_3=2.75\ \text{s}$$

10-10. 如习题 10-10 图所示，两轮的轴互相平行，相距为 $2d$，其转速相同，转向相反。将质量为 m 的匀质木板放在两轮上，木板与两轮间的摩擦因数均为 μ。当木板偏离对称位置后，它将如何运动？如果是作谐振动，其周期是多少？若两轮均沿图示的相反方向旋转，木板将如何运动？



习题 10-10 图

分析：研究对象是木板。在竖直方向，木板因受力平衡而无运动。在水平方向，木板受方向相反的两个摩擦力的作用。当质心 C 偏离对称位置时，木板受两轮的支持力和摩擦力的大小都不相等，但两支持力对 C 的力矩平衡。由此得到木板在水平方向所受合力，并判断木板的运动方式。

解：如解图 10-10(a)所示，取坐标轴 Ox，坐标原点 O 位于对称中心。设木板质心 C 偏离 O 一微小距离 x。因木板在竖直方向无运动，有

$$F_{N1}+F_{N2}-mg=0$$

由对 C 的力矩平衡，有

$$F_{N1}(d+x)-F_{N2}(d-x)=0$$

得

$$F_{N1}=\frac{d-x}{2d}mg,\quad F_{N2}=\frac{d+x}{2d}mg$$

木板在水平方向受摩擦力的合力为

$$F_r=F_{r1}-F_{r2}=\mu F_{N1}-\mu F_{N2}=-\frac{\mu mg}{d}x$$

根据牛顿运动定律，有

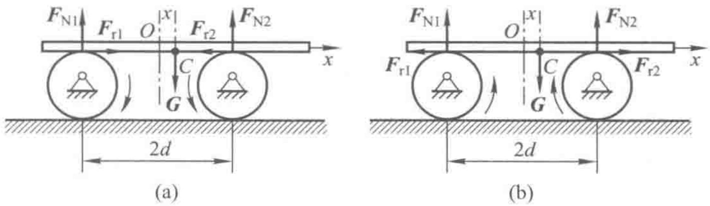
$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\mu g}{d}x=-\omega^2x$$

式中 $\omega=\sqrt{\dfrac{\mu g}{d}}$。所以，木板将沿 x 方向作谐振动，振动周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{d}{\mu g}}$$

如解图 10-10(b)所示,两轮均沿图示的相反方向旋转,设 C 偏离 O 一微小距离 x。根据牛顿运动定律,有

$$F_r = F_{r2} - F_{r1} = \mu F_{N2} - \mu F_{N1} = \frac{\mu mg}{d}x = ma$$



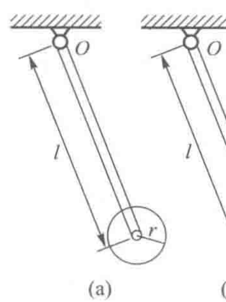
解图 10-10

可得方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mu g}{d}x$$

木板将作单向的变加速运动直至滑落。

10-11. 由长为 l 的轻杆与半径为 r 的匀质圆盘组成两个摆,其中一个摆的圆盘与杆固定连接如习题 10-11 图(a)所示;另一个摆的圆盘装在杆端的光滑转轴上,可相对地自由转动如图(b) 所示。当两摆作微小振动时,试求它们的周期。



习题 10-11 图

分析:图(a)的轻杆与圆盘固定连接成为复摆,绕 O 轴摆动。图(b)的圆盘装在杆端的光滑转轴上,轻杆绕 O 轴摆动时,圆盘只作平动,相当于质量集中在轻杆端的质点,所以图(b)可视为单摆。

解:设圆盘的质量为 m,由平行轴定理,图(a)的复摆绕 O 轴的转动惯量为

$$J = \frac{1}{2}mr^2 + ml^2$$

绕 O 轴作小角度为 θ 的摆动时,对 O 轴的力矩为

$$M = -mgl\sin\theta \approx -mgl\theta = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

即

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgl}{J}\theta = -\omega^2\theta$$

$$\omega=\sqrt{\frac{mgl}{J}}=\frac{2\pi}{T_a}$$

所以,图(a)复摆的周期为

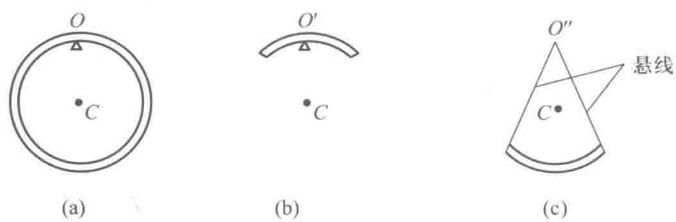
$$T_a=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}=2\pi\sqrt{\frac{r^2+2l^2}{2gl}}$$

图(b)为单摆,其转动惯量 $J=ml^2$,因而

$$T_b=2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

由 $T_a>T_b$ 可知,圆盘固定连接的摆的周期长些。

10-12. 如习题 10-12 图所示的三个摆,其中图(a)是半径为 R 的均质圆环,悬挂在 O 点并且绕过此点垂直于纸面的轴摆动,C 为环心。图(b)和图(c)是同样圆环中对 OC 连线对称截取一部分,分别悬挂在 O' 和 O'' 点,可各自绕过 O' 和 O'' 点且垂直于纸面的轴线摆动,如悬线的质量不计,摆角都不大,比较它们的摆动周期。



习题 10-12 图

分析:三个刚性圆弧摆都为复摆。由对称性可知,复摆的质心在 OC 连线上。利用复摆周期、转动惯量的平行轴定理求解。

解:复摆的周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgh}}$$

J 为刚性物体对转轴的转动惯量,h 为质心与转轴的间距,质心 G 由

$$y_G=\frac{\int y\mathrm{d}m}{m}$$

给出。

(1) 图(a)均质圆环:对 O 轴的转动惯量为

$$J_O=J_C+mR^2=2mR^2$$

质心与转轴的间距 $h=R$，对 O 轴的摆动周期为

$$T_O=2\pi\sqrt{\frac{J_O}{mgh}}=2\pi\sqrt{\frac{2mR^2}{mgR}}=2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

(2) 图(b)的均质圆弧：如解图 10-12(a)所示，设质心 G 的坐标为 y_G，质心与转轴的间距为 $h=R-y_G$。

对 C 轴的转动惯量为

$$J_C=mR^2=J_G+my_G^2$$

式中 J_G 为圆弧对质心轴的转动惯量。

对 O'轴的转动惯量为

$$\begin{aligned}J_{O'}&=J_G+mh^2=(J_C-my_G^2)+m(R-y_G)^2\\&=2mR(R-y_G)=2mRh\end{aligned}$$

对 O'轴的摆动周期：

$$T_{O'}=2\pi\sqrt{\frac{J_{O'}}{mgh}}=2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

(3) 图(c)的均质圆弧：如解图 10-12(b)所示，设质心 G 的坐标为 y_G，质心与转轴的间距为 $h=2R-y_G$。

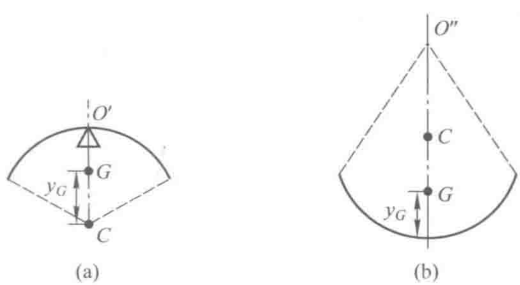
对 C 轴的转动惯量为

$$J_C=mR^2=J_G+m(R-y_G)^2$$

对 O''轴的转动惯量为

$$\begin{aligned}J_{O''}&=J_G+mh^2=J_C-m(R-y_G)^2+m(2R-y_G)^2\\&=2mR(2R-y_G)=2mRh\end{aligned}$$

式中质心与 O''轴的间距 $h=2R-y_G$。



解图 10-12

对 O''轴的摆动周期：

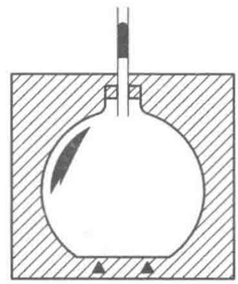
$$T_{O''}=2\pi\sqrt{\frac{J_{O''}}{mgh}}=2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

在小角度摆动情况下，三个摆的周期相同。

10-13. 如习题 10-13 图所示，绝热容器上端有一截面积为 S 的玻璃管，管内放有一质量为 m 的光滑小圆柱作为活塞。容器内储有体积为 V、压强为 p 的某种气体，设大气压强为 p_0。开始时将小圆柱稍向下移，然后放手，则小圆柱将上下振动。如果测出小圆柱作谐振动时的周期 T，就可以测定气体的比热容比 γ。试证明

$$\gamma=\frac{4\pi^2 mV}{pS^2T^2}$$

（假定小圆柱在振动过程中，容器内气体进行的过程可看作准静态绝热过程。）



习题 10-13 图

解: 小圆柱受力平衡时，设容器内气体的状态为 (p,V)，有

$$p_0S+mg-pS=0$$

小圆柱向下移动 x 时，设容器内气体的状态为 (p_1,V_1)，有

$$p_0S+mg-p_1S=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

由以上两式，得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{pS-p_1S}{m}$$

容器内气体的状态由 (p,V) 变为 (p_1,V_1) 的过程，满足绝热过程方程，有

$$p_1V_1^{\gamma}=p_1(V-xS)^{\gamma}=pV^{\gamma}$$

式中 $V_1=V-xS$ 是容器内气体被压缩后的体积，其压强为

$$p_1=p\left(1-\frac{xS}{V}\right)^{-\gamma}$$

因 $xS\ll V$，上式可写为

$$p_1=p\left(1+\gamma\frac{xS}{V}\right)$$

所以，有

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\gamma pS^2}{mV}x=-\omega^2x$$

上式为小圆柱作谐振动所满足的微分方程。

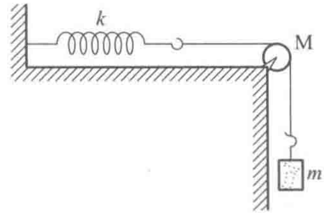
振动角频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{\gamma pS^2}{mV}}$$

振动周期为 $$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{mV}{\gamma pS^2}}$$

比热容比为 $$\gamma=\frac{mV}{p}\left(\frac{2\pi}{TS}\right)^2=\frac{4\pi^2 mV}{pS^2T^2}$$

*10-14. 如习题 10-14 图所示，轻质弹簧的一端固定，另一端系一轻绳，轻绳绕过滑轮连接一质量为 m 的物体，绳在轮上不打滑，使物体上下自由振动。已知弹簧的劲度系数为 k，滑轮的半径为 R，转动惯量为 J。试用能量法：(1) 证明物体作简谐振动；(2) 求物体的振动周期；(3) 设 $t=0$ 时，弹簧无伸缩，物体也无初速，写出物体的振动表式。设向下为坐标轴正方向。



习题 10-14 图

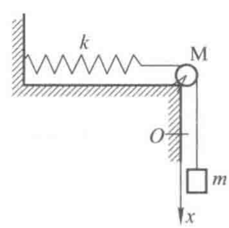
解：(1) 取地球、轻弹簧 k、滑轮 M 和物体 m 为系统。设物体 m 静止时弹簧的伸长量为 b，因轻绳不可伸长，有

$$b=\frac{mg}{k}$$

取弹簧原长为弹性势能零点，物体静止处为重力势能零点，也为坐标轴 Ox 原点。

如解图 10-14 所示，当物体的位移为 x，速度为 v 时，因系统机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}k(x+b)^2+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2-mgx=\text{常量}$$



解图 10-14

式中 ω 为滑轮角速度。因绳在轮上不打滑，有

$$\omega=\frac{v}{R}=\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

将机械能守恒式对 t 求导数，得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{k}{m+J/R^2}x=-\omega^2x$$

上式表明物体作谐振动。式中 ω 为谐振动的固有角频率

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m+J/R^2}}=R\sqrt{\frac{k}{mR^2+J}}$$

物体的运动规律为 $$x=A\cos(\omega t+\phi_0)$$

(2) 物体的振动周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m+J/R^2}{k}}$$

（3）$t=0$ 时，弹簧无伸缩，物体也无初速，即 $x_0=-b$，$v_0=0$，可有

$$-b=A\cos\phi_0,0=-A\omega\sin\phi_0$$

得
$$A=b=\frac{mg}{k},\phi_0=\pi$$

所以，物体的谐振动表达式为

$$x=A\cos(\omega t+\phi_0)=\frac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m+J/R^2}}t+\pi\right)$$

10-15. 一台摆钟每天快 1 min27 s，其等效摆长 $l=0.995$ m，摆锤可上下移动以调节周期，假定将此摆当做质量集中在摆锤中心的单摆来考虑，则应将摆锤移动多少距离才能使钟走得准确？

解 1：在一天时间 $t_0=24\times3\,600$ s 内，钟摆的摆动次数 n 与摆动周期 T 的关系为

$$t_0=nT$$

单摆的周期为
$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

微分后，可得
$$\frac{\mathrm{d}T}{T}=\frac{\mathrm{d}l}{2l}$$

由此可得
$$\mathrm{d}l=2l\frac{\mathrm{d}T}{T}=2l\frac{n\mathrm{d}T}{nT}$$

将 $n\mathrm{d}T=87$ s 代入上式，解得

$$\mathrm{d}l=2\times0.995\times\frac{87}{24\times3\,600}\text{ m}=0.002\text{ m}$$

应使等效摆长增长 2 mm，才能使钟走得准确。

解 2：设标准摆钟的等效摆长为 l_0，摆动周期为 T_0，一天时间 t_0 内的摆动次数为 $n_0=\frac{t_0}{T_0}$。这台摆钟的等效摆长为 L'，周期为 T'，一天时间 t_0 内的摆动次数为

$$n'=\frac{t_0}{T'}=n_0+\Delta n$$

由此可得
$$\frac{T_0}{T'}=\frac{t_0}{n_0T'}=\frac{t_0}{(n'-\Delta n)T'}=\frac{t_0}{t_0-\Delta nT'}$$

由单摆的周期可得

$$\frac{T_0}{T'}=\sqrt{\frac{l_0}{l'}}$$

所以，有
$$l_0'=l'\left(\frac{t_0}{t_0-\Delta nT'}\right)^2$$
式中 $t_0=24\times3\ 600\ \text{s}$，$\Delta nT'=87\ \text{s}$。可解得
$$l_0=0.995\times\left(\frac{24\times3\ 600}{24\times3\ 600-87}\right)^2\ \text{m}=0.997\ \text{m}$$
$$\Delta l=l_0-l'=(0.997-0.995)\ \text{m}=0.002\ \text{m}$$

3. 阻尼振动和受迫振动

10-16. 质量为 $m=5.88\ \text{kg}$ 的物体，挂在弹簧上，让它在竖直方向上作自由振动。在无阻尼情况下，其振动周期为 $0.4\pi\ \text{s}$；在阻力与物体运动速度成正比的某一介质中，它的振动周期为 $0.5\pi\ \text{s}$。求当速度为 $0.01\ \text{m/s}$ 时，物体在阻尼介质中所受的阻力。

解：由阻尼振动周期
$$T'=\frac{2\pi}{\omega'}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$
得阻尼因子为
$$\beta=\sqrt{\omega_0^2-\left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2-\left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2\pi}{0.4\pi}\right)^2-\left(\frac{2\pi}{0.5\pi}\right)^2}\ \text{s}^{-1}=3\ \text{s}^{-1}$$
阻力系数为
$$\gamma=2\beta m=2\times3\times5.88\ \text{kg}\cdot\text{s}^{-1}=35.3\ \text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$$
阻力为
$$F=\gamma v=0.353\ \text{N}$$

10-17. 一摆在空中振动，某时刻，振幅为 $A_0=0.03\ \text{m}$，经 $t_1=10\ \text{s}$ 后，振幅变为 $A_1=0.01\ \text{m}$。问：由振幅为 A_0时起，经多长时间，其振幅减为 $A_2=0.003\ \text{m}$.

解：阻尼振动的振幅为　　$A=A_0\mathrm{e}^{-\beta t}$

将 $t=0$，$A=A_0=0.03\ \text{m}$，和 $t_1=10\ \text{s}$，$A=A_1=0.01\ \text{m}$ 代入上式，得
$$\beta=\frac{1}{t_1}\ln\frac{A_0}{A_1}=\frac{1}{10}\ln 3\quad(\text{SI 单位})$$
振幅减为 $A_2=0.003\ \text{m}$ 时，由 $A_2=A_0\mathrm{e}^{-\beta t_2}$，解得所需时间为
$$t_2=\frac{1}{\beta}\ln\frac{A_0}{A_2}=21\text{s}$$

10-18. 火车在行驶，每当车轮经过两根铁轨的接缝时，车轮就受到一次冲击，从而使装在弹簧上的车厢发生上下振动。设每段铁轨长 12.6 m，如果车厢与载荷的总质量为 55 t，车厢下的减振弹簧每受 10 kN(即 1 t 质量的重力)的载荷将被压缩 0.8 mm。试问火车速率多大时，振动特别强？(这个速率称为火车的危险速率。)

分析：撞击频率趋近车厢振动的固有频率时，车厢系统将发生共振现象。

解：已知车厢的质量为 $m=55\times10^3$ kg，弹簧的劲度系数为

$$k=mg/b=10\times10^3/(0.8\times10^{-3})\ \text{N/m}=1.25\times10^7\ \text{N/m}$$

车厢振动的固有角频率为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{1.25\times10^7}{55\times10^3}}\ \text{rad/s}=15\ \text{rad/s}$$

设每段铁轨的长度为 l，当火车以速率 v 匀速行驶时，受撞击的角频率为

$$\omega=2\pi\nu=2\pi\frac{v}{l}$$

当 $\omega=\omega_0$ 时，车厢将发生共振，这时的速率为危险速率

$$v=\frac{l}{2\pi}\omega_0=\frac{12.6}{2\pi}\times15=30\ \text{m/s}=108\ \text{km/h}$$

4. 电磁振荡

10-19. 把一个电感器接在一个电容器上，此电容器的电容可用旋转旋钮来改变。我们想使 LC 振荡的频率与旋钮旋转的角度作线性变化，如果旋钮旋转 180°角，振荡频率就自 2.0×10^5 Hz 变到 4.0×10^5 Hz。若 $L=1.0\times10^{-3}$ H，试求电容 C 的变化范围。

解：LC 电路振荡频率为

$$\nu=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

令频率 ν 与角度 θ 呈线性关系，有

$$\nu=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=\theta_0+k\theta\quad(\text{SI 单位})$$

将 $\theta=0$ 时，$\nu=\nu_0=2.0\times10^5$ Hz；$\theta=\pi$ 时，$\nu=\nu_m=2\nu_0=4.0\times10^5$ Hz 代入上式，有

$$\nu_0=\theta_0=2.0\times10^5\ \text{Hz},\quad \nu_m=\nu_0+k\pi=4.0\times10^5\ \text{Hz}$$

解得

$$k=\frac{\nu_m-\nu_0}{\pi}=\frac{\nu_0}{\pi}$$

$$\nu=\theta_0+k\theta=\nu_0\left(1+\frac{\theta}{\pi}\right)$$

电容 C 与角度 θ 的函数关系为

$$C=\frac{1}{4\pi^2L\nu^2}=\frac{1}{4L\nu_0^2\ (\pi+\theta)^2}$$

$\theta=0$ 时的电容为

$$C_0=\frac{1}{4\pi^2L\nu_0^2}=633\ \text{pF}$$

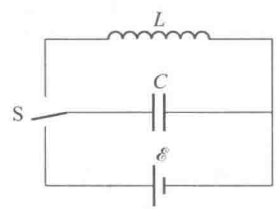
$\theta=\pi$ 时的电容为

$$C_\pi=\frac{1}{16\pi^2L\nu_0^2}=158\ \text{pF}$$

电容 C 的变化范围为

$$\Delta C=C_0-C_\pi=475\ \text{pF}$$

10-20. 如习题 10-20 图所示，将开关 S 按下后，电容器即由电池充电，放手后，电容器即经由线圈 L 放电。(1) 若 $L=0.010$ H，$C=1.0\ \mu$F，$\mathscr{E}=1.4$ V，求 L 中的最大电流(电阻极小，可略)；(2) 当分布在电容和电感间的能量相等时，电容器上的电荷为多少？(3) 从放电开始到电荷第一次为上述数值时，经过了多少时间？



习题 10-20 图

分析：充电后的电容器与线圈构成 LC 电磁振荡电路。不计电路的阻尼时，电容器极板上的电荷量随时间按谐振动的规律变化。振荡电路的固有振动频率由 L 和 C 的乘积决定，振幅和初相位由系统的初始状态决定，任意时刻电路的状态都可由振荡的相位决定。

解：无阻尼 LC 电磁振荡，电容器极板上电荷变化的规律为

$$q=Q_0\cos(\omega t+\phi_0)$$

q 为 t 时刻电容器极板上的电荷量，Q_0为振幅

$$Q_0=CU=C\mathscr{E}=1.0\times10^{-6}\times1.4\ \text{C}\ =1.4\times10^{-6}\ \text{C}$$

系统的固有振动角频率为　$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

(1) 电路中的充放电电流 i 为

$$i=\frac{dq}{dt}=-Q_0\omega\sin(\omega t+\phi_0)=-I_m\sin(\omega t+\phi_0)$$

式中 I_m 为电流的最大值。

$$I_m = Q_0\omega = C\mathscr{E}\frac{1}{\sqrt{LC}} = \mathscr{E}\sqrt{\frac{C}{L}} = 1.4\times\sqrt{\frac{1.0\times10^{-6}}{0.01}}\ \text{A} = 1.4\times10^{-2}\ \text{A}$$

(2) 分布在电容和电感间的能量相等时,有

$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}Li^2$$

即

$$\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\cos^2(\omega t+\phi_0) = \frac{1}{2}LQ_0^2\omega^2\sin^2(\omega t+\phi_0) = \frac{1}{2C}Q_0^2\sin^2(\omega t+\phi_0)$$

可得一个周期内电场能和磁场能相等时的相位为

$$(\omega t+\phi_0) = \frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi$$

电场能和磁场能相等时电容器上的电荷量为

$$q = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}Q_0 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\mathscr{E}C = \pm9.90\times10^{-7}\ \text{C}$$

(3) $t=0$ 的初始时刻,有 $q_0=Q_0, i_0=0$。可得 $\phi_0=0$。从开始放电到第一次电场能和磁场能相等所需时间由 $\omega t=\frac{\pi}{4}$,得

$$t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi\sqrt{LC}}{4} = 7.85\times10^{-5}\ \text{s}$$

10-21. 由一个电容 $C=4.0\ \mu\text{F}$ 的电容器和一个自感为 $L=10\ \text{mH}$ 的线圈组成的 LC 电路,当电容器上电荷的最大值 $Q_0=6.0\times10^{-5}\ \text{C}$ 时开始作无阻尼自由振荡。试求:(1) 电场能量和磁场能量的最大值;(2) 当电场能量和磁场能量相等时,电容器极板上的电荷量。

解:由 $t=0$ 时,电容器极板上的电荷量 $q=Q_0$ 可知,该电磁振荡的初相 $\phi_0=0$,振荡规律为

$$q = Q_0\cos\omega t$$

振荡电路的固有角频率为

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

(1) 电场能量的最大值或磁场能量的最大值就是电路的总电磁能。

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C} = 4.5\times10^{-4}\ \text{J}$$

（2）电场能量和磁场能量相等时，有

$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=\frac{1}{2}Li^2$$

得
$$\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\cos^2\omega t=\frac{1}{2}LQ_0^2\omega^2\sin^2\omega t=\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\sin^2\omega t$$

一个周期内电场能和磁场能相等时的相位为

$$\omega t=\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi$$

该时刻电容器极板上的电荷量为

$$q=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}Q_0=\pm4.24\times10^{-5}\ \mathrm{C}$$

5. 简谐运动的合成

10-22. 一个质点同时参与两个在同一直线上的谐振动：

$$x_1=0.04\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right),\quad x_2=0.03\cos\left(2t-\frac{5}{6}\pi\right)$$

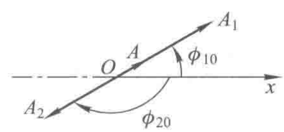
试求其合振动的运动学方程（式中 x 以 m 计，t 以 s 计）。

解：这两个谐振动的相位在任何时刻都相反，由旋转矢量图可知，合矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{A}_1$ 方位，如解图 10-22 所示。合振幅为

$$A=|A_1-A_2|=0.04\ \mathrm{m}-0.03\ \mathrm{m}=0.01\ \mathrm{m}$$

合振动的初相位为

$$\phi_0=\phi_{10}=\frac{\pi}{6}$$



解图 10-22

合振动的运动学方程为

$$x=x_1+x_2=0.01\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)\ (\mathrm{m})$$

10-23. 一个质点同时参与两个同方向同频率的谐运动，其振动方程为

$$x_1=0.3\cos\left(0.5\pi t-\frac{5\pi}{6}\right)\ (\text{SI 单位}),\quad x_2=0.4\cos(0.5\pi t+\phi_{20})\ (\text{SI 单位})$$

试问：（1）ϕ_{20} 为何值时合振动的振幅最大？其值为多少？（2）若合振动的初相 $\phi_0=\pi/6$，则 ϕ_{20} 为何值？

解：（1）两振动同相时，合振动的振幅最大，$\phi_{20}=2k\pi-5\pi/6$，有

$$A=A_1+A_2=0.3\ \text{m}+0.4\ \text{m}=0.7\ \text{m}$$

（2）若合振动的初相 $\phi_0=\pi/6$，则合矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方位与 $\boldsymbol{A}_1$ 相反，与 $\boldsymbol{A}_2$ 的方位相同，应有 $\phi_{20}=\pi/6$，合振幅最小，为

$$A=|A_1-A_2|=0.4\ \text{m}-0.3\ \text{m}=0.1\ \text{m}$$

10-24. 三个同方向、同频率的谐振动为

$$x_1=0.1\cos\left(10t+\frac{\pi}{6}\right)\quad (\text{SI 单位})$$

$$x_2=0.1\cos\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)\quad (\text{SI 单位})$$

$$x_3=0.1\cos\left(10t+\frac{5\pi}{6}\right)\quad (\text{SI 单位})$$

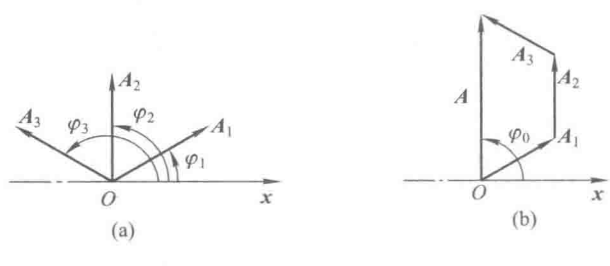
试利用旋转矢量法求出合振动的表达式。

分析：三个同方向、同频率的谐振动，在旋转矢量图上与三个以相同角速度旋转着的矢量相对应，合矢量的模与合振动的振幅相对应，合矢量与 Ox 轴正向的夹角与合振动的初相位相对应。合振动仍为沿 x 方向的、频率相同的谐振动。

解：三个谐振动的振幅相同，因此旋转矢量图上的三个矢量 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$ 和 $\boldsymbol{A}_3$ 的模相等，又因三个谐振动间的初相差相等，故矢量 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$ 间和 $\boldsymbol{A}_2$、$\boldsymbol{A}_3$ 间的夹角相等，均为 $\Delta\phi=\pi/3$。$t=0$ 时刻的旋转矢量如解图 10-24(a)所示。

如解图 10-24(b)所示，矢量和 $\boldsymbol{A}$ 的模，即合振动的振幅为

$$A=2A_2=0.2\ \text{m}$$



解图 10-24

合振动的初相位，即 $t=0$ 时刻 $\boldsymbol{A}$ 与 Ox 轴正向的夹角为

$$\phi_0=\pi/2$$

合振动的表达式为

$$x=0.2\cos\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)\ (\text{m})$$

10-25. 当两个同方向的谐振动合成为一个振动时,其振动表式为

$$x=A\cos 2.1t\cos 50.0t$$

式中 t 以 s 为单位,x 以 m 为单位。求各分振动的角频率和合振动的拍的周期。

解:两个振幅同为 a、均沿 x 轴振动、振动角频率 ω_1 和 ω_2 很接近的谐振动,其合振动为

$$x=2a\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\cos(\bar{\omega}t+\phi_0)=A(t)\cos(\bar{\omega}t+\phi_0)$$

式中 $A(t)=2a\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$,是以角频率 $\frac{\Delta\omega}{2}=\frac{\omega_2-\omega_1}{2}$ 随时间缓慢变化的"合振幅"因子;$\bar{\omega}=\frac{\omega_2+\omega_1}{2}$ 为合振动的角频率。

对照合振动表达式,有

$$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}=2.1\ \text{rad/s},\quad \frac{\omega_2+\omega_1}{2}=50.0\ \text{rad/s}$$

解得

$$\omega_1=47.9\ \text{rad/s},\quad \omega_2=52.1\ \text{rad/s}$$

在"合振幅" $A(t)$ 变化的一个周期内,其模 $|A(t)|$ 变化两次,因此,拍的周期 τ 可由 $\frac{|\Delta\omega|}{2}\tau=\pi$ 解得,

$$\tau=\frac{2\pi}{|\Delta\omega|}=\frac{2\pi}{|\omega_2-\omega_1|}=1.5\ \text{s}$$

10-26. 一架钢琴的"中音 C"有些不准。为了校准的需要,取一标准的 256 Hz 音叉一起弹响,在 1 min 内听到 24 拍。试求待校正钢琴此键音的频率。

分析:利用"拍"现象校音。拍频为两同方向谐振动的频率之差,当两频率完全一致时,合振幅不随时间变化,"拍"现象消失。

解:设音叉振动的频率为 ν_1,待校键音的频率为 ν_2,由拍频

$$\nu_{拍}=|\nu_2-\nu_1|=\frac{24}{60}\ \text{Hz}=0.4\ \text{Hz}$$

得

$$\nu_2=\nu_1\pm 0.4\ \text{Hz}=(256\pm 0.4)\ \text{Hz}$$

待校键音的频率为 256.4 Hz 或 255.6 Hz。

*10-27. 设一质点的位移可用两个谐振动的叠加来表示:

$$x=A\sin\omega t+B\sin 2\omega t$$

(1) 写出这质点的速度和加速度表达式;(2) 这质点的运动是不是谐振动?

（3）画出其 $x-t$ 图线。

分析：质点的一般周期运动都可表示为不同振幅、不同角频率的谐振动之和。

解：（1）质点的速度为

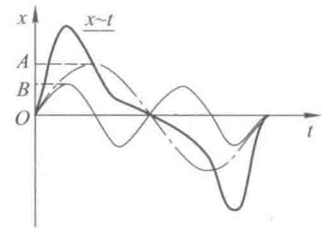
$$v=\frac{dx}{dt}=A\omega\cos\ \omega t+2B\omega\cos\ 2\omega t$$

质点的加速度为

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2\sin\ \omega t-4B\omega^2\sin\ 2\omega t$$
$$=-\omega^2[x+3B\sin\ 2\omega t]$$

（2）由于加速度 a 与质点的位移 x 不具备谐振动的特征：$a=-\omega^2x$，所以，质点不作谐振动。

（3）根据两个谐振动曲线画出的 $x-t$ 图线见解图 10-27。



解图 10-27

10-28. 质量为 0.1 kg 的质点同时参与互相垂直的两个振动，其振动表达式分别为

$$x=0.06\cos\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{3}\right)\quad(\text{SI 单位}),\quad y=0.03\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)\quad(\text{SI 单位})$$

求：（1）质点的运动轨迹；（2）质点在任一位置所受的作用力。

解：（1）质点的运动轨迹可由振动表达式消去参量 t 得到。对 t 作变换，令 $t'=t-\frac{1}{2}$，两振动表式可改写为

$$x=0.06\cos\left(\frac{\pi}{3}t'+\frac{\pi}{2}\right)=-0.06\sin\ \frac{\pi}{3}t',\quad y=0.03\cos\ \frac{\pi}{3}t'$$

将两式平方后相加，得质点的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{(0.06)^2}+\frac{y^2}{(0.03)^2}=1$$

质点的运动轨迹是一椭圆。

（2）质点运动的加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{j}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}$$

式中

$$a_x=0.06\times\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\sin\ \frac{\pi}{3}t'=-\left(\frac{\pi}{3}\right)^2x$$

$$a_y=-0.03\times\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\cos\frac{\pi}{3}t'=-\left(\frac{\pi}{3}\right)^2y$$

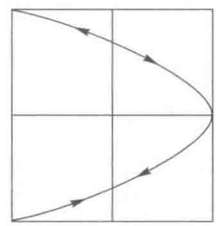
所以，有
$$\boldsymbol{a}=-\left(\frac{\pi}{3}\right)^2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})=-\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\boldsymbol{r}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 为质点的位置矢量。

则质点在任一位置所受的作用力的大小为

$$F=ma=m\sqrt{a_x^2+a_y^2}=0.11\sqrt{x^2+y^2}\ (\mathrm{N})$$

10-29. 在 20 cm×20 cm 的荧光屏上的李萨如图形，如习题 10-29 图所示。已知水平方向（x 方向）的振动为 50 Hz，$t=0$ 时的光点位于左下角。试写出 x、y 方向的谐振动方程。



习题 10-29 图

分析：图示稳定的李萨如图形是 x 方向和 y 方向的谐振动合成的轨迹，并且两方向振动的频率成整数比。当 x 方向完成一次完整振动时，y 方向完成半次振动。由此可确定它们的频率之比为 2∶1。由于李萨如图形的显示区域为正方形，因此可确定两互相垂直振动的振幅相等。根据初始时刻光点的位置，确定两振动的初相。

解：设 x 方向谐振动的角频率为 ω_x，y 方向谐振动的角频率为 ω_y，应有

$$\omega_x=2\omega_y$$

即

$$\omega_x=2\pi\nu_x=100\pi\ \mathrm{rad/s},\ \omega_y=2\pi\nu_y=50\pi\ \mathrm{rad/s}$$

设两互相垂直振动的振幅分别为 A_x 和 A_y，有

$$A_x=A_y=10\ \mathrm{cm}=0.1\ \mathrm{m}$$

设两振动的初相分别为 ϕ_{x0} 和 ϕ_{y0}，则 x、y 方向谐振动的表达式为

$$x=A_x\cos(\omega_xt+\phi_{x0})=0.1\cos(100\pi t+\phi_{x0})\ (\text{SI 单位})$$

$$y=A_y\cos(\omega_yt+\phi_{y0})$$
$$=0.1\cos(50\pi t+\phi_{y0})\ (\text{SI 单位})$$

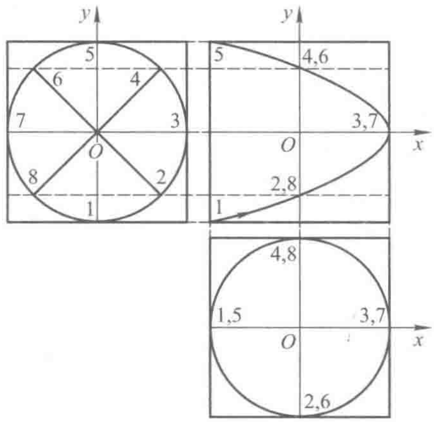
由于 $t=0$ 时，$x_0=-A_x=-0.1\ \mathrm{m}$，$v_{0x}=0$，$y_0=-A_y=-0.1\ \mathrm{m}$，$v_{y0}=0$，所以，有

$$\phi_{x0}=\phi_{y0}=\pi$$

由此可得 x、y 方向谐振动的表达式为

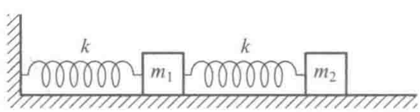
$$x=0.1\cos(100\pi t+\pi)\ (\mathrm{m})$$
$$y=0.1\cos(50\pi t+\pi)\ (\mathrm{m})$$

用旋转矢量合成的李萨如图形如解图 10-29 所示。



解图 10-29

10-30. 在工程上常常用多个弹簧振子的串联来描述一个实际的力学系统(习题 10-30 图所示),例如一列火车是多节车厢挂接在一起,每节车厢可看做是一个弹簧振子。分析由多个振子串联系统的运动是很有意义的工作。为简单起见,试对两个弹簧振子串联的振动作一描述。设两个振子的劲度系数相同均为 0.5 N/m,质量分别为 0.5 kg 和1 kg,(1) 写出两弹簧振子的运动方程;(2) 编写一计算机程序,求解该运动方程组并画出两弹簧振子的位移曲线图;(3) 从所得的结果是否可以判断两弹簧振子作什么性质的振动(周期振动或混沌)?

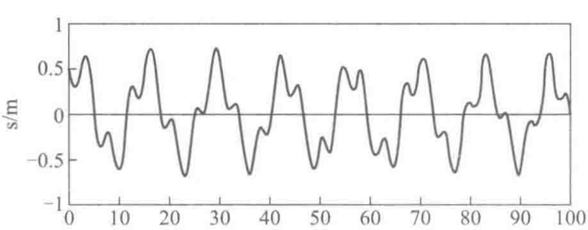


习题 10-30 图

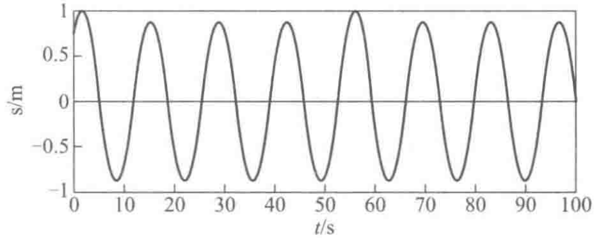
(1) $\mathrm{d}v_1/\mathrm{d}t = -k_1 * x_1/m_1 + k_2 * (x_2 - x_1)/m_1$;$\mathrm{d}v_2/\mathrm{d}t = k_2 * (x_1 - x_2)/m_2$

(2) 见解图 10-30。

(3) 是不同周期振动的叠加,线性方程所描写的系统是不可能产生混沌的。



(a) m_1的位移曲线



(b) m_2的位移曲线

解图 10-30

参考程序

```
% 两弹簧振子串联的振动分析
clear
global k1 k2 m1 m2;                          % 全局变量
k1=0.5;k2=0.5;m1=0.5;m2=1;                   % 两振子参量
v10=0.1;x10=0.5;v20=0.4;x20=0.4;             % 初时条件
y0=[x10 v10 x20 v20]';
tmax=100;                                    % 积分时间范围
tspan=[0 tmax];
[t,y]=ode23('lstc',tspan,y0);                % 解微分方程
subplot(2,1,1)
plot(y(:,1))                                 % 画出第一个振子的位移曲线
xlabel('时间(s)');ylabel('位移(m)');
subplot(2,1,2)
plot(y(:,3))                                 % 画出第二个振子的位移曲线
xlabel('时间(s)');ylabel('位移(m)');
function vx=lstc(t,y)
global k1 k2 m1 m2;
x1=y(1);v1=y(2);x2=y(3);v2=y(4);
                                             % y(1),y(2),y(3),y(4)分别为两振子的位移和速度
vx=[v1 -k1*x1/m1+k2*(x2-x1)/m1 v2 k2*(x1-x2)/m2]';
                                             % 写入运动方程
```

第十一章　机械波和电磁波

一、教学基本要求

1. 掌握建立平面简谐波波函数的方法和波函数的物理意义，理解波的能量传播特征。

2. 掌握描述波动的特征量和描述能量传播特征的物理量及其关系。

3. 理解惠更斯原理。

4. 理解波的叠加原理和相干波概念。理解波的干涉的相位差和波程差条件。理解驻波及其形成条件，驻波与行波的区别。

5. 理解机械波的多普勒效应。了解电磁波的多普勒效应。

6. 了解电磁波的产生及其性质。

二、本章习题分类

1. 波动的特征量和各量之间的关系
2. 已知有关物理量或波形曲线，建立波动表达式
3. 波的能量
4. 电磁波
5. 波的干涉和驻波
6. 多普勒效应

三、习题分析与解答

1. 波动的特征量和各量之间的关系

11-1. (1) 在标准状态下，声音在空气中的速率为 331 m/s，空气的比热容比 γ 是多少？(2) 地震造成的纵扰动 15 min 传播了 5 000 km，试估算传播扰动岩石的弹性模量。假定岩石的平均密度是 2 700 kg/m^3。(3) 人眼所能见到的光（可见光）的波长范围为 400 nm（属于紫光）至 760 nm（属于红光）。求可见光的频率范围（$1\ \text{nm} = 10^{-9}$ m）。

解：(1) 空气中声纵波的传播速率是温度的函数

$$u=\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

标准状态下,空气的比热容比 γ 为

$$\gamma=\frac{u^2M}{RT}=\frac{331^2\times29\times10^{-3}}{8.31\times273}=1.40$$

（2）由纵波的传播速率 $u=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$,得岩石的弹性模量 E 为

$$E=\rho u^2=2\ 700\times\left(\frac{5\ 000\times10^3}{15\times60}\right)^2\ \mathrm{N/m^2}=8.33\times10^{10}\ \mathrm{N/m^2}$$

（3）真空中,可见光的传播速率为 c,紫光频率为

$$\nu_1=\frac{c}{\lambda_1}=\frac{3\times10^8}{400\times10^{-9}}\ \mathrm{Hz}=7.50\times10^{14}\ \mathrm{Hz}$$

红光频率为

$$\nu_2=\frac{c}{\lambda_2}=\frac{3\times10^8}{760\times10^{-9}}\ \mathrm{Hz}=3.95\times10^{14}\ \mathrm{Hz}$$

11-2. 一横波沿波线传播时的波动表式为

$$y=0.05\cos(10\pi t-4\pi x)$$

x,y 的单位为 m,t 的单位为 s。(1) 求此波的振幅、波速、频率和波长;(2) 求波线上各质点振动的最大速度和最大加速度;(3) 求 $x=0.2$ m 处的质点在 $t=1$ s 时的相位,它是原点处质点在哪一时刻的相位?(4) 分别画出 $t=1$ s、1.25 s、1.50 s 各时刻的波形。

解:(1) 将波动表式　$y=0.05\cos(10\pi t-4\pi x)$

与
$$y=A\cos\left(2\pi\nu t-2\pi\frac{x}{\lambda}+\phi_0\right)$$

比较可得　$A=0.05\ \mathrm{m},\nu=5\ \mathrm{Hz},\lambda=0.5\ \mathrm{m}$

并有　$\omega=2\pi\nu=10\pi\ \mathrm{rad/s},\quad u=\lambda\nu=2.5\ \mathrm{m/s},\phi_0=0$

（2）各质点振动的最大速度为

$$v_{\mathrm{m}}=\omega A=0.5\pi\ \mathrm{m/s}=1.57\ \mathrm{m/s}$$

各质点振动的最大加速度为

$$a_{\mathrm{m}}=\omega^2A=5\pi^2\ \mathrm{m/s^2}=49.3\ \mathrm{m/s^2}$$

（3）$x=0.2$ m 处质点在 $t=1$ s 时的相位为

$$(10\pi t-4\pi x)\Big|_{\substack{t=1\ \mathrm{s}\\ x=0.2\ \mathrm{m}}}=(10\pi\times1-4\pi\times0.2)=9.2\pi$$

这是 t 时刻，坐标原点 $x=0$ 处质点的振动相位，即有

$$(10\pi t-4\pi x)\big|_{x=0}=10\pi t=9.2\pi$$

得
$$t=0.92\ \text{s}$$

所以，这是 $t=0.92$ s 时，$x=0$ 处质点的振动相位。

或
$$\Delta t=\frac{\Delta x}{u}=\frac{0.2}{2.5}\ \text{s}=0.08\ \text{s}$$

是 $\Delta t=0.08$ s 前，即 $(1-0.08)$ s $=0.92$ s 时，$x=0$ 处质点的振动相位。

(4) $t=1$ s 时的波动方程为

$$y=0.05\cos(10\pi-4\pi x)$$
$$=0.05\cos 4\pi x\ (\text{m})$$

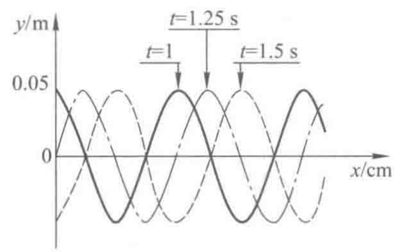
$t=1.25$ s 时的波动方程为

$$y=0.05\cos(12.5\pi-4\pi x)$$
$$=0.05\sin 4\pi x\ (\text{m})$$

$t=1.50$ s 时的波动方程为

$$y=0.05\cos(15\pi-4\pi x)$$
$$=-0.05\cos 4\pi x\ (\text{m})$$

各时刻的波形曲线如解图 11-2 所示。



解图 11-2

11-3. 设有一平面简谐波 $y=0.02\cos 2\pi\left(\frac{t}{0.01}-\frac{x}{0.3}\right)$，$x,y$ 以 m 为单位，t 以 s 为单位。(1) 求振幅、波长、频率和波速；(2) 求 $x=0.1$ m 处质点振动的初相位。

解：(1) 将波动表式

$$y=0.02\cos 2\pi\left(\frac{t}{0.01}-\frac{x}{0.3}\right)\ (\text{m})$$

与
$$y=A\cos\left(2\pi\nu t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\phi_0\right)$$

比较，可得　$A=0.02$ m，　$\lambda=0.3$ m，　$\nu=100$ Hz，　$\phi_0=0$

并有
$$u=\lambda\nu=30\ \text{m/s}$$

(2) $x=0.1$ m 处质点在 $t=0$ 时刻振动的初相位为

$$2\pi\left(\frac{0}{0.01}-\frac{0.1}{0.3}\right)=-\frac{2\pi}{3}$$

2. 已知有关物理量或波形曲线,建立波动表达式

11-4. 一平面简谐波沿 x 轴正向传播,振幅 $A=0.1$ m,频率 $\nu=10$ Hz,当 $t=1.0$ s 时,$x=0.1$ m 处的质点 a 的振动状态为 $y_a=0$,而 $v_a=\left(\dfrac{dy}{dt}\right)_a<0$;此时 $x=0.2$ m 处的质点 b 的振动状态为 $y_b=5.0$ cm,$v_b>0$。若 a、b 两质点的间距小于一个波长。求波的表达式。

分析:t 时刻质点 a 和 b 的振动状态给出了两质点在该时刻的相位,由此解得 ϕ_0 和 λ。

解:设波的表式为

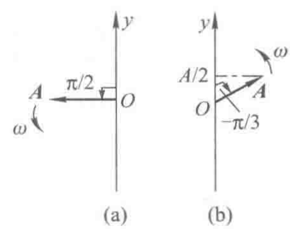
$$y=A\cos\left(2\pi\nu t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\phi_0\right)=0.1\cos\left(20\pi t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\phi_0\right)\ \text{(SI 单位)}$$

将 $x_a=0.1$ m 代入波的表式,得质点 a 的振动表式为

$$y_a=0.1\cos\left(20\pi t-\frac{0.2\pi}{\lambda}+\phi_0\right)\ \text{(m)}$$

$t=1.0$ s 时,$y_a=0$,$v_a=\left(\dfrac{dy}{dt}\right)_a<0$,质点 a 由平衡位置向位移的负方向运动,旋转矢量如解图 11-4(a)所示,有

$$\phi_a=20\pi\times1.0-\frac{0.2\pi}{\lambda}+\phi_0=\left(20-\frac{0.2}{\lambda}\right)\pi+\phi_0=\frac{\pi}{2}\tag{1}$$



解图 11-4

将 $x_b=0.2$ m 代入波的表式,得质点 b 的振动表式为

$$y_b=0.1\cos\left(20\pi t-\frac{0.4\pi}{\lambda}+\phi_0\right)\ \text{(m)}$$

$t=1.0$ s 时,$y_b=5.0$ cm,$v_b>0$,质点 b 的旋转矢量如解图 11-4(b)所示,有

$$\phi_b=20\pi\times1.0-\frac{0.4\pi}{\lambda}+\phi_0=\left(20-\frac{0.4}{\lambda}\right)\pi+\phi_0=-\frac{\pi}{3}\tag{2}$$

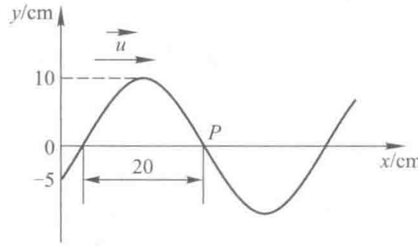
由(1)式、(2)式可解得

$$\lambda=0.24\ \text{m},\quad \phi_0=-\frac{2}{3}\pi$$

所以,波的表式为

$$y=0.1\cos\left(20\pi t-\frac{25\pi}{3}x-\frac{2}{3}\pi\right)\ \text{(m)}$$

11-5. 已知一沿 x 轴正向传播的平面余弦波在 $t=1/3$ s 时的波形如习题 11-5 图所示，且周期 $T=2$ s。(1) 写出坐标原点和 P 点的振动表达式；(2) 写出该波的波动表达式。



习题 11-5 图

分析：将波形曲线沿传播方向稍作平移，由坐标原点和 P 点的振动状态（位移和振动速度）确定这两点在 $t=1/3$ s 时的相位及其初相，从而确定各点的振动表达式和波动表达式。

解：由波形曲线可得

$$A=10\ \text{cm}=0.1\ \text{m},\quad \lambda=40\ \text{cm}=0.4\ \text{m}$$

并有

$$u=\lambda/T=0.2\ \text{m/s},\quad \omega=2\pi/T=\pi\ \text{rad/s}$$

(1) 设波动表达式为 $y=A\cos\left[\omega\left(t-\dfrac{x}{u}\right)+\phi_0\right]$

将波形曲线沿传播方向稍作平移可得：坐标原点和 P 点的振动状态分别为：

$$y\left(0,\frac{1}{3}\right)=-\frac{A}{2},\quad v\left(0,\frac{1}{3}\right)<0 \text{ 和 } y\left(P,\frac{1}{3}\right)=0,\quad v\left(P,\frac{1}{3}\right)>0$$

由旋转矢量图可知，$t=1/3$ s 时坐标原点的相位为 $2\pi/3$，有

$$\omega\left(t-\frac{x_0}{u}\right)+\phi_0=\pi\times\frac{1}{3}+\phi_0=\frac{2}{3}\pi$$

得坐标原点的振动初相 $\phi_0=\pi/3$

所以，坐标原点的振动表达式为 $y_0=0.1\cos\left(\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)$ (SI 单位)

$t=1/3$ s 时，P 点的振动相位为 $-\pi/2$，有

$$\omega\left(t-\frac{x_P}{u}\right)+\phi_0=\pi\times\left(\frac{1}{3}-\frac{x_P}{20}\right)+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}$$

解得 $x_P=0.233$ m

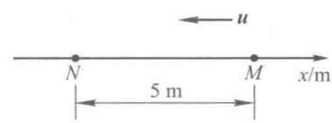
将以上数值代入波动表达式，得 P 点的振动表达式

$$y_P=0.1\cos\left(\pi t-\frac{5\pi}{6}\right)\ (\text{m})$$

(2) 波动表达式为

$$y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\phi_0\right]=0.1\cos\left[\pi(t-5x)+\frac{\pi}{3}\right]\ (\text{m})$$

11-6. 一平面波在介质中以速度 $u=20$ m/s 沿 x 轴负方向传播，已知 M 点的振动表达式为 $y_M=3\cos 4\pi t$，t 的单位为 s，y 的单位为 m。(1) 以 M 为 Ox 坐标原点写出波动表达式；(2) 以距 M 点 5 m 处的 N 点为 $O'x'$ 坐标原点，写出波动表达式。



习题 11-6 图

解：由 M 点的振动表达式可得，$\omega=2\pi\nu=4\pi\ \mathrm{s^{-1}}$，$\nu=2$ Hz，$\lambda=u/\nu=10$ m。

(1) 以 M 为坐标原点，沿 Ox 轴反向传播的波动表达式为

$$y=3\cos 4\pi\left(t+\frac{x}{20}\right)\ (\text{SI 单位})$$

(2) 将 $x=-5$ m 代入上式，得 N 点的振动表达式

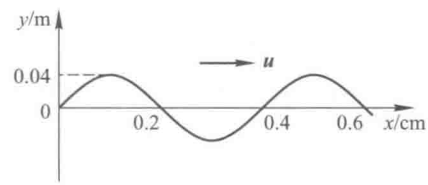
$$y_N=3\cos\left(4\pi t-4\pi\times\frac{5}{20}\right)=3\cos(4\pi t-\pi)\ (\mathrm{m})$$

N 距 M 点半个波长，与 M 点的振动相位相反。

以 N 点为 $O'x'$ 坐标原点，沿 $O'x'$ 轴反向传播的波动表达式为

$$y=3\cos\left[4\pi\left(t+\frac{x'}{20}\right)-\pi\right]\ (\mathrm{m})$$

11-7. 一平面简谐波在 $t=0$ 时的波形曲线如习题 11-7 图所示，波速 $u=0.08$ m/s。(1) 写出该波的波动表达式；(2) 画出 $t=T/8$ 时的波形曲线。



习题 11-7 图

解：(1) 由波形曲线可知 $A=0.04$ m，$\lambda=0.4$ m。由 $u=\lambda\nu$，得 $\nu=0.2$ Hz，$\omega=2\pi\nu=0.4\pi$ rad/s。$t=0$ 时，$x=0$ 处质点的运动状态为 $y(0,0)=0$，$v(0,0)<0$。根据旋转矢量图可知，$\phi_0=\pi/2$。所以，坐标原点处质点的振动表达式为

$$y_0(t)=A\cos(\omega t+\phi_0)=0.04\cos\left(0.4\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\ (\text{SI 单位})$$

波动表达式为

$$y(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\phi_0\right]=0.04\cos\left[0.4\pi\left(t-\frac{x}{0.08}\right)+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=0.04\cos\left(0.4\pi t-5\pi x+\frac{\pi}{2}\right)\ (\mathrm{m})$$

（2）在波的传播过程中，相位保持不变，有

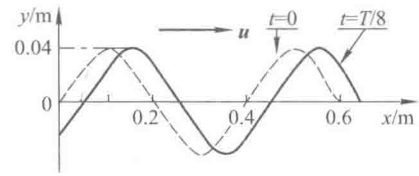
$$\Delta\left(\omega t-\omega\frac{x}{u}\right)=0$$

即
$$\Delta t-\frac{\Delta x}{u}=0$$

$\Delta t=T/8$ 时，有

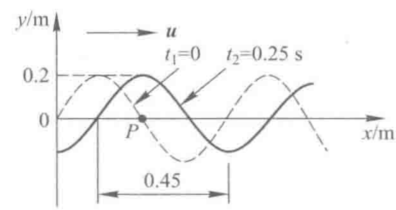
$$\Delta x=u\Delta t=\lambda\nu\frac{T}{8}=\frac{\lambda}{8}$$

所以，将波形曲线沿传播方向平移 $\lambda/8$ 即为 $t=T/8$ 时的波形曲线，如解图 11-7 所示。



解图 11-7

11-8. 一列沿 x 正向传播的简谐波，已知 $t_1=0$ 和 $t_2=0.25$ s 时的波形如习题 11-8 图所示。试求（1）P 的振动表达式；（2）此波的波动表达式；（3）画出坐标原点的振动曲线。



习题 11-8 图

解：从波形图可得波的振幅为

$$A=0.2\ \text{m}$$

根据相距为 $\Delta x=0.45$ m 两质点的相位差为 $\Delta\phi=3\pi/2$ 可得波长为

$$\lambda=\frac{2\pi}{\Delta\phi}|\Delta x|=0.6\ \text{m}$$

已知波形曲线平移 $\lambda/4$ 的时间间隔为 $\Delta t=0.25$ s，得振动周期和振动频率为

$$T=\frac{\Delta t}{|\Delta x|}\lambda=1\ \text{s},\quad \nu=\frac{1}{T}=1\ \text{Hz}$$

波的传播速度为 $$u=\lambda\nu=0.6\ \text{m/s}$$

（1）$t=0$ 时，P 点的振动状态为 $y(P,0)=0$，$v(P,0)>0$。由旋转矢量图可知，$\phi_{0P}=-\pi/2$。所以，P 点的振动表达式为

$$y_P=0.2\cos\left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\ （\text{SI 单位}）$$

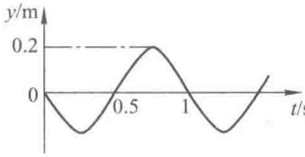
（2）$t=0$ 时，坐标原点的振动状态为 $y(0,0)=0$，$v(0,0)<0$。由旋转矢量图可知，$\phi_{00}=\pi/2$。所以，坐标原点的振动表式为

$$y_0=0.2\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\ （\text{m}）$$

波动表达式为

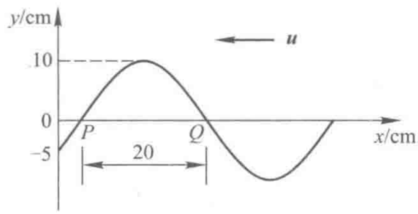
$$y=0.2\cos\left[2\pi\left(t-\frac{x}{0.6}\right)+\frac{\pi}{2}\right]\ (\mathrm{m})$$
$$=0.2\cos\left(2\pi t-\frac{10}{3}\pi x+\frac{\pi}{2}\right)\ (\mathrm{m})$$

(3) 坐标原点的振动曲线 $y_0(t)$ 如解图 11-8 所示。



解图 11-8

11-9. 已知一沿 x 轴负方向传播的平面余弦波，在 $t=1/3$ s 时的波形如习题 11-9 图所示，且周期 $T=2$ s。(1) 写出坐标原点的振动表达式；(2) 写出此波的波动表达式；(3) 写出 Q 点的振动表达式。



习题 11-9 图

解：由波形曲线可得 $A=10\ \mathrm{cm}=0.1\ \mathrm{m}$，$\lambda=40\ \mathrm{cm}=0.4\ \mathrm{m}$，并有 $u=\lambda/T=0.2\ \mathrm{m/s}$，$\omega=2\pi/T=\pi\ \mathrm{rad/s}$。

(1) 设波动表式为

$$y=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)+\phi_0\right]$$

将波形曲线沿传播方向稍作平移可知：$y\left(0,\frac{1}{3}\right)=-\frac{A}{2}$，$v\left(0,\frac{1}{3}\right)>0$。利用旋转矢量图可得，$t=1/3$ s 时坐标原点的振动相位为 $-2\pi/3$，有

$$\omega\left(t+\frac{x_0}{u}\right)+\phi_0=\pi\times\frac{1}{3}+\phi_0=-\frac{2}{3}\pi$$

得坐标原点的振动初相

$$\phi_0=-\pi$$

所以，坐标原点的振动表达式为

$$y_0=0.1\cos(\pi t-\pi)\ (\text{SI 单位})$$

(2) 波动表达式为

$$y=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)+\phi_0\right]=0.1\cos\left[\pi\left(t+\frac{x}{20}\right)-\pi\right]\ (\mathrm{m})$$

(3) $t=1/3$ s 时 Q 点的振动状态为：$y\left(Q,\frac{1}{3}\right)=0$，$v\left(Q,\frac{1}{3}\right)<0$，其振动相位为 $\pi/2$，有

$$\omega\left(t+\frac{x_Q}{u}\right)+\phi_0=\left[\pi\times\left(\frac{1}{3}+\frac{x_Q}{20}\right)-\pi\right]=\frac{\pi}{2}$$

解得 $$x_Q = 0.233\ \text{m}$$

将 x_Q、ϕ_0代入波动表达式，得 Q 点的振动表达式

$$y_Q = 0.1\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\ (\text{m})$$

3. 波的能量

11-10. 一正弦式声波，沿直径为 0.14 m 的圆柱形管行进，波的强度为 $9.0\times10^{-3}\ \text{W/m}^2$，频率为 300 Hz，波速为 300 m/s。问：(1) 波中的平均能量密度和最大能量密度是多少？(2) 每两个相邻的、相位差为 2π 的同相面间有多少能量？

解：(1) 波中的平均能量密度为

$$\overline{w} = \frac{I}{u} = \frac{9.0\times10^{-3}}{300}\ \text{J/m}^3 = 3.0\times10^{-5}\ \text{J/m}^3$$

最大能量密度为

$$w_m = 2\overline{w} = 6.0\times10^{-5}\ \text{J/m}^3$$

(2) 每两个相邻的、相位差为 2π 的同相面间的能量为

$$W = \overline{w}V = \overline{w}\lambda S = \overline{w}\ \frac{u}{\nu}\pi r^2 = 4.62\times10^{-7}\ \text{J}$$

11-11. 一平面简谐声波的频率为 500 Hz，在空气中以速度 $u = 340$ m/s 传播。到达人耳时，振幅 $A = 10^{-4}$ cm，试求人耳接收到声波的平均能量密度和声强（空气的密度 $\rho = 1.29\ \text{kg/m}^3$）。

解：人耳接收到声波的平均能量密度为

$$\overline{w} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 = 6.37\times10^{-6}\ \text{J/m}^3$$

人耳接收到声波的声强为

$$I = \overline{w}u = 2.16\times10^{-3}\ \text{W/m}^2$$

11-12. 一波源以 35 000 W 的功率向空间均匀发射球面电磁波，在某处测得波的平均能量密度为 $7.8\times10^{-15}\ \text{J/m}^3$。求该处离波源的距离。电磁波的传播速度为 3.0×10^8 m/s。

分析：电磁波在真空中传播时能量无损耗，通过以波源为中心的球面（面积 $A = 4\pi r^2$）的平均功率与波源的平均辐射功率相等。

解：以波源到测量处的距离 r 为半径作球面，单位时间内通过整个球面的能

量为

$$\overline{P}=\overline{S}\cdot A=\overline{S}\cdot 4\pi r^2$$

得

$$r=\sqrt{\frac{\overline{P}}{4\pi\overline{w}u}}=\sqrt{\frac{35\ 000}{4\pi\times7.8\times10^{-15}\times3\times10^{8}}}\ \mathrm{m}=3.45\times10^{4}\ \mathrm{m}$$

11-13. 一扬声器的膜片,半径为 0.1 m,使它产生 1 kHz、40 W 的声辐射,则膜片的振幅应多大？已知该温度下空气的密度为 1.29 kg/m³,声速为 344 m/s。

解:设圆形扬声器膜片的面积为 S,平均声辐射功率(平均能流)为 $\overline{P}$,则膜片单位面积的平均辐射功率(声强)为

$$I=\frac{\overline{P}}{S}=\frac{\overline{P}}{\pi r^2}$$

由 $I=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$,得膜片的振幅为

$$\begin{aligned}A&=\sqrt{\frac{2I}{\rho\omega^2 u}}=\sqrt{\frac{2\overline{P}}{\rho\omega^2 u\pi r^2}}\\&=\sqrt{\frac{2\times40}{1.29\times(2\pi\times1\ 000)^2\times344\times\pi\times0.1^2}}\ \mathrm{mm}=0.38\ \mathrm{mm}\end{aligned}$$

11-14. 两人轻声说话时的声强级为 40 dB,闹市中的声强级为 80 dB,问闹市中的声强是轻声说话时声强的多少倍？

解:由声强级 I_L与声强 I 的关系 $I_L=10\lg\frac{I}{I_0}$,得声强级为 I_L时的声强为

$$I=I_0\ 10^{\frac{I_L}{10}}$$

设闹市中的声强为 I_1,两人轻声说话时的声强为 I_2,则闹市中的声强与轻声说话时声强的比值为

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{I_0\ 10^{\frac{I_{L1}}{10}}}{I_0\ 10^{\frac{I_{L2}}{10}}}=\frac{10^{\frac{80}{10}}}{10^{\frac{40}{10}}}=10^{\frac{80-40}{10}}=10^4\ 倍$$

11-15. 距一点声源 10 m 的地方,声音的声强级是 20 dB。若不计介质对声波的吸收,求:(1) 距离声源 5.0 m 处的声强级;(2) 距声源多远,声音

就听不见了。

解:介质中某处的声强正比于该处质点振动振幅的平方,即 $I\propto A^2$。对球面波,有 $A\propto A_0/r$,即 $I\propto A^2\propto\dfrac{A_0^2}{r^2}$。设 10 m 处的声强为 I_{10},5.0 m 处的声强为 I_5,有

$$\frac{I_5}{I_{10}}=\frac{A_5^2}{A_{10}^2}=\frac{r_{10}^2}{r_5^2}=\frac{10^2}{5^2}=4$$

(1) 由声强级的定义,可得距离声源 5.0 m 处的声强级 I_{L5} 为

$$I_{L5}=10\ \lg\frac{I_5}{I_0}=10\ \lg\left(\frac{I_5}{I_{10}}\times\frac{I_{10}}{I_0}\right)$$

$$=I_{L10}+10\ \lg\frac{I_5}{I_{10}}=20+10\ \lg 4=26\ (\text{dB})$$

式中 I_{L10} 为距离声源 10 m 处的声强级。

(2) 设距声源 x 处的声强为 I_x,应有

$$\frac{I_x}{I_{10}}=\frac{A_x^2}{A_{10}^2}=\frac{r_{10}^2}{r_x^2}=\frac{10^2}{x^2}$$

设 x 处的声强级 I_{Lx} 为

$$I_{Lx}=10\ \lg\frac{I_x}{I_0}=10\ \lg\left(\frac{I_x}{I_{10}}\times\frac{I_{10}}{I_0}\right)$$

$$=I_{L10}+10\ \lg\frac{I_x}{I_{10}}=20+10\ \lg\left(\frac{10}{x}\right)^2$$

在 x 处听不见声音,可令 $I_{Lx}=0$ dB,得 $\lg x=2$ 解得

$$x=100\ \text{m}$$

11-16. 一扬声器发出的声波,在 6 m 远处的强度为 $1.0\times10^{-3}\ \text{W/m}^2$,频率是 2 000 Hz,设没有反射,而且扬声器向各方向均匀地发射。(1) 在 30 m 处的声强为多大?(2) 6.0 m 处的位移振幅为多大?(3) 6.0 m 处的压强振幅为多大?

解:设扬声器向各方向均匀地发射球面波。

(1) 设距扬声器 30 m 和 6 m 处的声强分别为 I_{30} 和 I_6,有

$$\frac{I_{30}}{I_6}=\frac{A_{30}^2}{A_6^2}=\frac{r_6^2}{r_{30}^2}=\frac{6^2}{30^2}=\frac{1}{25}$$

式中 A_{30} 和 A_6 分别为距扬声器 30 m 和 6 m 处的声波振幅。距扬声器 30 m 处的声强为

$$I_{30}=\frac{1}{25}I_6=\frac{1}{25}\times1.0\times10^{-3}\ \mathrm{W/m^2}=4.0\times10^{-5}\ \mathrm{W/m^2}$$

（2）根据声强与位移振幅的关系 $I=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2u$，有

$$I_6=\frac{1}{2}\rho A_6^2\omega^2u$$

距扬声器 6 m 处的位移振幅为

$$A_6=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2I_6}{\rho u}}=\frac{1}{2\times3.14\times2\ 000}\sqrt{\frac{2\times1.0\times10^{-3}}{1.29\times331}}\ \mathrm{m}=1.72\times10^{-7}\ \mathrm{m}$$

（3）根据声强与压强振幅的关系 $I=\frac{p_m^2}{2\rho u}$，有

$$I_6=\frac{p_{m6}^2}{2\rho u}$$

6.0 m 处的压强振幅为

$$p_{m6}=\sqrt{2\rho uI_6}=\sqrt{2\times1.29\times331\times1.0\times10^{-3}}\ \mathrm{N/\ m^2}=0.924\ \mathrm{N/\ m^2}$$

11-17. 两个频率相同的声源，一个在空气中传播，另一个在水中传播声波。（1）如果两个声波的强度相等，它们的声压振幅之比是多少？（2）如果两个声波的声压振幅相等，它们的声强比是多少？（3）它们的声强级之差是多少？（已知空气密度 $\rho_1=1.29\ \mathrm{kg/m^3}$，水的密度 $\rho_2=1.0\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$，声波在空气中的速度 $u_1=340\ \mathrm{m/s}$，声波在水中的速度 $u_2=1\ 490\ \mathrm{m/s}$。）

解：简谐声波的强度为

$$I=\frac{1}{2}\frac{p_m^2}{\rho u}$$

式中 $p_m=\rho uA\omega$ 为声压振幅。声波在空气中和在水中传播时声强的比值为

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{(p_m)_1^2(\rho u)_2}{(p_m)_2^2(\rho u)_1}$$

式中
$$\frac{(\rho u)_2}{(\rho u)_1}=\frac{1\times10^3\times1\ 490}{1.29\times340}=3.40\times10^3$$

是水和空气的特性阻抗之比。

（1）当两简谐声波强度相等时，$I_1=I_2$，声压振幅之比为

$$\frac{p_{m2}}{p_{m1}}=\sqrt{\frac{(\rho u)_2}{(\rho u)_1}}=\sqrt{3.40\times10^3}=58.3$$

（2）当两简谐声波声压振幅相等时，$p_{m1}=p_{m2}$，其声强之比为

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{(\rho u)_1}{(\rho u)_2}=\frac{1}{3.40\times10^{3}}=2.94\times10^{-4}$$

（3）设声波在空气中的声强级为 I_{L1}，在水中的声强级为 I_{L2}，它们的声强级之差为

$$I_{L1}-I_{L2}=10\lg\frac{I_1}{I_0}-10\lg\frac{I_2}{I_0}=10\lg\frac{I_1}{I_2}$$

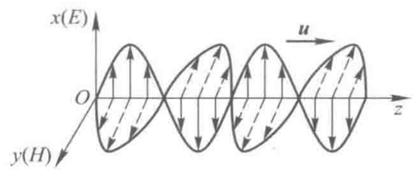
$$=10\lg\frac{1}{2.94\times10^{-4}}=35.4\ (\mathrm{dB})$$

4. 电磁波

11-18. 如习题 11-18 图所示，一个平面电磁波在真空中传播，设某点的电场强度为

$$E_x=900\cos\left(2\pi\nu t+\frac{\pi}{6}\right)\ (\mathrm{SI}\ 单位)$$

试求这一点的磁场强度表示式。又在该点前方 a 和该点后方 a 处（均沿 z 轴计算），电场强度和磁场强度的表达式各如何？



习题 11-18 图

*分析：平面电磁波在空间各点 **E** 和 **H** 的相位相同，**E**、**H** 和波的传播方向遵循右手螺旋定则，并满足幅值关系。*

解： 电场强度的振幅为 $E_0=900\ \mathrm{V/m}$，由平面电磁波 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的量值关系可知，空间各点（包括这一点）磁场强度的振幅为

$$H_0=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0=\sqrt{\frac{8.85\times10^{-12}}{4\pi\times10^{-7}}}\times900\ \mathrm{A/m}=2.39\ \mathrm{A/m}$$

磁场强度沿 y 方向振动，与 x 方向的电场振动同相位。所以，这一点的磁场强度表示式为

$$H_y=H_0\cos\left(2\pi\nu t+\frac{\pi}{6}\right)=2.39\cos\left(2\pi\nu t+\frac{\pi}{6}\right)\ \mathrm{A/m}$$

在该点前方 a 处的电场强度为

$$E_{x1}=900\cos\left[2\pi\nu\left(t-\frac{a}{c}\right)+\frac{\pi}{6}\right]\ (\mathrm{SI}\ 单位)$$

磁场强度为

$$H_{y1}=2.39\cos\left[2\pi\nu\left(t-\frac{a}{c}\right)+\frac{\pi}{6}\right]\ (\mathrm{A/m})$$

在该点后方 a 处的电场强度为

$$E_{x2}=900\cos\left[2\pi\nu\left(t+\frac{a}{c}\right)+\frac{\pi}{6}\right]\ (\mathrm{V/m})$$

磁场强度为

$$H_{y2}=2.39\cos\left[2\pi\nu\left(t+\frac{a}{c}\right)+\frac{\pi}{6}\right]\ (\mathrm{A/m})$$

11-19. 在地球上测得太阳的平均辐射强度 $\overline{S}=1.4\times10^{3}\ \mathrm{W/m^2}$。设太阳到地球的平均距离约为 1.5×10^{11} m,试求太阳的总辐射能量。若太阳光垂直照射某物体表面而被全部反射,试求该物体所受的辐射压力。

解:以太阳到地球的平均距离 $\overline{r}$ 为半径作球面,单位时间内通过该球面的太阳总辐射能为

$$\overline{P}=4\pi\overline{r}^{2}\overline{S}=3.96\times10^{26}\ \mathrm{W}$$

太阳光被物体全部反射时,物体单位面积所受的辐射压力为

$$p=\frac{2\overline{S}}{c}=9.33\times10^{-6}\ \mathrm{Pa}$$

11-20. 有一氦氖激光管,它所发射的激光功率为 10 mW。设发出的激光为圆柱形光束,圆柱截面的直径为 2 mm。试求激光的最大电场强度 E_0 和磁感应强度 B_0。

解:激光的平均辐射强度为

$$\overline{S}=\frac{\overline{P}}{\pi(d/2)^2}=\frac{10\times10^{-3}}{\pi\times(1\times10^{-3})^2}\ \mathrm{W/m^2}=3.18\times10^{3}\ \mathrm{W/m^2}$$

由
$$\overline{S}=\frac{1}{2}E_0H_0=\frac{E_0^2}{2\mu_0c}$$

得
$$E_0=\sqrt{2\mu_0c\overline{S}}=\sqrt{2\times4\pi\times10^{-7}\times3\times10^{8}\times3.18\times10^{3}}\ \mathrm{V/m}=1.55\times10^{3}\ \mathrm{V/m}$$

$$B_0=\mu_0H_0=\mu_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0=\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}E_0=\frac{E_0}{c}=5.17\times10^{-6}\ \mathrm{T}$$

11-21. 一雷达发射装置发出一圆锥形的辐射束,而辐射能量是均匀分布于

锥内各方向的。圆锥顶的立体角为 0.01 sr，距发射装置 1 km 处的电场强度的最大值 E_0是 10 V/m。试求：(1) 磁场强度的最大值 H_0；(2) 这圆锥体内的最大辐射功率。

分析：将距离发射装置 1 km 处的电磁波视为平面电磁波。

解：(1) 由真空中平面电磁波的幅值关系，得磁场强度最大值为

$$H_0=\frac{E_0}{\mu_0 c}=\frac{10}{4\pi\times10^{-7}\times3\times10^{8}}\ \mathrm{A/m}=2.65\times10^{-2}\ \mathrm{A/m}$$

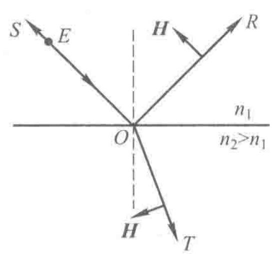
(2) 圆锥体内的最大辐射功率，即单位时间内流经圆锥对应球冠面积的最大能流。为

$$P_0=S_0A$$

式中 S_0为坡印廷矢量模的最大值，$S_0=E_0H_0$，A 为圆锥对应的球冠面积，$A=\Omega r^2$。所以，有

$$P_0=S_0A=E_0H_0\Omega r^2=2.65\times10^{3}\ \mathrm{W}$$

11-22. 一束平面单色光 SO，从折射率为 n_1的介质射向折射率为 n_2的介质($n_2>n_1$)，在分界面上的入射点 O 处分解成一束反射光 OR 和一束透射光 OT，已知入射光的 $\boldsymbol{E}$ 矢量垂直于入射面，反射光和透射光的 $\boldsymbol{H}$ 矢量均在入射面内，方向如习题 11-22 图所示。试标出反射光和透射光的 $\boldsymbol{E}$ 矢量方向。



习题 11-22 图

若入射的平面单色光在 O 点的振动表式为 $E=E_0\cos(\omega t+\phi)$，试写出在入射点处 O 反射光(振幅为 E_R)和透射光(振幅为 E_T)的振动表式。

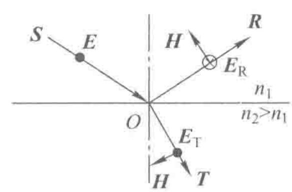
分析：由 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 确定在 O 点的反射光和透射光中 $\boldsymbol{E}$ 矢量的振动方向，$\boldsymbol{S}$ 为坡印廷矢量。当光波以很小或很大角度由光疏介质射向光密介质而反射时，在反射点 O 的反射光振动与该点入射光的振动反相，发生 π 的相位突变，即“半波损失”。

解：由 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 得 $\boldsymbol{E}_R$和 $\boldsymbol{E}_T$的方向，如解图 11-22 所示。在 O 点处的反射光振动表达式为

$$E_{反}=E_R\cos(\omega t+\phi+\pi)$$

在 O 点处的透射光振动相对入射光无“半波损失”。故有

$$E_{透}=E_T\cos(\omega t+\phi)$$



解图 11-22

5. 波的干涉和驻波

11-23. 设 S_1 和 S_2 为两相干波源，相距 $\lambda/4$，S_1 的相位比 S_2 的相位超前 $\pi/2$。若两波在 S_1、S_2 连线方向上的强度相同均为 I_0，且不随距离变化，问 S_1、S_2 连线上在 S_1 外侧各点的合成波的强度如何？又在 S_2 外侧各点的强度如何？

解：波的强度正比于振幅的平方 $I\propto A^2$，两波在 S_1、S_2 连线上的强度相同，因而振幅也相同，设为 A_0。在波线上距波源 r 处振动的相位为

解图 11-23

$$\phi=\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}r+\phi_0$$

两相干波在 r 处振动的相位差为

$$\Delta\phi=\phi_2-\phi_1=\frac{2\pi}{\lambda}(r_1-r_2)+(\phi_{02}-\phi_{01})$$

当 $\Delta\phi=\pm 2k\pi$，$k=0,1,2,3,\cdots$ 时，合振动加强；当 $\Delta\phi=\pm(2k+1)\pi$，$k=0,1,2,3,\cdots$ 时，合振动减弱。

令波程差对应的相位差为 $\Delta\phi_1$，两相干波的初相差为 $\Delta\phi_2$，在 r 处振动的相位差为

$$\Delta\phi=\Delta\phi_1+\Delta\phi_2$$

式中
$$\Delta\phi_1=\frac{2\pi}{\lambda}(r_1-r_2),\ |r_1-r_2|=\frac{\lambda}{4}$$

$$\Delta\phi_2=\phi_{02}-\phi_{01}=-\frac{\pi}{2}$$

对 S_1 外侧各点，有
$$\Delta\phi'=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\pi$$

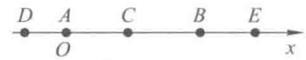
对 S_2 外侧各点，有
$$\Delta\phi''=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$$

所以，S_1 外侧各点的振动反相，合振幅 $A_1=0$，合成波的强度 $I_1=0$。S_2 外侧各点的振动同相，合振幅 $A_2=2A_0$，合成波的强度 $I_2=4I_0$。

11-24. 同一介质中的两个波源位于 A、B 两点，其振幅相等，频率都是 100 H_Z，相位差为 π。若 A、B 两点相距为 30 m，波在介质中的传播速度为 400 m/s，试求 AB 连线上因干涉而静止的各点位置。

分析：在 A、B 连线上，两相干波的传播方向相反，在干涉相消点，振动的相位差为 π 的奇数倍。

解:设波源 A 的初相 $\phi_{0A}=0$,则 B 的初相为 $\phi_{0B}=\pm\pi$。已知 $\lambda=u/\nu=4\ \text{m}$,$\omega=2\pi\nu=400\pi\ \text{rad/s}$,$L=30\ \text{m}$。取坐标轴 Ox 如解图 11-24 所示。两波在 AB 连线间任意 C 点的振动相位分别为



解图 11-24

$$\phi_A=\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

和
$$\phi_B=\omega\left(t+\frac{x-L}{u}\right)\pm\pi$$

使 C 点因干涉而静止的相位差为

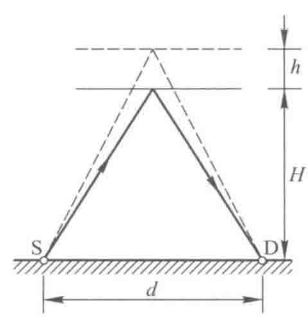
$$\begin{aligned}\Delta\phi&=\phi_B-\phi_A\\&=\frac{2\pi}{\lambda}(2x-L)\pm\pi=\pm(2k+1)\pi,\quad k=0,1,2,\cdots,7\end{aligned}$$

解得
$$x=\pm k\frac{\lambda}{2}+\frac{L}{2}=(\pm2k+15)\ \text{m},\quad k=0,1,2,\cdots,7$$

AB 连线间因干涉而静止的点距 A 点为 $(1,3,5,\cdots,29)\text{m}$,共 15 个。

在 A、B 连线上,两波在 A、B 两点外侧的传播方向相同,各点(如 D、E 点)因同相而振动加强。

11-25. 地面上波源 S 与高频率波探测器 D 之间的距离为 d,从 S 直接发出的波与从 S 发出经高度为 H 的水平层反射后的波,在 D 处加强,反射线及入射线与水平层所成的角度相同。当水平层逐渐升高 h 距离时,在 D 处测不到信号。不考虑大气的吸收。试求此波源 S 发出波的波长。



习题 11-25 图

分析:波源 S 发出的波,经不同的传播路径后在 D 处相遇,形成 D 处的振动加强或减弱的干涉现象。

解:设 S 发出的波,经 H 层反射至 D 处的波程为 d_1,经 $(H+h)$ 层反射至 D 处的波程为 d_2,直达 D 处的波程为 d。

直达波与经 H 层反射后的波在 D 处干涉加强,波程差为

$$\delta_1=d_1-d=k\lambda$$

经 $(H+h)$ 层反射至 D 处无信号,即干涉相消,波程差为

$$\delta_2=d_2-d=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

波程差的变化为　　$\Delta\delta=\delta_2-\delta_1=d_2-d_1=\dfrac{\lambda}{2}$

由几何关系,得

$$\frac{d_1}{2}=\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+H^2},\quad \frac{d_2}{2}=\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+(H+h)^2}$$

解得波长为

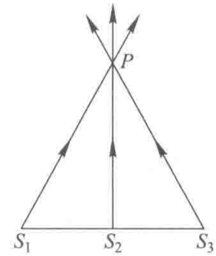
$$\lambda=2\left[\sqrt{4(H+h)^2+d^2}-\sqrt{4H^2+d^2}\right]$$

11-26. 如习题 11-26 图所示,三个同频率、振动方向相同(垂直纸面)的简谐波,在传播过程中于 P 点相遇。若三个简谐波各自单独在 S_1、S_2 和 S_3 的振动表式分别为

$$y_1=A\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y_2=A\cos\ \omega t$$

$$y_3=A\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$



习题 11-26 图

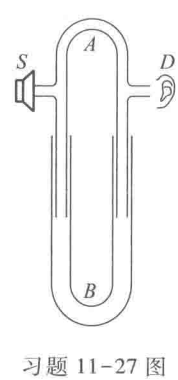
如 $S_2P=4\lambda$,$S_1P=S_3P=5\lambda$(λ 为波长)。求 P 点的合振动表式(设传播过程中各波的振幅不变)。

分析:S_1 和 S_3 的振动反相,到达 P 点的波程相同,在 P 点的合振动相消。P 点的振动由 S_2 引起。

解:在 P 点处,S_1 和 S_3 的振动反相,振幅相同的两振动叠加后完全抵消。由 S_2 引起的振动为

$$y_p=y_{2p}=A\cos\ \omega\left(t-\frac{S_2P}{u}\right)=A\cos(\omega t-8\pi)=A\cos\ \omega t$$

11-27. 习题 11-27 图为声音干涉仪,用以演示声波的干涉。S 处为扬声器,D 处为声音探测器,如耳或话筒。路径 SBD 的长度可以变化,但路径 SAD 是固定的。干涉仪内有空气,且知声音强度在 B 的第一位置时为极小值 100 单位。而渐增至 B 距第一位置为 0.016 5 m 的第二位置时,有极大值 900 单位。求:(1) 声源发出的声波频率;(2) 抵达探测器的两波的相对振幅(设声波在传播过程中振幅不变)。



习题 11-27 图

分析:S 发出的声波经不同的波程传至 D 处相干叠加,在 B 的第一位置,D 处有强度不为零干涉极小,在 B 的第二位

置，D 处有干涉极大。表明两路声波在 D 处振动的振幅是不相等的。

解:(1) B 在第一位置时 D 处干涉极小，有

$$\delta_1=(2k-1)\frac{\lambda}{2}$$

设 B 移动了 d，在第二位置时 D 处出现干涉极大，有

$$\delta_2=\delta_1+2d=k\lambda$$

波程差的变化为

$$\Delta\delta=\delta_2-\delta_1=2d=\frac{\lambda}{2}$$

声波频率为

$$\nu=\frac{u}{\lambda}=\frac{u}{4d}=\frac{331}{6.6\times10^{-2}}=5\ 015\ \text{Hz}$$

(2) 设抵达 D 的两相干波振幅分别为 A_1 和 A_2，干涉相消和干涉相长时的声强分别为 I_1 和 I_2。由 $I\propto A^2$，有

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{|A_1-A_2|^2}{(A_1+A_2)^2}$$

得
$$\frac{|A_1-A_2|}{A_1+A_2}=\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}=\sqrt{\frac{100}{900}}=\frac{1}{3}$$

可得两波的相对振幅为

$$A_1:A_2=2:1$$

11-28. 两个波在一很长的弦线上传播。设其波动表式为

$$y_1=0.06\cos\frac{\pi}{2}(0.020x-8.0t)\quad(\text{SI 单位})$$

$$y_2=0.06\cos\frac{\pi}{2}(0.020x+8.0t)\quad(\text{SI 单位})$$

求:(1) 合成波的表达式;(2) 波节和波腹的位置。

解:将两波表达式与 $y=A\cos\left(\omega t\mp\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ 比较可得

$$\omega=4\pi\ \text{rad/s},\quad \lambda=200\ \text{m}$$

(1) 将两波表达式相加，得合成波

$$y=y_1+y_2=\left(2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t$$
$$=0.12\cos 0.01\pi x\cos 4\pi t$$

合成波是驻波。

(2) 驻波的波节和波腹的位置由 $|0.12\cos 0.01\pi x|$ 确定。

在波节处，有　$\cos 0.01\pi x=0, 0.01\pi x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

波节位置为　$x=50(2k+1)\ \text{m},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

在波腹处，有　$|\cos 0.01\pi x|=1,\quad 0.01\pi x=k\pi$

波腹位置为　$x=100k\ \text{m},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

11-29. 若在弦线上的驻波表达式为

$$y=0.2\sin 2\pi x\cos 20\pi t\ (\text{SI 单位})$$

求形成该驻波的两行波的表达式。

分析：写出两列传播方向相反的相干波的一般表达式，将其合成后与已知驻波表达式作比较，解得两波表达式。

解：设两相干波的表达式分别为　$y_1=A\cos\left(\omega t-\dfrac{2\pi}{\lambda}x+\phi_{10}\right)$

和

$$y_2=A\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x+\phi_{20}\right)$$

合成波为　$y=y_1+y_2=2A\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}x+\dfrac{\phi_{20}-\phi_{10}}{2}\right)\cos\left(\omega t+\dfrac{\phi_{20}+\phi_{10}}{2}\right)$

将上式与已知驻波表达式比较，有

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{\phi_{20}-\phi_{10}}{2}\right)=\sin 2\pi x,\quad \cos\left(\omega t+\frac{\phi_{20}+\phi_{10}}{2}\right)=\cos 20\pi t,\quad 2A=0.2\ \text{m}$$

解得 $A=0.1\ \text{m}, \omega=20\pi\ \text{rad/s}, \lambda=1\ \text{m}$，并 $\dfrac{\phi_{20}-\phi_{10}}{2}=-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\phi_{20}+\phi_{10}}{2}=0$，因此

$$\phi_{10}=\frac{\pi}{2},\quad \phi_{20}=-\frac{\pi}{2}$$

所以，两行波表达式分别为

$$y_1=0.1\cos\left(20\pi t-2\pi x+\frac{\pi}{2}\right)\quad (\text{SI 单位})$$

和

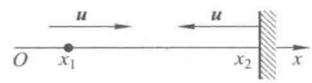
$$y_2=0.1\cos\left(20\pi t+2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)\quad (\text{SI 单位})$$

11-30. 在一根弦线上，有一列沿 x 轴正方向传播的简谐波，其频率 $\nu=50$ Hz，振幅 $A=0.04$ m，波速 $u=100$ m/s。已知弦线上离坐标原点 $x_1=0.5$ m 处的质点在

$t=0$ 时刻的位移为$+A/2$,且沿 y 轴负方向运动。当传播到 $x_2=10$ m 处固定端时,被全部反射。试写出:(1) 入射波和反射波的波动表达式;(2) 入射波与反射波叠加的合成波在 $0\leqslant x\leqslant 10$ m 区间内波腹和波节处各点的坐标。

分析:根据已知质点的振动状态推出坐标原点处质点的振动后,可写出入射波的表达式;利用入射波在反射点的振动表式,再考虑反射时的相位突变,并推出坐标原点处质点由反射波引起的振动表式,可得到反射波的表达式;入射波和反射波叠加,相干形成驻波。

解:沿弦线取坐标 Ox,如解图 11-30 所示。已知 $\omega=2\pi\nu=100\pi$ rad/s,$\lambda=u/\nu=2$ m。



解图 11-30

(1) 设原点处质点的初相为 ϕ_0,入射波为

$$y_{\text{入}}=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\phi_0\right]$$

在 $x_1=0.5$ m 处,由 $y(0.5,0)=\dfrac{A}{2}$,$v(0.5,0)<0$,得该质点的振动初相为 $\phi_0'=\dfrac{\pi}{3}$。

有
$$\phi_0'=\left[\omega\left(t_0-\frac{x_1}{u}\right)+\phi_0\right]=\left(-\frac{100\pi\times 0.5}{100}+\phi_0\right)=\frac{\pi}{3}$$

得
$$\phi_0=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5}{6}\pi$$

入射波表达式为

$$y_{\text{入}}=0.04\cos\left[100\pi\left(t-\frac{x}{u}\right)+\frac{5\pi}{6}\right]=0.04\cos\left[100\pi t-\pi x+\frac{5\pi}{6}\right]\ \text{(m)}$$

在 x_2处,入射波的振动表达式为

$$y_{\text{入}}(x_2,t)=0.04\cos\left[100\pi\left(t-\frac{x_2}{u}\right)+\frac{5\pi}{6}\right]=0.04\cos\left[100\pi\left(t-\frac{10}{100}\right)+\frac{5\pi}{6}\right]$$

$$=0.04\cos\left[100\pi t+\frac{5\pi}{6}\right]\ \text{(m)}$$

在 x_2处,反射波有半波损失,振动表达式为

$$y_{\text{反}}(x_2,t)=0.04\cos\left[100\pi t+\frac{5\pi}{6}+\pi\right]=0.04\cos\left[100\pi t+\frac{11\pi}{6}\right]\ \text{(m)}$$

反射波传至坐标原点处需时 $\Delta t=\dfrac{|x_2|}{u}$,由反射波引起的振动表达式为

$$y_{\text{反}}(0,t)=0.04\cos\left[100\pi\left(t-\frac{|x_2|}{u}\right)+\frac{11\pi}{6}\right]=0.04\cos\left[100\pi t+\frac{11\pi}{6}\right]\ \text{(m)}$$

反射波的表达式为

$$y_{反}=0.04\cos\left[100\pi\left(t+\frac{x}{u}\right)+\frac{11\pi}{6}\right]=0.04\cos\left[100\pi t+\pi x+\frac{11\pi}{6}\right]\ (\mathrm{m})$$

(2) 将入射波和反射波的表达式改写为

$$y_{入}=0.04\cos\left[100\pi t-\pi x+\frac{5\pi}{6}\right]=0.04\cos\left[\left(100\pi t+\frac{4\pi}{3}\right)-\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)\right]\ (\mathrm{m})$$

$$y_{反}=0.04\cos\left[100\pi t+\pi x+\frac{11\pi}{6}\right]=0.04\cos\left[\left(100\pi t+\frac{4\pi}{3}\right)+\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)\right]\ (\mathrm{m})$$

合成波为

$$y=y_{入}+y_{反}=0.08\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(100\pi t+\frac{4\pi}{3}\right)\ (\mathrm{m})$$

形成驻波。

波腹和波节的坐标决定于驻波表达式中的振幅因子$\left|\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)\right|$。

当$\left|\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=1$，有

$$\pi x+\frac{\pi}{2}=k\pi$$

在 $0\leqslant x\leqslant 10$ m 区间内，有

$$x=k-\frac{1}{2},\quad k=1,2,\cdots,10$$

波腹的坐标为(0.5,1.5,2.5,3.5,4.5,5.5,6.5,7.5,8.5,9.5) m。

当$\left|\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=0$，有

$$\pi x+\frac{\pi}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

在 $0\leqslant x\leqslant 10$ m 区间内，有

$$x=k,\quad k=0,1,2,\cdots,10$$

波节的坐标为(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) m。

11-31. 在一个两端固定的 3.0 m 的弦上激起一个驻波，该驻波有 3 个波腹，其振幅为 1.0 cm，弦上的波速为 100 m/s。(1) 试计算该驻波的频率；(2) 试写出产生此驻波的两个行波的表达式。

解：(1) 相邻两波节的间距为$\frac{\lambda}{2}$，弦线长度

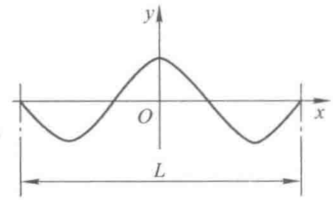
$$L=n\frac{\lambda}{2}=3\times\frac{\lambda}{2}$$

得
$$\lambda=\frac{2L}{3}=2\ \text{m}$$

由波速 $u=\lambda\nu$,得
$$\nu=\frac{u}{\lambda}=50\ \text{Hz}$$

(2) 在弦线上取坐标系 Oxy,并设 $t=0$ 时弦上波形如解图 11-31 所示。设两行波表达式分别为

$$y_1=A\cos\left[2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right)+\phi_{01}\right]\text{ 和}$$
$$y_2=A\cos\left[2\pi\left(\nu t+\frac{x}{\lambda}\right)+\phi_{02}\right]$$



解图 11-31

合成波为
$$y=y_1+y_2=2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{\phi_{02}-\phi_{01}}{2}\right)\cos\left(2\pi\nu t+\frac{\phi_{02}+\phi_{01}}{2}\right)$$

由 $t=0$ 时弦上波形可知:$2A=1.0\ \text{cm}$,$\dfrac{\phi_{02}-\phi_{01}}{2}=\dfrac{\phi_{02}+\phi_{01}}{2}=0$

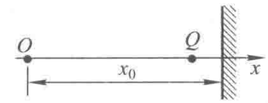
得
$$A=0.5\ \text{cm},\quad \phi_{01}=\phi_{02}=0$$

所以,两行波表达式分别为
$$y_1=0.5\cos\pi(100t-x)\ (\text{SI 单位})$$
和
$$y_2=0.5\cos\pi(100t+x)\ (\text{SI 单位})$$

11-32. 一平面简谐波沿 x 轴正方向传播,在 $t=0$ 时,原点 O 处质元的振动是经过平衡位置向负方向运动。在距离原点 O 为 $x_0=\dfrac{11}{4}\lambda$ 处有波密介质反射面,波被垂直界面反射。设入射波和反射波的振幅都为 A,频率为 ν。试求:(1) 入射波和反射波的波动表达式;(2) 合成波的波动表达式;(3) 在原点到反射面间各个波节和波腹点的坐标;(4) 距反射面为$\dfrac{1}{6}\lambda$ 的 Q 点处质元的合振动的表达式。

分析:根据 $t=0$ 时 O 处质元的振动状态,写出入射波的表达式;再由入射波经界面反射回到 O 处的相位变化和反射时的相位突变,得到反射波在 O 点的振动,进而写出反射波的表达式(也可通过相位变化逐步求得,如题 11-30 解法)。两波合成为驻波,反射点为波节。将 Q 点的坐标代入合成波表达式,即得 Q 点合振动的表达式。

解:取 Ox 轴如解图 11-32 所示。根据 O 处质元振动的初始状态:$y(0,0)=0,v(0,0)<0$,可得　$\phi_0=\dfrac{\pi}{2}$



解图 11-32

(1) 入射波的表达式为

$$y_{入}=A\cos\left[2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right)+\frac{\pi}{2}\right]$$

入射波经反射并附加了 π 相位突变回到 O 点,相位的变化为

$$\frac{2\pi}{\lambda}(2x_0)+\pi=12\pi$$

反射波在 O 点的振动,就是 O 处质元从振动开始后相位变化 12π 后的状态,所以

$$y_{反}(0,t)=A\cos\left(2\pi\nu t-12\pi+\frac{\pi}{2}\right)=A\cos\left(2\pi\nu t+\frac{\pi}{2}\right)$$

反射波的表达式为　$y_{反}=A\cos\left[2\pi\left(\nu t+\dfrac{x}{\lambda}\right)+\dfrac{\pi}{2}\right]$

(2) 合成波的波动表达式为

$$y=y_{入}+y_{反}=2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\left(2\pi\nu t+\frac{\pi}{2}\right)$$

合成波为驻波。

(3) 波腹满足条件 $\dfrac{2\pi x}{\lambda}=k\pi$,即

$$x=\frac{1}{2}k\lambda,\ k=0,1,2,3,4,5$$

在 $[0,x_0]$ 区间,波腹的坐标为 $0,\dfrac{\lambda}{2},\lambda,\dfrac{3\lambda}{2},2\lambda,\dfrac{5\lambda}{2}$。

波节满足条件 $\dfrac{2\pi x}{\lambda}=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$,即

$$x=(2k+1)\frac{\lambda}{4},\ k=0,1,2,3,4,5$$

在 $[0,x_0]$ 区间,波节的坐标为 $\dfrac{\lambda}{4},\dfrac{3\lambda}{4},\dfrac{5\lambda}{4},\dfrac{7\lambda}{4},\dfrac{9\lambda}{4},\dfrac{11\lambda}{4}$。

(4) 将 Q 点的坐标 $x_Q=\left(\dfrac{11}{4}-\dfrac{1}{6}\right)\lambda=\dfrac{31}{12}\lambda$ 代入驻波表达式,得 Q 点的合振动为

$$\begin{aligned}y(x_Q,t)&=2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{31\lambda}{12}\right)\cos\left(2\pi\nu t+\frac{\pi}{2}\right)\\&=2A\cos\frac{31}{6}\pi\sin 2\pi\nu t=\sqrt{3}A\sin 2\pi\nu t\end{aligned}$$

6. 多普勒效应

11-33. (1) 火车以 90 km/h 的速度行驶,其汽笛的频率为 500 Hz。一个人站在铁轨旁,当火车从他身旁驶过时,他听到的汽笛声的频率变化是多大?设声速为 340 m/s。

(2) 若此人坐在汽车里,而汽车在铁轨旁的公路上以 54 km/h 的速率迎着火车行驶。试问此人听到汽笛声的频率为多大?

分析:当波源 S 和观察者 R 相对静止介质沿两者的连线运动时,观察者接收到的频率由 $\nu_R=\frac{u+v_R}{u-v_S}\nu_S$ 给出。当观察者接近波源运动时,单位时间内接收到的完整波数增多;当波源接近观察者运动时,静止介质中的波长变短。在这两种情况下 v_S 和 v_R 取正值,反之则取负值。

解:声波在空气中的传播速率为 u,波源的频率(汽笛)为 ν_S,波源(火车)运动的速率为

$$v_S=\frac{90\times10^3}{3\ 600}\ \mathrm{m/s}=25\ \mathrm{m/s}$$

观察者的运动速率为

$$v_R=\frac{54\times10^3}{3\ 600}\ \mathrm{m/s}=15\ \mathrm{m/s}$$

当波源和观察者沿两者的连线运动时,观察者接收到的频率为 $\nu_R=\frac{u+v_R}{u-v_S}\nu_S$

(1) 观察者不动 $v_R=0$,火车向着观察者运动,$v_S>0$,观察者接收到的频率为

$$\nu_1=\left(\frac{u}{u-v_S}\right)\nu_S=\left(\frac{340}{340-25}\right)\times500\ \mathrm{Hz}=540\ \mathrm{Hz}$$

当火车离观察者而去时,$v_S<0$,观察者接收到的频率为

$$\nu_2=\left(\frac{340}{340+25}\right)\times500\ \mathrm{Hz}=466\ \mathrm{Hz}$$

观察者接收到的频率变化为

$$\Delta\nu=\nu_1-\nu_2=74\ \mathrm{Hz}$$

(2) 汽车迎着火车,两者相对接近时,$v_R>0$,$v_S>0$,车中的观察者接收到的频率为

$$\nu=\frac{u+v_R}{u-v_S}\nu_S=\frac{340+15}{340-25}\times500\ \mathrm{Hz}=563.5\ \mathrm{Hz}$$

11-34. 正在报警的警钟，每隔 0.5 s 钟响一声，一声接一声地响着。有一个人在以 60 km/h 的速度向警钟行驶的火车中，问这个人在 1 min 内听到几响？

解：设声音在空气中的传播速率为 $u=340\ \mathrm{m/s}$，相对空气静止的警钟（波源）频率为

$$\nu_{\mathrm{S}}=\frac{1}{T}=2\ \mathrm{Hz}$$

观察者（火车中的人）接近警钟的速率为

$$v_{\mathrm{R}}=\frac{60\ 000}{3\ 600}\ \mathrm{m/s}=16.7\ \mathrm{m/s}$$

观察者接收到的频率为

$$\nu_{\mathrm{R}}=\frac{u+v_{\mathrm{R}}}{u}\nu_{\mathrm{S}}=\frac{340+16.7}{340}\times 2\ \mathrm{Hz}=2.1\ \mathrm{Hz}$$

这个人在 1 min 内听到报警钟响的次数为

$$N=\nu_{\mathrm{R}}\times 60=126\ 次$$

11-35. 蝙蝠利用超声脉冲导航可以在洞穴中飞来飞去。若蝙蝠发射的超声频率为 39 kHz，在朝着表面平坦的墙壁飞扑的期间，它的运动速率为空气中声速的 1/40。试问蝙蝠接收到的反射脉冲的频率是多少？

分析：蝙蝠作为运动声源接近墙壁时，墙壁振动的频率高于蝙蝠发射的频率，这是由于空气中的波长变短。蝙蝠作为运动的观察者接收来自墙壁的反射波时，接收到的频率又高于墙壁的振动频率，这是由于蝙蝠在接近墙壁的运动中，单位时间内接收到的完整波数增多了。

解：设空气中的声速为 340 m/s，蝙蝠的运动速率为 340/40 m/s = 8.5 m/s。蝙蝠在朝着墙壁飞扑的过程中，墙壁作为接收器接收到的振动频率为

$$\nu_{\mathrm{R1}}=\frac{u}{u-v_{\mathrm{S}}}\nu_{\mathrm{S}}=\frac{340}{340-8.5}\times 39\times 10^{3}\ \mathrm{Hz}=40\times 10^{3}\ \mathrm{Hz}$$

蝙蝠接收到墙壁反射脉冲的频率为

$$\nu_{\mathrm{R2}}=\frac{u+v_{\mathrm{R}}}{u}\nu_{\mathrm{R1}}=\frac{340+8.5}{340}\times 40\times 10^{3}\ \mathrm{Hz}=41\times 10^{3}\ \mathrm{Hz}$$

11-36. 一声源的频率为 1 080 Hz，相对于地以 30 m/s 的速率向右运动。在其右方有一反射面相对于地面以 65 m/s 的速率向左运动。设空气中的声速为 331 m/s。求：(1) 声源在空气中发出声音的波长；(2) 每秒钟到达反射面的波数；(3) 反射波的速率；(4) 反射波的波长。

分析：运动反射面作为观察者，其接收到的频率为运动声源相对运动观察者接近时，观察者接收到的频率。

解：(1) 在运动声源前方空气分子的振动频率为

$$\nu_1=\frac{u}{u-v_S}\nu_S=\frac{331}{331-30}\times 1\ 080\ \text{Hz}=1\ 188\ \text{Hz}$$

在运动声源前方空气中的波长为

$$\lambda_1=\frac{u}{\nu_1}=\frac{u-v_S}{\nu_S}=\frac{331-30}{1\ 080}\ \text{m}=0.28\ \text{m}$$

在运动声源后方空气分子的振动频率为

$$\nu_1'=\frac{u}{u-(-v_S)}\nu_S=\frac{331}{331+30}\times 1\ 080\ \text{Hz}=990\ \text{Hz}$$

在运动声源后方空气中的波长为

$$\lambda_1'=\frac{u}{\nu_1'}=\frac{u+v_S}{\nu_S}=\frac{331+30}{1\ 080}\ \text{m}=0.33\ \text{m}$$

(2) 每秒到达反射面的波数，即运动着的反射面“接收”到的频率，为

$$\nu_R=\frac{u+v_R}{u-v_S}\nu_S=\frac{331+65}{331-30}\times 1\ 080\ \text{Hz}=1\ 421\ \text{Hz}$$

(3) 反射波的速率即反射波在空气中的传播速度，为

$$u=331\ \text{m/s}$$

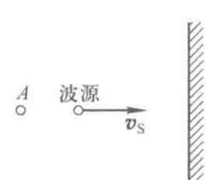
(4) 反射波的波长为　　$$\lambda_2=\frac{u-v_R}{\nu_R}=\frac{331-65}{1\ 421}\text{m}=0.187\ \text{m}$$

11-37. 试计算：

(1) 一波源 S(振动的频率为 2 040 Hz) 以速度 v_S 向一反射面接近(见习题 11-37 图)，观察者在 A 点听得拍音频率为 $\Delta\nu=3$ Hz，求波源移动的速度 v_S，设声速为 340 m/s。

(2) 若(1)中波源没有运动，而反射面以速度 $v=0.20$ m/s 向观察者 A 接近。所听得的拍音频率为 $\Delta\nu=4$ Hz，求波源的频率。

分析：运动波源接近固定反射面而背离观察者时，A 点的观察者既接收到直接来自波源的声波，也接收到来自固定反射面的声波，两声波在 A 点的振动合成为拍。



习题 11-37 图

当波源相对观察者静止，而反射面接近波源和观察者时，观察者接收到直接来自波源的声波频率无多普勒效应，但反射面反射的频率和观察者接收到的反射波频率都

发生多普勒效应。因而两个不同频率的振动在 A 点也将合成为拍。

解:(1) 波源远离观察者而去,观察者接收到来自波源的声波频率为

$$\nu_{R1}=\frac{u}{u-(-v_S)}\nu_S=\frac{u}{u+v_S}\nu_S$$

观察者相对反射面静止,接收到来自反射面的声波频率 ν_{R2},就是固定反射面接收到的声波频率,这时的波源以 v_S 接近反射面。

$$\nu_{R2}=\frac{u}{u-v_S}\nu_S$$

A 处观察者听到的拍频为 $$\Delta\nu=|\nu_{R2}-\nu_{R1}|=\frac{u}{u-v_S}\nu_S-\frac{u}{u+v_S}\nu_S=\frac{2uv_S\nu_S}{u^2-v_S^2}$$

可得方程为 $$\Delta\nu v_S^2+2u\nu_S v_S-\Delta\nu u^2=0$$

解方程,得 $$v_S=\frac{u\nu_S}{\Delta\nu}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\Delta\nu}{\nu_S}\right)^2}-1\right)$$

因为 $\Delta\nu\ll\nu_S$,故有 $$v_S=\frac{u\nu_S}{\Delta\nu}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\nu}{\nu_S}\right)^2+\cdots-1\right)$$

$$=\frac{u\Delta\nu}{2\nu_S}=\frac{340\times3}{2\times2\ 040}\ \text{m/s}=0.25\ \text{m/s}$$

(2) 波源相对观察者静止,波源直接传向观察者的声波频率就是波源的频率

$$\nu'_{R1}=\nu_S$$

反射面接近固定波源时,接收到的声波频率为(相当于观察者)

$$\nu'=\frac{u+v}{u}\nu_S$$

式中 v 为反射面接近波源的速率。

观察者接收到运动反射面的反射波频率为(反射面相当于波源接近观察者)

$$\nu'_{R2}=\frac{u}{u-v}\nu'=\frac{u+v}{u-v}\nu_S$$

A 处观察者听到的拍频为

$$\Delta\nu'=|\nu'_{R2}-\nu'_{R1}|=\frac{u+v}{u-v}\nu_S-\nu_S=\frac{2v}{u-v}\nu_S$$

得波源的频率为

$$\nu_S=\frac{u-v}{2v}\Delta\nu'=\frac{340-0.2}{2\times0.2}\times4\ \text{Hz}=3\ 398\ \text{Hz}$$

11-38. 一固定的超声波探测器,在海水中发出一束频率 $\nu=30\ 000\ \mathrm{Hz}$ 的超声波,被向着探测器驶来的潜艇反射回来,反射波与原来的波合成后,得到频率为 241 Hz 的拍。求潜艇的速率。设超声波在海水中的波速为 1 500 m/s。

分析:潜艇接近固定的超声波探测器时,接收到的频率有多普勒效应。同时,潜艇作为运动的反射波源,探测器接收到的反射波频率仍有多普勒效应。所以,探测器接受到的超声波和自身发射超声波的振动合成为拍。

解:设潜艇接近波源的速率为 v,接收到的频率为

$$\nu_R=\frac{u+v}{u}\nu_S$$

潜艇以速率 v 接近探测器并反射频率为 ν_R 的超声波,探测器接收到的频率为

$$\nu_R'=\frac{u}{u-v}\nu_R=\frac{u}{u-v}\frac{u+v}{u}\nu_S=\frac{u+v}{u-v}\nu_S$$

反射波与发射波的合振动为拍,拍频为

$$\Delta\nu=|\nu_R'-\nu_S|=\frac{u+v}{u-v}\nu_S-\nu_S=\frac{2v}{u-v}\nu_S$$

潜艇速率为 $$v=\frac{u\Delta\nu}{2\nu_S+\Delta\nu}=\frac{1\ 500\times241}{2\times30\ 000+241}\ \mathrm{m/s}=6\ \mathrm{m/s}$$

第十二章　光　　学

一、教学基本要求

1. 掌握几何光学的基本定律,理解近轴光线成像的规律和分析方法。

2. 掌握对杨氏双缝干涉和薄膜等厚干涉光程差的分析方法,确定干涉条纹位置的规律。理解半波损失概念。了解迈克耳孙干涉仪的工作原理。

3. 理解惠更斯-菲涅耳原理,掌握用半波带法分析单缝夫琅禾费衍射的条纹位置。

4. 掌握光栅方程,理解缝宽对光栅衍射光强的影响。

5. 理解衍射对光学仪器分辨本领的影响.了解晶体的X射线衍射。

6. 掌握马吕斯定律和布儒斯特定律,了解双折射现象。

二、本章习题分类

1. 几何光学
2. 双缝干涉条纹的计算
3. 薄膜干涉条纹的计算
4. 单缝衍射和光栅衍射
5. 光学仪器的分辨率
6. 晶体的X射线衍射
7. 光的偏振
8. 双折射现象

三、习题分析与解答

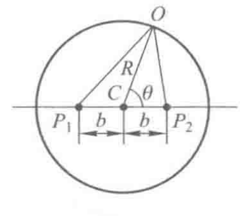
1. 几何光学

12-1. 一半径为 R 的反射球面内,P_1、P_2 为球内相对于球心 C 对称的两点,与球心间的距离为 b。设光线自 P_1 发出经球面上 O 点反射后经过 P_2 点。试利用费马原理计算 θ 为何值时,P_1O+OP_2 的光程为极小。(θ 为半径 OC 与 CP_2 之间的夹角。)

分析：从 P_1 点发出，经球面上 O 点反射到 P_2 点的实际光线，光程取所有可能光线光程的极值。

解： 取反射球面上的任意点 O，如解图 12-1 所示。由图可得 P_1OP_2 的光程为

$$[P_1OP_2]=[P_1O]+[OP_2]$$
$$=(b^2+R^2+2bR\cos\theta)^{1/2}+(b^2+R^2-2bR\cos\theta)^{1/2}$$



解图 12-1

根据费马原理，经球面反射的实际光线的光程 $[P_1OP_2]$ 应满足

$$\frac{\mathrm{d}[P_1OP_2]}{\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{2}\frac{2bR(-\sin\theta)}{(b^2+R^2+2bR\cos\theta)^{1/2}}+\frac{1}{2}\frac{-2bR(-\sin\theta)}{(b^2+R^2-2bR\cos\theta)^{1/2}}=0$$

即要求 $\cos\theta=0$，得 $\theta=\pm90°$；或 $\sin\theta=0$，得 $\theta=0,\pi$。这是自 P_1 发出的、能够经球面反射到 P_2 点的实际光线的可取路径。

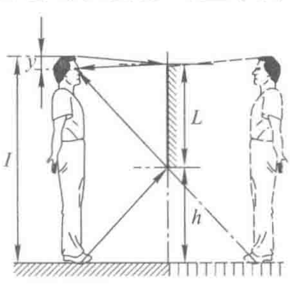
12-2. 一个人身高 1.8 m，如果此人能够从铅直平面镜中看到自己的全身，这个平面镜的最小长度为多少？如何放置？试作图表示之。假设他的眼睛位于头顶下方 10 cm 处。

分析：根据光的反射定律，自头顶和脚发出的光线，经平面镜反射后若能进入此人的眼睛，他就可以看到自己全身的像。

解： 设人的身高为 l，头顶到眼睛的距离为 y，平面镜的长度为 L，置于离地 h 高度。利用光的反射定律，作光路如解图 12-2 所示。由图示几何关系，可得

$$L+h=l-\frac{1}{2}y=(1.8-0.05)\ \mathrm{m}=1.75\ \mathrm{m}$$

$$h=\frac{1}{2}(l-y)=\frac{1.8-0.1}{2}\ \mathrm{m}=0.85\ \mathrm{m}$$



解图 12-2

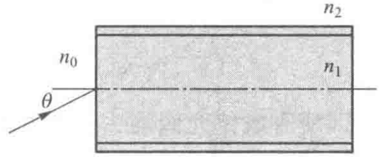
平面镜的最小长度为

$$L=1.75\ \mathrm{m}-h=0.9\ \mathrm{m}$$

为此人之半身高。将镜置于离地 $h=0.85$ m 高度处，能从镜中看到自己的全身。

12-3. 设光导纤维内层材料的折射率 n_1，外层材料的折射率 $n_2(n_1>n_2)$。光纤外介质的折射率为 n_0，如习题 12-3 图所示。若使光线能在纤维中传播，其最大的入射角为多大？

解：设光线在纤维端面的最大入射角为 θ_M，折射角为 θ'，在内、外层材料界面发生全反射时的临界角为 i_c，如解图 12-3 所示。根据折射定律，有

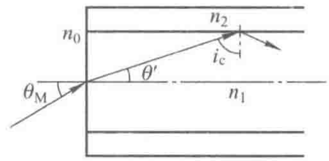


习题 12-3 图

$$n_0\sin\theta_M=n_1\sin\theta'$$

根据全反射条件，有

$$n_0\sin i_c=n_2,\quad \theta'=\frac{\pi}{2}-i_c$$



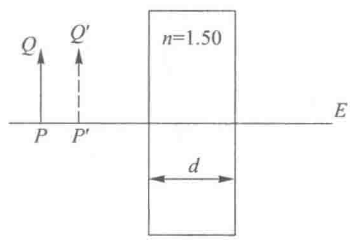
解图 12-3

可解得

$$n_0\sin\theta_M=n_1\cos i_c=\sqrt{n_1^2-n_1^2\sin^2 i_c}=\sqrt{n_1^2-n_2^2}$$

即
$$\theta_M=\arcsin\frac{\sqrt{n_1^2-n_2^2}}{n_0}$$

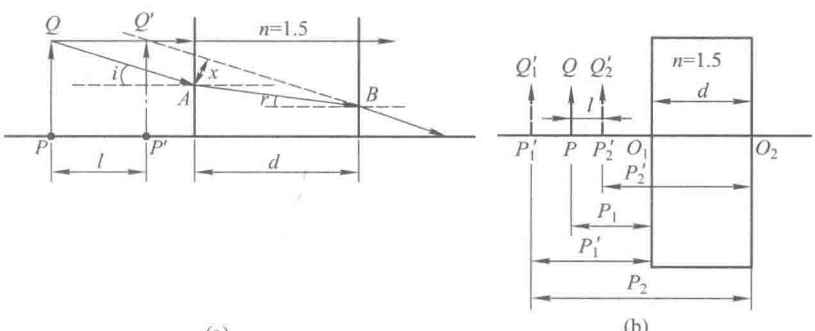
12-4. 眼睛 E 和物体 PQ 之间有一折射率为 1.50 的玻璃平板，如习题 12-4 图所示，平板的厚度 d 为 30 cm，求物体 PQ 的像 $P'Q'$ 与物体之间的距离为多少（平板周围为空气）？



习题 12-4 图

分析：利用折射定律或球面（$r\to\infty$）折射成像规律逐次求解。

解 1：设 PQ 为近轴小物体，根据折射定律作成像光路如解图 12-4（a）所示，物体的像 $P'Q'$ 为等大、正立的虚像。



解图 12-4

设入射角为 i，折射角为 r，$\overline{PP'}=l$，空气的折射率 $n_0=1$。有

$$n_0\sin i=n\sin r$$

$$x=l\sin i=\overline{AB}\sin(i-r)$$

$$d=\overline{AB}\cos r$$

因所有成像光线均为近轴光线，有

$$\sin i=i,\quad \sin r=r,\quad \sin(i-r)=i-r,\quad \cos r=1$$

解得 $P'Q'$ 与 PQ 之间的距离

$$l=\overline{AB}\frac{(i-r)}{i}=d\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}d=10\ \text{cm}$$

解 2：如解图 12-4(b)所示，设玻璃前、后表面与主轴的交点分别为 O_1、O_2，物体对 O_1 的物距为 p_1，像距为 p_1'，对 O_2 的物距为 p_2，像距为 p_2'，玻璃平面的半径 $r=\infty$。根据物像公式，有

$$\frac{n_0}{p_1}+\frac{n}{p_1'}=\frac{n-n_0}{r}=0$$

得
$$p_1'=-\frac{n}{n_0}p_1$$

对玻璃前表面，PQ 与其像 $P_1'Q_1'$ 在同侧，实物成正立、等大的虚像。

对玻璃的后表面，$P_1'Q_1'$ 为物，其物距

$$p_2=|p_1'|+d=1.5p_1+d$$

成像规律为
$$\frac{n}{p_2}+\frac{n_0}{p_2'}=\frac{n_0-n}{r}=0$$

得
$$p_2'=-\frac{n_0}{n}p_2=-\left(p_1+\frac{n_0}{n}d\right)$$

对玻璃后表面，“物”$P_1'Q_1'$ 与其像 $P'_2Q'_2$ 仍在同侧，虚物成正立、等大的虚像。

像 $P'_2Q'_2$ 与物体 PQ 间的距离为

$$l=(p_1+d)-|p_2'|=d\left(1-\frac{n_0}{n}\right)=\frac{d}{3}=10\ \text{cm}$$

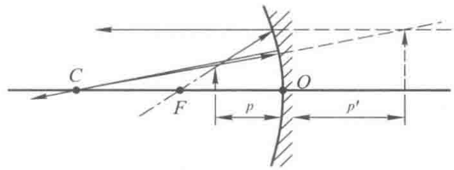
由以上解答可知，在近轴光线条件下，像相对物缩近的距离 l 与玻璃板插于何处无关，仅由玻璃板的特性 n 和 d 决定。

12-5. 一高 1.0 cm 的物体放在一曲率半径为 30 cm 的凹面镜正前方 10.0 cm 处。(1) 画出成像的光路图；(2) 求像的位置及放大倍数。

解：凹球面反射的 A 区和 B 区重合，物距、焦距为正。

(1) 根据几何光学的作图规则，画出的成像光路图如解图 12-5 所示。

（2）球面反射的物像公式为



解图 12-5

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$$

根据符号法则有，$p=10\ \text{cm}$，$r=30\ \text{cm}$，凹面镜的焦距为

$$f=\frac{r}{2}=\frac{1}{2}\times 30\ \text{cm}=15\ \text{cm}$$

得像距 $$p'=\frac{fp}{p-f}=\frac{15\times 10}{10-15}\ \text{cm}=-30\ \text{cm}$$

横向放大率为 $$m=-\frac{p'}{p}=-\frac{-30}{10}=3$$

$p'<0$ 表示物体成虚像，位于凹面镜的另一侧；$m=3$ 表示所成之像是放大 3 倍的正立像。

12-6. 一只装在汽车上的凸面镜，曲率半径为 40 cm，一物体在镜前方 10 m 处。求像的位置和放大倍数。

解：凸球面反射的 A 区和 B 区重合，物距为正、焦距为负。

有 $$f=\frac{1}{2}r=\frac{1}{2}\times(-0.4)\ \text{m}=-0.2\ \text{m}$$

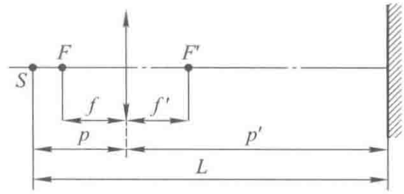
由物像公式 $$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$$

得像距 $$p'=\frac{fp}{p-f}=\frac{(-0.2)\times 10}{10-(-0.2)}\ \text{m}=-0.196\ \text{m}$$

横向放大率为 $$m=-\frac{p'}{p}=-\frac{-0.196}{10}=0.0196$$

$p'<0$ 表示物体成虚像，位于凹面镜的另一侧；$m=0.0196$ 表示所成之像是正立缩小的。

12-7. 一光源与屏间的距离为 1.6 m，用焦距为 30 cm 的凸透镜插在两者之间，透镜应放在什么位置，才能使光源成像于屏上？



解图 12-7

解：设薄凸透镜置于空气中，光源与屏的间距为 L，物距为 p，像距为 p'，如解图 12-7 所示，有

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$$

式中
$$p'=L-p$$

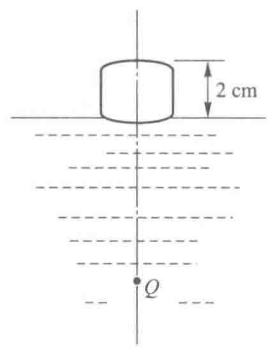
可得
$$p^2-pL+Lf=0$$

代入数据,解方程,得

$$p_1=40\ \text{cm},\quad p'_1=120\ \text{cm}$$
$$p_2=120\ \text{cm},\quad p'_2=40\ \text{cm}$$

将薄透镜置于光源右侧 40 cm 或屏的左侧 40 cm,均可成像于屏上。

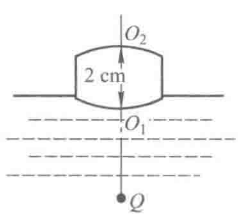
12-8. 一个等曲率的双凸透镜,两球面的曲率半径均为 3 cm,中心厚度 2 cm,玻璃的折射率为 1.50,将透镜放在水面上,在透镜下 4 cm 处有一物体 Q,如习题 12-8 图所示。试计算像的位置。(水的折射率为 1.33。)



习题 12-8 图

分析:对厚透镜的物像关系,可分别对两个球面逐个运用折射球面的成像规律求解。在计算中注意相对每个球面的 A、B 区,及顶点的平移。

解: 如解图 12-4 所示,取凸透镜下表面和上表面与主轴的交点分别为 O_1、O_2,对凸透镜的两个表面逐次成像。设水和玻璃的折射率分别为 n_1 和 n'_1,空气的折射率为 n_0。



解图 12-8

对 O_1,物距为 $p_1=4\ \text{cm}$, $r_1=3\ \text{cm}$,像距设为 p'_1。由折射球面的成像规律,有

$$\frac{n_1}{p_1}+\frac{n'_1}{p'_1}=\frac{n'_1-n_1}{r_1}$$

即
$$\frac{1.33}{4\ \text{cm}}+\frac{1.50}{p'_1}=\frac{1.50-1.33}{3\ \text{cm}}$$

得
$$p'_1=-5.44\ \text{cm}$$

式中负号表明,Q 对第一折射球面 O_1 成虚像。对第二折射球面 O_2,p'_1 是实物,物距为 $p_2=|p'_1|+d$, $r_2=-3\ \text{cm}$,像距设为 p'_2,有

$$\frac{n'_1}{p_2}+\frac{n_0}{p'_2}=\frac{n_0-n'_1}{r_2}$$

即
$$\frac{1.50}{(5.44+2)\ \text{cm}}+\frac{1.00}{p'_2}=\frac{1.00-1.50}{-3\ \text{cm}}$$

解得
$$p'_2=-28.62\ \text{cm}$$

Q 点最后的像 p_2'是虚像,在凸透镜上表面顶点 O_2的下方 28.62 cm 处。

2. 双缝干涉条纹的计算

12-9. 在双缝干涉实验中,两缝的间距为 0.6 mm,照亮狭缝 S 的光源是汞弧灯加上绿色滤光片。在 2.5 m 远处的屏幕上出现干涉条纹,测得相邻两明条纹中心的距离为 2.27 mm。试计算入射光的波长。如果测量仪器只能测量 $\Delta x \geqslant 5$ mm 的距离,则对此双缝的间距有何要求?

解: 在屏幕上取坐标轴 Ox,向上为正,坐标原点位于双缝的对称中心。屏幕上第 k 级明纹中心的位置为

$$x = \pm k \frac{D}{d}\lambda$$

第 k 级与第 $k+1$ 级明纹中心的间隔为

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = (k+1)\frac{D}{d}\lambda - k\frac{D}{d}\lambda = \frac{D\lambda}{d}$$

代入数据,得　　$$\lambda = \frac{\Delta x}{D}d = \frac{2.27\times10^{-3}}{2.5}\times0.6\times10^{-3}\ \text{nm} = 545\ \text{nm}$$

如果所用仪器只能测量相邻两明(暗)纹中心的间隔 $\Delta x \geqslant 5$ mm,则此双缝的间距 d 应进一步减小,由

$$\Delta x = \frac{D}{d}\lambda \geqslant 5\ \text{mm}$$

得　　$$d = \frac{D\lambda}{\Delta x} \leqslant \frac{2.5\times545\times10^{-9}}{5\times10^{-3}}\ \text{mm} = 0.27\ \text{mm}$$

12-10. 在双缝干涉实验中,两缝相距 1 mm,屏离缝的距离为 1 m,若所用光源含有波长 600 nm 和 540 nm 两种光波。试求:(1) 两光波分别形成的条纹间距;(2) 两组条纹之间的距离与级数之间的关系;(3) 这两组条纹有可能重合吗?

分析:两光波在屏上形成各自的干涉条纹。两组干涉条纹的中央明纹中心重合,分布于两侧的各级明、暗纹中心因波长不同而互相错开。当短波长的第 $(k+1)$ 级条纹与长波长的第 k 级条纹重合或处于其内侧时,两组干涉条纹开始重叠。

解: 已知 $d=1$ mm, $D=1$ m, $\lambda_1=540$ nm, $\lambda_2=600$ nm。

(1) 条纹间距与波长成正比。两组条纹的间距分别为

$$\Delta x_1=\frac{D}{d}\lambda_1=\frac{1}{1\times10^{-3}}\times540\times10^{-9}\ \mathrm{m}=5.4\times10^{-4}\ \mathrm{m}=0.54\ \mathrm{mm}$$

$$\Delta x_2=\frac{D}{d}\lambda_2=\frac{1}{1\times10^{-3}}\times600\times10^{-9}\ \mathrm{m}=6.0\times10^{-4}\ \mathrm{m}=0.60\ \mathrm{mm}$$

（2）在两组干涉条纹中，第 k 级明纹中心的位置分别为

$$x_{1k}=k\frac{D}{d}\lambda_1,\quad x_{2k}=k\frac{D}{d}\lambda_2$$

第 k 级明纹中心的间隔为

$$\Delta x_k=k\frac{D}{d}(\lambda_2-\lambda_1)=k\frac{D}{d}\Delta\lambda=6k\times10^{-2}\ \mathrm{mm}$$

（3）在两组干涉条纹中，当 λ_2的 k 级和 λ_1的$(k+1)$级条纹重合时，有

$$(k+1)\frac{D}{d}\lambda_1=k\frac{D}{d}\lambda_2$$

得

$$k=\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{540}{600-540}=9$$

从 λ_2的第 9 级开始，两组条纹重合。

12-11. 用很薄的云母片($n=1.58$)覆盖在双缝实验中的一条缝上，这时屏幕上的零级明条纹移到原来的第七级明条纹的位置上。如果入射光波长为 550 nm，试问此云母片的厚度为多少？（假设光通过云母片时不考虑折射引起的光线偏折。）

分析：在一条缝上覆盖云母片后，屏幕上原零级明纹处的光程差不为零，干涉条纹将整体平移。

解：设云母片覆盖双缝的下缝，厚度为 e，如解图 12-11 所示，零级明纹将下移。覆盖云母片前，O 点处是零级明纹位置，有

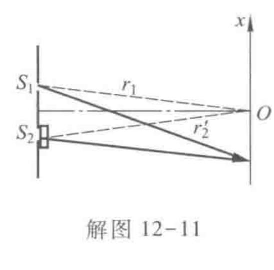
$$r_2-r_1=0$$

覆盖云母片后，O 点处为第七级明纹位置，有

$$r_2'-r_1=7\lambda$$

式中 $r_2'=r_2-e+ne$。解得

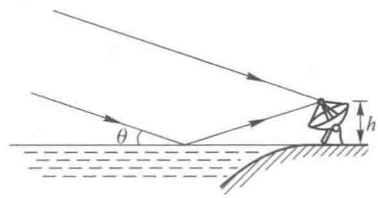
$$e=\frac{7\lambda}{n-1}=6.64\times10^{-3}\ \mathrm{mm}$$



解图 12-11

12-12. 一射电望远镜的天线设在湖岸上，距湖面高度为 h，对岸地平线上方有一恒星刚在升起，恒星发出波长为 λ 的电磁波，如习题 12-12 图所示。试求

当天线测得第一级干涉极大时恒星所在的角位置 θ（提示：作为劳埃德镜干涉分析）。

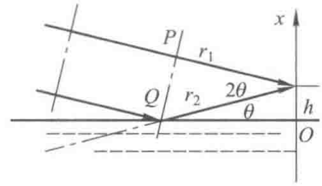


习题 12-12 图

分析：天线接收的电磁波一部分直接来自恒星，另一部为自经湖面的反射波，两波在天线处叠加形成干涉现象。掠射角 θ 很小，反射波有“半波损失”。两波的波程差因恒星上升随 θ 而变，所以，天线测得的信号时而干涉加强，时而干涉减弱。

解： 来自远方恒星的电磁波为平面波。如解图 12-12 所示，h 处的天线测得第一级干涉极大时，有

$$\delta=r_2-r_1+\frac{\lambda}{2}=\lambda$$



解图 12-12

根据图示的几何关系，有

$$r_1=r_2\cos 2\theta, h=r_2\sin\theta$$

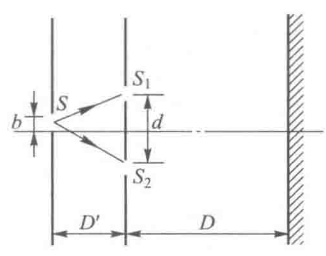
所以　$$\delta=r_2(1-\cos 2\theta)+\frac{\lambda}{2}=2h\sin\theta+\frac{\lambda}{2}=\lambda$$

由于掠射角 θ 很小，有

$$\sin\theta\approx\theta$$

解得　$$\theta=\frac{\lambda}{4h}$$

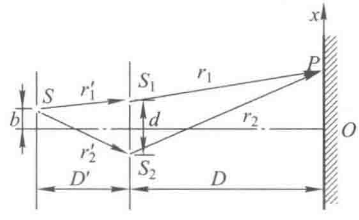
*12-13. 在杨氏双缝实验中，如缝光源与双缝之间的距离为 D'，缝光源离双缝对称轴的距离为 b，如习题 12-13 图所示（$D'\gg d, b$）。求在这种情况下明纹的位置。试比较这时的干涉图样和缝光源在对称轴时的干涉图样。



习题 12-13 图

分析：当 S 偏离对称轴时，对 S_1 和 S_2 存在光程差。与对称时的干涉图样相比较，屏上的干涉图样整体有一与 b 和 D' 相关的平移量。若 S 的偏离量很大，将不出现干涉现象。

解： 如解图 12-13 所示，设入射光波长为 λ，并设 S 在 b 处时，屏上 P 处为第 k 级明纹中心，光程差为



解图 12-13

$$\delta=\delta_0+\delta'=k\lambda$$

式中 $\delta'=r_2'-r_1'$，是 S 到 S_1 和 S_2 的光程差，$\delta_0=r_2-r_1$ 是 S_1 和 S_2 到 P 的光程差。利用几何关系，并由 $D'\gg\dfrac{d}{2}\pm b$，可得

$$\delta'=r_2'-r_1'\approx d\,\frac{b}{D'}$$

因 $D\gg d$，有

$$\delta_0=r_2-r_1\approx d\,\frac{x}{D}$$

所以，对第 k 级明纹中心，有

$$\delta=\delta_0+\delta'\approx d\,\frac{x_k}{D}+d\,\frac{b}{D'}=k\lambda$$

即有

$$x_k=k\,\frac{D}{d}\lambda-\frac{D}{D'}b$$

对 $k=0$ 的中央明条纹中心，有

$$x_0=-\frac{D}{D'}b$$

由此可知，相对 S 在 $b=0$ 处时的干涉图样，整体平移量为 $\dfrac{D}{D'}b$。

3. 薄膜干涉的计算

12-14. 一平面单色光波垂直照射在厚度均匀的薄油膜上，油膜覆盖在玻璃板上，所用单色光的波长可以连续变化，观察到 500 nm 与 700 nm 这两个波长的光在反射中消失。油的折射率为 1.30，玻璃的折射率为 1.50，试求油膜的最小厚度。

分析：在油膜上、下表面的反射光都发生 π 的相位突变。

解：设油膜和玻璃板都处在空气中，薄油膜的厚度为 e，空气的折射率为 n_1，油膜和玻璃的折射率分别为 n_2 和 n_3。$\lambda_1=500\ \mathrm{nm}$，$\lambda_2=700\ \mathrm{nm}$。反射光干涉极小时的光程差满足条件

$$2en_2=(2k_1+1)\frac{\lambda_1}{2},\quad 2en_2=(2k_2+1)\frac{\lambda_2}{2}$$

可解得

$$5k_1=7k_2+1$$

上式成立的最小级次为 $k_1=3$，$k_2=2$，所以

$$e=\frac{(2k_1+1)\lambda_1}{4n_2}=\frac{(2\times3+1)\times500}{4\times1.30}\ \mathrm{nm}=673\ \mathrm{nm}$$

12-15. 白光垂直照射在空气中一厚度为 0.40 μm 的玻璃片上，玻璃的折射率为 1.50。试问在可见光范围内（$\lambda=400\sim700$ nm），哪些波长的光在反射中增强？哪些波长的光在透射中增强？

解： 设波长为 λ 的光在玻璃片上、下表面的反射光干涉加强，有

$$2en+\frac{\lambda}{2}=k\lambda,\quad k=1,2,3,\cdots$$

得

$$\lambda=\frac{4ne}{2k-1}$$

计算可得，仅当 $k=3$ 时反射加强的光波波长在可见光范围内，其他 k 值均在可见光范围外。此波长为

$$\lambda=\frac{4\times1.50\times0.40\times10^{3}}{2\times3-1}\text{ nm}=480\text{ nm}$$

在玻璃片上、下表面的反射光干涉减弱（即透射光干涉加强）的条件为

$$2ne+\frac{\lambda}{2}=(2k+1)\frac{\lambda}{2},\quad k=0,1,2,3,\cdots$$

可得

$$\lambda=\frac{2ne}{k}$$

在可见光范围内，透射光干涉加强的波长分别为

$$\lambda_1=\frac{2ne}{2}=600\text{ nm},\ (k=2);\quad \lambda_2=\frac{2ne}{3}=400\text{ nm},\ (k=3)$$

12-16. 白光垂直照射到空气中一厚度为 380 nm 的肥皂水膜上。试求水膜表面反射加强光波的波长（肥皂水的折射率看作 1.33）。

解： 设波长为 λ 的光波在水膜上、下表面的反射光干涉加强，有

$$2en+\frac{\lambda}{2}=k\lambda,\quad k=1,2,3,\cdots$$

得

$$\lambda=\frac{4ne}{2k-1}$$

白光中反射加强的光波波长分别对应 $k=2$ 和 $k=3$，为

$$\lambda_1=674\text{ nm}\quad(k=2)\text{ 红色；}\quad \lambda_2=404\text{ nm}\quad(k=3)\text{ 紫色}$$

水膜表面呈现紫红色。

12-17. 在棱镜（$n_1=1.52$）表面镀一层增透膜（$n_2=1.30$）。如使此增透膜适用于氦氖激光器发出的激光（$\lambda=632.8$ nm），膜的最小厚度应取何值？

分析："增透膜"使给定波长的透射光通过干涉得到加强，在反射光中该波

长的光波一定是干涉相消的。膜 n_2 的上方介质 n_0 是空气，下方介质 n_3 是玻璃，有 $n_3>n_2>n_1$。光波在膜的下表面向膜内反射时有 π 的相位突变。

解 1： 透射光干涉加强。光程差为

$$\delta=2en_2+\frac{\lambda}{2}=k\lambda,\quad k=1,2,3,\cdots$$

得

$$e=(2k-1)\frac{\lambda}{4n_2}$$

$k=1$ 时为最小膜厚

$$e_{\min}=\frac{\lambda}{4n_2}=\frac{632.8}{4\times1.30}\ \mathrm{nm}=121.7\ \mathrm{nm}$$

在可相干条件下，$k=2,3,\cdots$ 时，膜的厚度为最小膜厚的奇数倍，即 $e=(2k-1)e_1$ 时，仍可对 632.8 nm 波长的光透射加强。

解 2： 反射光干涉减弱。光程差为

$$\delta=2en_2=(2k+1)\frac{\lambda}{2},\quad k=0,1,2,3,\cdots$$

得

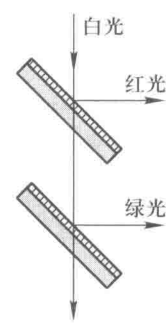
$$e=(2k+1)\frac{\lambda}{4n_2}$$

$k=0$ 时为最小膜厚，有

$$e_{\min}=\frac{\lambda}{4n_2}=\frac{632.8}{4\times1.30}\ \mathrm{nm}=121.7\ \mathrm{nm}$$

12-18. 某仪器的三基色分光系统，如习题 12-18 图所示，系用镀膜方法进行分色。现要求红光的波长为 650 nm，绿光的波长为 520 nm。设基片玻璃的折射率 $n=1.50$，膜材料折射率 $n'=2.12$。试求膜的最小厚度。

分析：白光以 45° 角入射于薄膜，利用两薄膜的“增反”干涉，分别使白光中的红光和绿光反射加强，从而实现“分光”作用。因 $n'>n>n_0$，n_0 为空气折射率。在膜上表面的反射光波有 π 相位突变。



习题 12-18 图

解： 设入射角为 i，膜的厚度为 e，反射光干涉加强的光程差为

$$\delta=2e\sqrt{n'^2-\sin^2 i}+\frac{\lambda}{2}=k\lambda,\quad k=1,2,3,\cdots$$

得

$$e=\frac{(2k-1)\lambda}{4\sqrt{n'^2-\sin^2 i}}=\frac{(2k-1)\lambda}{4\sqrt{2.12^2-0.5}}=\frac{(2k-1)\lambda}{8}$$

$k=1$ 时对应最小膜厚 $e_1=\dfrac{\lambda}{8}$。使红光 $\lambda_R=650$ nm 反射加强的最小膜厚为

$$e_{1R}=\frac{\lambda_R}{8}=\frac{650}{8}\ \text{nm}=81.25\ \text{nm}$$

使绿光 $\lambda_G=520$ nm 反射加强的最小膜厚为

$$e_{1G}=\frac{\lambda_G}{8}=\frac{520}{8}\ \text{nm}=65\ \text{nm}$$

由于干涉互补，利用透射光的干涉减弱，同样可解。

12-19. 利用劈尖的等厚干涉条纹可以测量很小的角度。今在很薄的劈尖玻璃板上，垂直地射入波长为 589.3 nm 的钠光，相邻暗条纹间距离为 5.0 mm，玻璃的折射率 1.52，求此劈尖的夹角。

解：设劈尖角为 θ，相邻暗条纹的间距为 l，厚度差为

$$\Delta e=\frac{\lambda}{2n}。$$

由相邻条纹的间距和劈尖角的几何关系，有

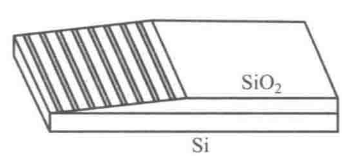
$$\sin\theta\approx\theta=\frac{\Delta e}{l}=\frac{\lambda}{2nl}$$

得劈尖角为

$$\theta=\frac{589.3\times10^{-9}}{2\times1.52\times5.0\times10^{-3}}\ \text{rad}=3.88\times10^{-5}\ \text{rad}=8''$$

12-20. 制造半导体元件时，常需要精确地测定硅片上的二氧化硅（SiO_2）薄膜的厚度，这时可把二氧化硅薄膜的一部分腐蚀掉，使它成为劈尖，利用等厚干涉条纹测出其厚度。已知的 Si 的折射率为 3.42，SiO_2的折射率为 1.5。用氦氖激光（$\lambda=632.8$ nm）垂直照射，在反射光中观察到在腐蚀区域内有 8 条暗纹，且 SiO_2斜面转为平面处是亮纹，如习题 12-20 图所示。求 SiO_2薄膜的厚度。

分析：二氧化硅（n_2）劈尖膜的上方介质（n_1）是空气，下方介质（n_3）是硅，$n_1<n_2<n_3$。在劈尖膜上、下表面的反射光波都有 π 相位突变。所以，劈尖膜的棱边也是亮纹。



习题 12-20 图

解：设反射光中第 k 级亮条纹对应的膜厚为 e，其光程差为

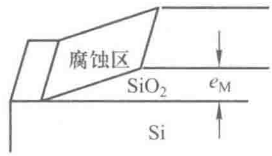
$$2n_2e=k\lambda,\quad k=0,1,2,3,\cdots,8$$

$k=8$ 与 SiO_2的均匀膜厚 e_M，也即斜面的最高处

亮纹相对应，是始于棱边亮纹的第 9 条亮纹，在此范围内有 8 条暗纹。

SiO_2薄膜的厚度为

$$e_M=\frac{8\lambda}{2n_2}=\frac{8\times632.8\times10^{-9}}{2\times1.5}\ \mathrm{m}=1.69\ \mu\mathrm{m}$$



解图 12-20

12-21. 使用平行单色光来观察牛顿环，在反射光中测得某一明环的直径为 3.00 mm，在它外面第五个明环的直径为 4.60 mm，所用平凸透镜的曲率半径为 1.03 m，求此单色光的波长。这是什么光源发出的光？

分析：单色平行光垂直入射于牛顿环实验装置时，空气夹层上、下表面的反射光或透射光形成相干。干涉条纹呈明暗相间、内疏外密的同心圆分布，条纹的级次为内低外高。反射光的明、暗条纹与透射光的互补。

解：设平行单色光的波长为 λ，平凸透镜的曲率半径为 R，反射光中第 k 级明环半径为 r_k，有

$$r_k^2=\frac{2k-1}{2}R\lambda$$

第 $k+5$ 级明环半径为

$$r_{k+5}^2=\frac{2(k+5)-1}{2}R\lambda$$

即有

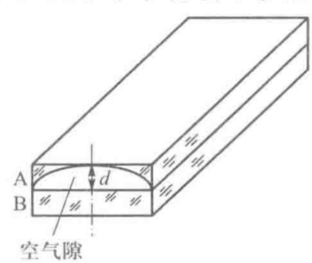
$$r_{k+5}^2-r_k^2=5R\lambda$$

得

$$\lambda=\frac{r_{k+5}^2-r_k^2}{5R}=\frac{2.30^2-1.50^2}{5\times1.03\times10^3}\ \mathrm{mm}=590\ \mathrm{nm}$$

这是钠光灯发出的光。

12-22. 一柱面平凹透镜 A，曲率半径为 R，放在平玻璃片 B 上，如习题 12-22 图所示。现用波长为 λ 的单色平行光自上方垂直往下照射，观察 A 和 B 间空气薄膜的反射光的干涉条纹。如空气薄膜的最大厚度 $d=2\lambda$。(1) 分析干涉条纹的特点(形状、分布、级次高低)，作图表示明条纹；(2) 求明条纹距中心线的距离 r；(3) 共能看到多少明条纹；(4) 若将玻璃片 B 向下平移，条纹如何移动？若玻璃片移动了 $\lambda/4$，问这时还能看到几条明条纹？



习题 12-22 图

分析：在空气薄膜上、下表面的反射光相干形成等厚干涉条纹。条纹轨迹沿空气层厚度相同

处，呈平行于柱面轴线、明暗相间、内疏外密、级次为内高外低的对称分布。

解： 在空气层厚度为 e 处，上、下表面反射光的光程差为

$$\delta=2e+\frac{\lambda}{2}$$

（1）暗条纹对应光程差满足

$$\delta=2e+\frac{\lambda}{2}=(2k+1)\frac{\lambda}{2},\quad k=0,1,2,3,4$$

在两棱边处 $e=0$，为 $k=0$ 的暗条纹；在空气层最高处 $e=d=2\lambda$，为 $k=4$ 的暗条纹。共有 9 条暗纹，级次呈内高外低分布。

明条纹对应光程差满足

$$\delta=2e+\frac{\lambda}{2}=k\lambda,\quad k=1,2,3,4$$

共有 8 条明纹。

由于相邻两明纹或暗纹的厚度差 $\Delta e=\dfrac{\lambda}{2}$ 为空气中的半波长，因而条纹间隔为中间疏两侧密。以实线表示暗纹，条纹的分布特征如解图 12-22 所示。

（2）如解图 12-22 所示，设中心线到一侧第 k 级明纹的距离为 r，利用几何关系，有

$$r^2=R^2-[R-(d-e)]^2$$

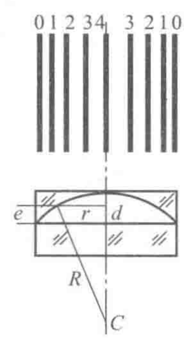
因 $d\ll R,e\ll R$，得　　$r^2\approx 2R(d-e)$

将上式代入明条纹条件，得

$$r=\sqrt{2Rd-(2k-1)R\frac{\lambda}{2}},\quad k=1,2,3,4$$

（3）在中央暗条纹两侧，各有 4 条明纹。共有 8 条明纹。

（4）若将 B 下移，第 k 级条纹对应的膜厚 e_k 将随之外移，干涉条纹将向两侧移动。中心线的光强将由暗转为明，暗条纹逐渐变为明条纹，呈现明暗交替变化。

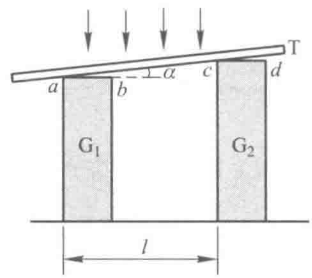


解图 12-22

B 下移 $\lambda/4$ 时，反射光的光程差增加 $\lambda/2$，中心线变为第 5 级明条纹，而透镜两边缘处空气膜的厚度为 $e=\lambda/4$，成为第 1 级明纹。此时的视场中出现 9 条明纹，8 条暗纹。

12-23. 如习题 12-23 图所示，G_1 和 G_2 是两块块规（块规是两个端面经过磨平抛光，达到相互平行的钢质长方体），G_1 的长度是标准的，G_2 是同规格待校准的复制品（两者长度差在图中是夸大的）。G_1 和 G_2 放置在平台上，用一块样板

平玻璃 T 压住。(1) 设垂直入射光的波长 $\lambda=589.3\ \text{nm}$，G_1与G_2相隔 $l=5\ \text{cm}$，T 与G_1以及 T 与G_2间的干涉条纹的间隔都是 0.5 mm。试求G_1与G_2的长度差。(2) 如何判断G_1、G_2哪一块比较长一些？(3) 如果 T 与G_1间的干涉条纹的间距是 0.5 mm，而 T 与G_2间的干涉条纹的间距是 0.3 mm，则说明了什么问题？



习题 12-23 图

解：(1) 平板玻璃与两个块规间出现相同间隔的干涉条纹，表明平板玻璃与两块规间存在相同夹角 α 的空气劈，两块规的长度不同，端面是平行平面。设块规G_1的长度为h_1，块规G_2的长度为h_2。两块规端面的高度差为

$$\Delta h=h_2-h_1=l\sin\alpha$$

设相邻两明纹或暗纹的间距为 Δl，与之对应空气膜的厚度差为 Δe，也即空气中的半波长，有

$$\Delta e=\Delta l\sin\alpha=\frac{\lambda}{2}$$

解得
$$\Delta h=\frac{l}{\Delta l}\Delta e=\frac{l}{\Delta l}\frac{\lambda}{2}=\frac{5\times10^{-2}\times589.3\times10^{-9}}{2\times0.5\times10^{-3}}\ \text{m}=2.95\times10^{-2}\ \text{mm}$$

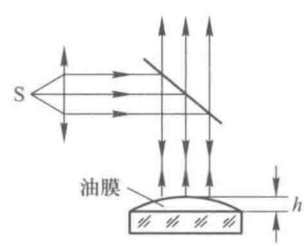
(2) 在反射光中，空气劈的棱边处是暗条纹。当暗条纹出现在 a、c 两处时，块规的长度 $h_2>h_1$；当暗条纹出现在 b、d 两处时，块规的长度 $h_2<h_1$。

(3) 设G_1和G_2上两组干涉条纹的间距分别为 Δl_1 和 Δl_2，劈尖夹角分别为 α_1 和 α_2，有

$$\Delta e=\Delta l_1\sin\alpha_1=\Delta l_2\sin\alpha_2=\frac{\lambda}{2}$$

$\Delta l_1>\Delta l_2$，有 $\alpha_1<\alpha_2$，说明G_2的 cd 端面与底面不平行，d 端低于 c 端。

*12-24. 一实验装置如习题 12-24 图所示，一块平板玻璃片上放一油滴.当油滴展开成油膜时，在单色平行光(波光 $\lambda=600\ \text{nm}$)垂直照射下，从反射光中观察油膜所形成的干涉条纹(用读数显微镜观察)，已知玻璃的折射率 $n_1=1.50$，油膜的折射率 $n_2=1.20$。(1) 当油膜中心最高点与玻璃片的上表面相距 $h=1.2\ \mu\text{m}$ 时，描述所看到的条纹情况。可以看到几条明条纹？明条纹所在处的油膜的厚度是多少？中心点的明暗如何？(2) 当油膜



习题 12-24 图

继续摊展时,所看到条纹情况将如何变化?中心点的情况如何变化?

解:(1)理想状态下,油膜边缘为圆形,中心最高点位于圆心。在反射光中,油膜厚为h_k的第k级明纹的光程差为

$$\delta=2n_2h_k=k\lambda$$

对应油膜厚为

$$h_k=k\frac{\lambda}{2n_2}=k\times\frac{0.6}{2\times1.2}=0.25k\ \mu\text{m},\qquad k=0,1,2,3,4$$

由上式可得干涉条纹的分布情况:

① $k=0$时,$h_0=0$,油膜边缘为零级明条纹;

② 相邻两明条纹对应油膜的厚度差为$\Delta h=\dfrac{\lambda}{2n_2}=0.25\ \mu\text{m}$(介质中的半波长),两明纹间为暗纹;

③ $k=5$的明条纹不存在,但$h_5=1.25\ \mu\text{m}$接近中心最高点$h=1.2\ \mu\text{m}$,油膜中心介于明、暗之间,偏于明;

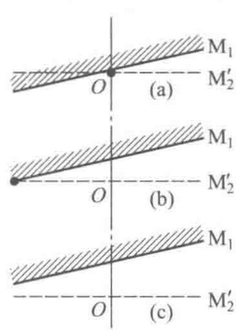
④ 明纹的级次越高,对应的油膜越厚,条纹级次分布的规律是内高外低;

⑤ 干涉条纹间隔呈内疏外密状,整体呈同心圆分布。

所以,视场中可见到5个明条纹和5个暗条纹,中心点偏明。

(2)油膜继续摊展时,随着各级条纹对应的膜厚向中心移动,条纹向内收缩;中心点的膜厚不断减小,由偏明状向暗、明、暗、明状交替变化;始终为亮的边缘明条纹则向外扩展。所以,相邻条纹的间隔将变大,视场内呈现的条纹数将不断减少,直至油膜均匀敷设在玻璃上,条纹消失。

12-25. 迈克耳孙干涉仪可以用来测量光谱中非常接近的两谱线的波长差。其方法是先将干涉仪调整到零光程差,再换上被测光源,这时在视场中出现被测光的清晰的干涉条纹。然后沿一个方向移动M_2,将会观察到视场中的干涉条纹逐渐变得模糊以至消失。如再继续向同一个方向移动M_2,干涉条纹又会逐渐清晰起来。设两次出现最清晰条纹期间,M_2移过的距离为0.289 mm,已知钠黄光的波长大约是589 nm。试计算两谱线的波长差$\Delta\lambda$。



解图 12-25

分析:迈克耳孙干涉仪可以安排作等厚干涉测量,也可安排作等倾干涉测量。

以等厚干涉测量为例分析。平行光入射,M_1和M_2'成一夹角,如解图12-25所示。

用单色光入射时,视场中呈现一套相互平行、等间隔

分布的干涉条纹。相邻条纹对应的空气劈厚度差为半波长。单向移动 M_2 时，视场中的条纹整体单向平移，注视一小区域，则发生明、暗交替变化。

当入射光含有两种波长时，视场中将呈现两套相同特征的干涉条纹，相邻条纹的间隔正比于各自的波长，光强为非相干叠加。

在解图 12-25 的图(a)状态，两套条纹的零级明纹在 O 处重叠，零级明纹的两侧对称分布各级明纹，但同级的两条明纹有错位并逐级增大，视场中的条纹清晰可辨。移动 M_2，如图(b)和图(c)所示，零级明条纹及两套条纹整体均将向一侧平移。在视场中心 O 处，当长波长光的明纹与短波长光的暗纹重叠时，其他明暗纹虽不重叠，但很靠近，视场变得模糊；当短波长的 $k+1$ 级明纹与长波长的 k 级明纹再次重叠于 O 点时，视场又变得清晰。

图(a)状态的视场是最清晰的，随着 M_2 的移动，这个区域被移出了视场。以后虽也有 O 点处周期性地出现两个明纹重叠的情况，但视场中干涉条纹的可见度下降，明、暗条纹不再清晰可辨。当移动 M_2 使两束反射光的光程差大于光波的可相干长度时，干涉现象消失，整个视场为均匀亮度。

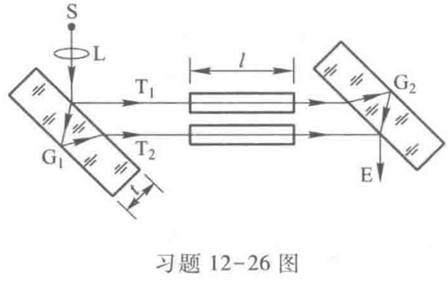
解： 设 $\lambda_1=589\ \mathrm{nm}$，未知波长为 λ_2，并设 $\lambda_2>\lambda_1$。干涉仪两臂的反射光在 O 点处的光程差为零时，视场清晰。移动 M_2 为 d 时，设 λ_1 的第 $(k+1)$ 级和 λ_2 的第 k 级明纹在 O 点处重叠，使视场再次清晰，有

$$\delta=2d=(k+1)\lambda_1=k\lambda_2$$

解得
$$\lambda_2=\frac{2d\lambda_1}{2d-\lambda_1}=\frac{2\times0.289\times10^{-3}\times589\times10^{-9}}{2\times0.289\times10^{-3}-589\times10^{-9}}\ \mathrm{nm}=589.6\ \mathrm{nm}$$

两谱线的波长差为
$$\Delta\lambda=\lambda_2-\lambda_1=0.6\ \mathrm{nm}$$

12-26. 常用雅敏干涉仪来测定气体在各种温度和压力下的折射率。干涉仪的光路如习题 12-26 图所示。S 为光源，L 为聚光透镜，G_1、G_2 为两块等厚而且互相平行的玻璃板，T_1、T_2 为等长的两个玻璃管，长度为 l。进行测量时，先将 T_1、T_2 抽空，然后将待测气体徐徐导入一管中。在 E 处观察干涉条纹的变化，即可求出待测气体的折射率。例如某次测量某种气体时，将气体徐徐放入 T_2 管



习题 12-26 图

中,气体达到标准状态时,在 E 处共看到有 98 条干涉条纹移动。所用的黄光波长为 589.3 nm(真空中),$l=20$ cm,求该气体在标准状态下的折射率。

分析:干涉仪的光路对称分布,当两管内同为真空时,在 E 处的光程差为零。当待测气体导入一管时,E 处光程差发生变化,导致干涉条纹移动。

解:设导入气体的折射率为 n,气体导入一管并处于平衡状态后,E 处的光程差为

$$\delta=nl-l=98\lambda$$

解得气体的折射率为

$$n=1+\frac{98\lambda}{l}=1.000\ 29$$

4. 单缝衍射和光栅衍射

12-27. 有一单缝,宽 $a=0.10$ mm,在缝后放一焦距为 50 cm 的会聚透镜。用平行绿光($\lambda=546.0$ nm)垂直照射单缝,试求位于透镜焦面处的屏幕上的中央明条纹及第二级明纹宽度。

分析:单缝夫琅禾费衍射光强的各级明条纹宽度为屏上相邻两个暗纹中心之间的距离,中央明条纹的宽度为各级明条纹宽度的 2 倍。

解:设光屏上第 k 级暗条纹中心的位置为 x,衍射角为 θ,有

$$a\sin\theta=\pm k\lambda$$

因 θ 很小,有

$$\sin\theta\approx\tan\theta=\frac{x}{f}$$

即

$$x_k=\pm k\frac{f}{a}\lambda$$

$k=1$ 时,得中央明条纹的宽度为

$$\Delta x_0=x_1-x_{-1}=2\frac{f}{a}\lambda=5.46\ \text{mm}$$

第 k 级明条纹的宽度为

$$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k=(k+1)\frac{f}{a}\lambda-k\frac{f}{a}\lambda=\frac{f}{a}\lambda$$

与 k 无关,各级明条纹的宽度相等。第二级明纹宽度为

$$\Delta x_2=\Delta x_k=\frac{f}{a}\lambda=2.73\ \text{mm}$$

中央明条纹的宽度为各级明纹宽度的两倍，即

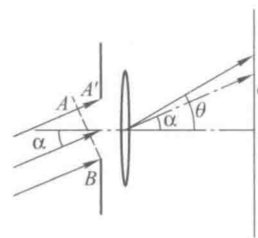
$$\Delta x_0 = 2\Delta x_k$$

12-28. 波长为 λ 的单色平行光沿着与单缝衍射屏成 α 角的方向入射到宽度为 a 的单缝上，试求各级衍射极小的衍射角 θ 值。

分析：平行光斜入射时，衍射光的光程差还须考虑平行光到达单缝时的光程差。屏上中央明条纹中心将移至透镜焦平面与副光轴的交点上，各级明、暗条纹也相应平移。

解：如解图 12-28 所示，衍射波在 θ 方向的最大光程差为

$$\delta = a\sin\theta - a\sin\alpha$$



解图 12-28

令 $\delta=0$，得衍射的中央明条纹中心在 $\theta=\alpha$ 的方向上。因 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，在中央明条纹两侧可观察的明纹的最大级次不等。衍射极小时，有

$$\delta = a\sin\theta - a\sin\alpha = \pm k\lambda,\quad k=1,2,3,\cdots$$

衍射极小出现的方向是　$\theta = \arcsin\left(\pm k\dfrac{\lambda}{a} + \sin\alpha\right)$

若平行光以 $-\alpha$ 角斜入射，衍射极小为

$$\delta = a\sin\theta + a\sin\alpha = \pm k\lambda,\ k=1,2,3,\cdots$$

衍射极小出现的方向是　$\theta = \arcsin\left(\pm k\dfrac{\lambda}{a} - \sin\alpha\right)$

12-29. 在复色光垂直照射下的单缝衍射图样中，其中某一波长的第 3 级明纹位置恰与波长 $\lambda=600$ nm 的单色光的第 2 级明纹位置重合，求这光波的波长。

解：设未知波长 λ 的第 3 级明纹与已知波长 λ_0 的第 2 级明纹在 θ 方向重合，它们的光程差相等，根据明纹条件

$$a\sin\theta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

有

$$(2\times3+1)\frac{\lambda}{2} = (2\times2+1)\frac{\lambda_0}{2}$$

得

$$\lambda = \frac{5}{7}\lambda_0 = \frac{5}{7}\times600\ \text{nm} = 428.6\ \text{nm}$$

12-30. 用波长 $\lambda_1=400\ \mathrm{nm}$ 和 $\lambda_2=700\ \mathrm{nm}$ 的混合光垂直照射单缝。在衍射图样中，λ_1的第 k_1级明纹中心位置恰与 λ_2的第 k_2级暗纹中心位置重合，求 k_1和 k_2。试问 λ_1的暗纹中心位置能否与 λ_2的暗纹中心位置重合？

解： 当 λ_1的第 k_1级明纹与 λ_2的第 k_2级暗纹位置重合时，这两个条纹在 θ 方向上的光程差相等，有

$$a\sin\theta=(2k_1+1)\frac{\lambda_1}{2}=k_2\lambda_2$$

得
$$\frac{2k_1+1}{2k_2}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{7}{4}$$

使上式成立，可取 $k_1=3$、$k_2=2$。当取 $k_1=6,k_2=10,\cdots\cdots$ 值时，上式也成立，但单缝衍射的光强已很弱。

若 λ_1的第 k_1级暗纹与 λ_2的第 k_2级暗纹位置重合，有

$$a\sin\theta=k_1\lambda_1=k_2\lambda_2$$

得
$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{7}{4}$$

使上式成立，可取 $k_1=7,k_2=4$。

12-31. 利用单缝衍射的原理可以测量位移以及与位移联系的物理量，如热膨胀、形变等。把需要测量位移的对象和一标准直边相连，同另一固定的标准直边形成一单缝，这个单缝宽度变化能反映位移的大小。如果中央明纹两侧的正、负第 k 级暗（亮）纹之间距离的变化为 $\mathrm{d}x_k$，证明：

$$\mathrm{d}x_k=-\frac{2k\lambda f}{a^2}\mathrm{d}a$$

式中 f 为透镜的焦距，$\mathrm{d}a$ 为单缝宽度的变化（$\mathrm{d}a\ll a$）。

分析：单缝衍射图样相对中央明纹中心对称分布，单缝的缝宽 a 越小，则明、暗条纹越宽，条纹的间距越大，衍射越显著。

证：以 x_k表示中央明纹两侧第 k 级的两个暗纹的间距，则屏上第 k 级暗条纹的坐标为（$x_k/2$），有

$$a\sin\theta\approx a\frac{x_k}{2f}=k\lambda$$

$$x_k=\frac{2k\lambda f}{a}$$

两边取微分，得
$$\mathrm{d}x_k=-\frac{2k\lambda f}{a^2}\mathrm{d}a$$

命题得证。式中负号表明,若 $da<0$,有 $dx_k>0$,即缝宽越小,衍射越显著。

12-32. 一光栅,宽为 2.0 cm,共有 6 000 条缝。如用钠光(589.3 nm)垂直入射,在哪些角度出现光强极大?如钠光与光栅的法线方向成 30°角入射,试问:光栅光谱线将有什么变化?

解:设光栅宽度为 L,得光栅常量为

$$(a+b)=\frac{L}{N}$$

由光栅方程 $(a+b)\sin\theta=k\lambda,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

得光强主极大出现的角度为

$$\theta=\arcsin\left(\frac{N\lambda k}{L}\right)=\arcsin(0.176k)$$

在 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 范围内,光强主极大的级次 k 和衍射角 θ,列于下表

k	0	±1	±2	±3	±4	±5
θ	0°	±10°11′	±20°42′	±32°2′	±45°	±62°8′

平行光以 $\theta'=30°$ 角倾斜入射时的光栅方程为

$$(a+b)(\sin\theta-\sin\theta')=k\lambda,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

式中入射角 θ' 和衍射角 θ 均由透镜主光轴起算,逆时针为正,顺时针为负。光强主极大出现的角度为

$$\theta=\arcsin\left(\frac{N\lambda k}{L}+\sin\theta'\right)=\arcsin(0.176k+0.5)$$

在 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 范围内,光强主极大的级次 k 和衍射角 θ,列于下表

k	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8
θ	58°36′	42°36′	30°	18°51′	8°25′	1°45′	−11°57′	−22°35′	−34°7′	−47°32′	−66°7′

单色平行光斜入射时,零级主极大两侧可呈现的最高级次主极大是不对称的。

12-33. 已知一个每厘米刻有 4 000 条缝的光栅,利用这个光栅可以产生多少个完整的可见光谱($\lambda=400\sim760$ nm)?

分析:在平行白光($\lambda=400\sim760$ nm)垂直入射于光栅后形成的光谱中,各波长零级主极大的衍射光强非相干地重叠,呈白色细条纹,在其两侧排列有衍射光谱。一个完整的可见光谱,由按波长从短到长(由紫到红)、由里及外的同一级次主极大排列而成。当高级次光谱中短波长的主极大与低一级次光谱中某波长

的主极大处于同一衍射角时，这两个光谱开始重叠。

解：设 λ_R 为最大波长（红光），λ_P 为最小波长（紫光）。光栅常量为

$$a+b=\frac{L}{N}=\frac{1\times10^{-2}}{4\ 000}\mathrm{m}=2.5\times10^{-6}\ \mathrm{m}$$

光栅方程为

$$(a+b)\sin\theta=k\lambda,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

令 $\sin\theta=1$，得红光主极大的最高级次

$$k=\frac{a+b}{\lambda_R}=\frac{2.5\times10^{-6}}{760\times10^{-9}}=3.29$$

取整数 $k=3$。这个光栅可以产生 3 个完整的可见光谱。

设衍射角为 θ 方向上，λ_P 的第 $(k+1)$ 级主极大与 λ_R 的第 k 级主极大重叠，有

$$(a+b)\sin\theta=k\lambda_R=(k+1)\lambda_P$$

可得

$$k=\frac{\lambda_P}{\lambda_R-\lambda_P}=\frac{400}{760-400}=1.1$$

可见光的第二级与第三级光谱将发生重叠。可见光独立完整的光谱是第一级。

12-34. 波长 600 nm 的单色光垂直入射在一光栅上。第二级明条纹出现在 $\sin\theta=0.20$ 处，第四级缺级。试问：(1) 光栅上相邻两缝的间距 $(a+b)$ 有多大？(2) 光栅上狭缝可能的最小宽度 a 有多大？(3) 按上述选定的 a、b 值，试问在光屏上可能观察到的全部明条纹数是多少？

分析：光栅的多光束干涉主极大光强受单缝衍射光强的调制。干涉主极大位置由光栅方程决定，主极大与单缝衍射极小在位置上重合时，该级干涉主极大缺级，联立方程求解。

解：(1) 由光栅方程 $(a+b)\sin\theta=k\lambda$

和 $k=2$ 时 $\sin\theta=0.20$

得光栅常量 $$a+b=\frac{k\lambda}{\sin\theta}=\frac{2\times600\times10^{-9}}{0.20}\ \mathrm{m}=6\times10^{-6}\ \mathrm{m}$$

(2) 由 $(a+b)\sin\theta=k\lambda$ 和 $a\sin\theta=k'\lambda$

因第四级缺级，有 $$\frac{a+b}{a}=\frac{k}{k'}=\frac{4}{1}=\frac{8}{2}=\cdots$$

得 $$a=\frac{a+b}{4}=\frac{6\times10^{-6}}{4}\ \mathrm{m}=1.5\times10^{-6}\ \mathrm{m}$$

（3）在光栅方程中，令 $\sin\theta=1$，可解得 $k=10$，其中 $k=\pm4,\pm8$ 缺级，$k=\pm10$ 的主极大在 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ 处，实际不可见。所以，在光屏上可观察到的全部明条纹的级次为 $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm5,\pm6,\pm7,\pm9$，共 15 条。

*12-35. 波长为 500 nm 的单色光，垂直入射到光栅上，如要求第一级谱线的衍射角为 30°，问光栅每毫米应刻几条线？如果单色光不纯，波长在 0.5% 范围内变化，则相应的衍射角变化范围 $\Delta\theta$ 如何？又如光栅上下移动而保持光源不动，衍射角 θ 有何变化？

解： 已知 $\theta_1=30°$，设光栅每毫米的刻线数为 N，由光栅方程 $(a+b)\sin\theta_1=\lambda$ 得

$$N=\frac{1}{a+b}=\frac{\sin\theta_1}{\lambda}=1\ 000\ \text{mm}^{-1}$$

对光栅方程

$$(a+b)\sin\theta=k\lambda$$

两边取微分，有

$$(a+b)\cos\theta_k\Delta\theta_k=k\Delta\lambda$$

得

$$\Delta\theta_k=\frac{k\Delta\lambda}{(a+b)\cos\theta_k}=\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\tan\theta_k$$

光栅分开两谱线的角距离反比于光栅常量，与谱线的级次成正比。将 $\theta_1=30°$ 和 $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=0.5\%$ 代入得

$$\Delta\theta_1=\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\tan\theta_1,$$

即

$$\Delta\theta_1=0.5\times10^{-2}\times\tan30°=2.89\times10^{-3}\ \text{rad}=0.17°$$

光栅上下移动，若光栅后透镜的位置不变，并保持平行光垂直入射，各级主极大的衍射角不会变化。

12-36. 一个平面光栅，当用光垂直照射时，能在 30° 角的衍射方向上得到 600 nm 的第二级主极大，并能分辨 $\Delta\lambda=0.05$ nm 的两条光谱线，但不能得到第三级主极大。计算此光栅的透光部分的宽度 a 和不透光部分的宽度 b 以及被光照射到的总缝数。

解： 在 $\theta_2=30°$ 方向上得到 $\lambda=600$ nm 的第二级主极大。根据光栅方程，有

$$(a+b)\sin\theta_2=2\lambda$$

得

$$a+b=\frac{2\lambda}{\sin\theta_2}=\frac{2\times600\times10^{-9}}{\sin30°}=2.4\times10^{-6}\ \text{m}$$

由第三级缺级，可知

$$\frac{a+b}{a}=3$$

得
$$a=\frac{a+b}{3}=\frac{2.4\times10^{-6}}{3}\ \text{m}=8\times10^{-7}\ \text{m}$$
$$b=(a+b)-a=1.6\times10^{-6}\ \text{m}$$

由光栅的分辨本领
$$R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=kN$$

得光栅被光照射到的总缝数为 $N=\dfrac{\lambda}{k\Delta\lambda}=\dfrac{600}{2\times0.05}=6\ 000$ 条

12-37. 一衍射光栅每毫米刻线 300 条。入射光包含红光和紫光两种波长，垂直入射到光栅，发现在 24.46°角处两种波长光的谱线重合。试问红光和紫光的波长各是多少？

解：设红光和紫光的波长分别为 λ_R 和 λ_P，在与光栅法线成 $\theta=24.46°$ 角的方向上，两种波长光的谱线重合。根据光栅方程，有
$$(a+b)\sin\theta=k_R\lambda_R$$
和
$$(a+b)\sin\theta=k_P\lambda_P$$
并有
$$k_P=k_R+1$$
光栅常量为
$$(a+b)=\frac{1}{N}=\frac{1\times10^{-3}}{300}\ \text{m}$$

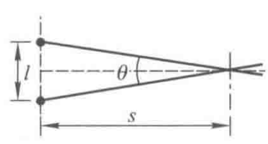
由以上方程可得
$$\lambda_R=\frac{\sin\theta}{k_R N}=\frac{1}{k_R}\times1.38\times10^{-6}\ \text{m}$$

$k_R=2$ 时，红光波长
$$\lambda_R=\frac{1}{2}\times1.38\times10^{-6}\ \text{m}=690\ \text{nm}$$

紫光波长
$$\lambda_P=\frac{\sin\theta}{k_P N}=\frac{1}{3}\times1.38\times10^{-6}\ \text{m}=460\ \text{nm}$$

5. 光学仪器的分辨率

12-38. 在迎面驶来的汽车上，两盏前灯相距 1.2 m。试问汽车离人多远的地方，眼睛才可能分辨这两盏前灯？假设夜间人眼瞳孔直径为 5.0 mm，而入射光波长 $\lambda=550.0$ nm。



解图 12-38

解：如解图 12-38 所示，设两灯距离为 l，人与车之间距离为 s.恰可分辨时，两车灯对瞳孔的最小分辨角为

$$\theta \approx \frac{l}{s}$$

根据瑞利准则，有
$$\theta = \theta_R = 1.22\frac{\lambda}{d} = \frac{l}{s}$$

得
$$s = \frac{ld}{1.22\lambda} = \frac{1.2\times5.0\times10^{-3}}{1.22\times550.0\times10^{-9}}\ \mathrm{m} = 8.94\times10^{3}\ \mathrm{m}$$

12-39. 已知天空中两颗星相对于一望远镜的角距离为 4.84×10^{-6} rad，由它们发出的光波波长 $\lambda = 550.0$ nm。望远镜物镜的口径至少要多大，才能分辨出这两颗星？

解：设望远镜物镜的直径为 d，恰可分辨时的角距离为 θ_R。由 $\theta_R = 1.22\dfrac{\lambda}{d}$

得
$$d = 1.22\frac{\lambda}{\theta_R} = 1.22\times\frac{550.0\times10^{-9}}{4.84\times10^{-6}}\ \mathrm{m} = 13.9\ \mathrm{cm}$$

12-40. 一观察者通过缝宽为 0.5 mm 的单缝，观察位于正前方 1 km 远处发出波长为 500 nm 的单色光的两盏灯灯丝，两灯丝都与单缝平行，它们所在的平面与观察方向垂直，则人眼能分辨的两灯丝最短距离是多少？

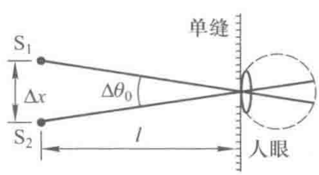
分析：远处的光源、单缝和人眼的晶状体（透镜）构成单缝的夫琅禾费衍射，在视网膜上形成光强分布。根据瑞利准则，两个不相干的单缝衍射光强分布，恰可分辨时的角距离为单缝衍射中央明纹的半角宽度。

解：如解图 12-40 所示，设人眼能分辨的两灯丝最小间距为 Δx，两灯丝距人眼（单缝）为 l，单缝宽为 a，单缝衍射的第一级暗纹中心对应的衍射角为 θ。有

$$a\sin\theta_1 \approx a\theta_1 = \lambda$$

中央明纹的半角宽度为

$$\Delta\theta_0 = \theta_1 = \frac{\lambda}{a}$$



解图 12-40

恰可分辨时，有

$$\Delta\theta_0 = \theta_R = \frac{\Delta x}{l}$$

θ_R 为最小分辨角。

得
$$\Delta x = \frac{\lambda}{a}l = \frac{500\times10^{-9}}{0.5\times10^{-3}}\times1\times10^{3}\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{m}$$

12-41. 已知地球到月球的距离是 3.84×10^{8} m，设来自月球的光的波长为 600 nm，若在地球上用物镜直径为 1 m 的天文望远镜观察时，刚好将月球正面一环形山上的两点分辨开，则该两点的距离为多少？

解： 设地球到月球的距离是 L，环形山上两点的距离为 Δx，望远镜的物镜直径为 d。望远镜恰可分辨两点时的张角为 θ_R，有

$$\Delta x=L\theta_R=1.22\frac{\lambda}{d}L=1.22\times\frac{600\times10^{-9}}{1}\times3.84\times10^{8}\ \text{m}=281\ \text{m}$$

12-42. 一直径为 2 mm 的氦氖激光束射向月球表面，其波长为 632.8 nm。已知月球和地面的距离为 3.84×10^{5} km。试求：(1) 在月球上得到的光斑的直径有多大？(2) 如果这激光束经扩束器扩展成直径为 2 m，则在月球表面上得到的光斑的直径将为多大？在激光测距仪中，通常采用激光扩束器，这是为什么？

分析：激光束受通光孔径的衍射作用，存在一定程度的发散，在月球表面形成圆孔衍射图样。艾里斑角半径 θ_1 的大小可反映光束发散的程度。

解： (1) 设激光束直径为 d，地面至月球表面距离为 L，在月球表面，激光束形成艾里斑的直径为 D，有 $D=2L\theta_1$。艾里斑的角半径 θ_1 为

$$\theta_1=1.22\frac{\lambda}{d}$$

所以
$$D=1.22\frac{2L\lambda}{d}=1.22\times\frac{2\times3.84\times10^{8}\times632.8\times10^{-9}}{2\times10^{-3}}\ \text{m}=2.96\times10^{5}\ \text{m}$$

(2) 若激光束扩束为 d'，则艾里斑直径为

$$D'=\frac{d}{d'}D=\frac{2\times10^{-3}}{2}\times2.96\times10^{5}\ \text{m}=296\ \text{m}$$

使用激光扩束器，可减小激光束的发散，使激光束的光能集中，方向性更好，有利于提高测距精度。

6. 晶体的 X 射线衍射

12-43. 用方解石分析 X 射线谱，已知方解石的晶面间距为 3.029×10^{-10} m，今在 43°26′和 40°42′的掠射方向上观察到两条主最大谱线，求这两条谱线的波长。

解： 设晶面间距为 d，掠射角分别为 θ_1 和 θ_2。由布拉格条件 $2d\sin\theta=k\lambda$，有

$$\lambda=\frac{2d\sin\theta}{k}$$

$k=1$ 时，两条谱线的波长分别为

$$\lambda_1=2d\sin\theta_1=2\times3.029\times10^{-1}\times\sin(43°26')\ \text{nm}=0.416\ \text{nm}$$

$$\lambda_2=2d\sin\theta_2=2\times3.029\times10^{-1}\times\sin(40°42')\ \text{nm}=0.395\ \text{nm}$$

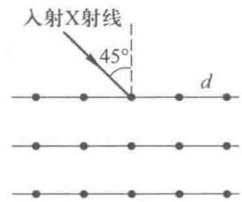
$k=2$ 时，两条谱线的波长分别为

$$\lambda_1=d\sin\theta_1=3.029\times10^{-1}\times\sin(43°26')\ \text{nm}=0.208\ \text{nm}$$

$$\lambda_2=d\sin\theta_2=3.029\times10^{-1}\times\sin(40°42')\ \text{nm}=0.197\ \text{nm}$$

…………

12-44. 如果习题 12-44 图中入射 X 射线束不是单色的，而是含有由 0.095 nm 到 0.130 nm 这一波带中的各种波长。晶体的晶面间距 $d=0.275$ nm，问能否产生与图中所示晶面族相联系的衍射的 X 射线束？



习题 12-44 图

解：设 $\lambda_1=0.095$ nm，$\lambda_2=0.130$ nm，掠射角 $\theta=90°-45°=45°$。由布拉格条件

$$2d\sin\theta=k\lambda$$

得级次 k 的取值范围 $$\frac{2d\sin\theta}{\lambda_2}<k<\frac{2d\sin\theta}{\lambda_1}$$

代入数据，得 $$2.99<k<4.09$$

取 $k=3,k=4$，能够产生与图示晶面族相关的衍射 X 射线束波长分别是

$$\lambda_{k=3}=\frac{\sqrt{2}d}{3}=0.130\ \text{nm}$$

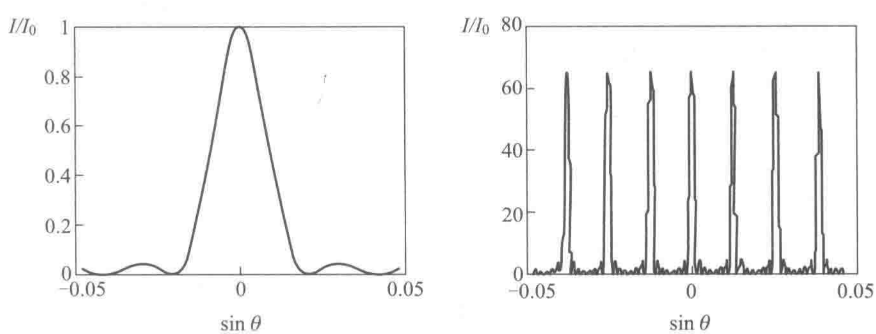
和 $$\lambda_{k=4}=\frac{\sqrt{2}d}{4}=0.097\ \text{nm}$$

*12-45. 光栅衍射的光强分布函数为 $I=I'\left(\dfrac{\sin\dfrac{N\phi}{2}}{\sin\dfrac{\phi}{2}}\right)^2$，每一缝的光强 I' 可写为 $I'=I_0\left(\dfrac{\sin u}{u}\right)^2$［见式(12-38b)］，其中 $\phi=\dfrac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta$，$u=\dfrac{\pi}{\lambda}a\sin\theta$。试编写一计算机程序，画出 8 缝光栅($N=8$)衍射的相对光强分布图(即 $I/I_0-\sin\theta$ 曲线，θ 为衍射角)，并观察单缝衍射对多缝干涉的调制作用。(设缝宽 $a=8\times10^{-6}$ m，光栅常量 $d=4\times10^{-4}$ m，波长 $\lambda=5\times10^{-7}$ m。)

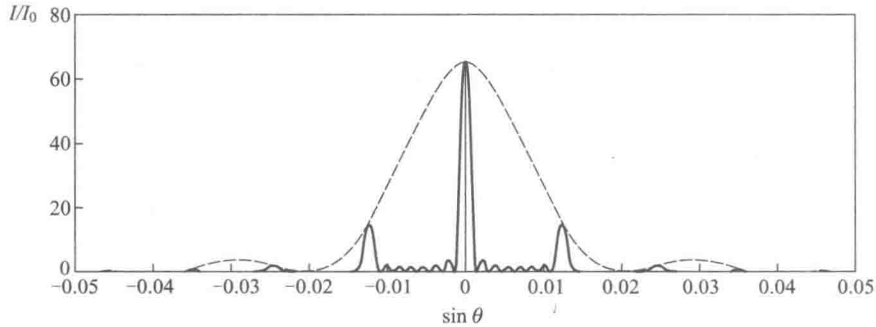
参考程序

```
% 单缝衍射对多缝干涉的调制
```

```
clear
clf
a=0.8e-5;d=4e-5;lamda=5e-7;              % 缝宽,缝间距,波长
N=input('请输入缝数 N=');                  % 输入缝数
theta=-0.015*pi:0.00001:0.015*pi;        % 衍射角度变化范围
phi=2*pi*d*sin(theta)/lamda;             % 将衍射角转化为相位角
u=pi*a*sin(theta)/lamda;
I0=(sinc(u)).^2;                         % 计算单缝相对光强
Id=(sin(N*phi/2)./sin(phi/2)).^2;        % 计算多缝相对光强
I=I0.*Id;                                % 单缝衍射对多缝干涉调
                                           制后的光强
subplot(2,2,1)
plot(sin(theta),I0,'b')                  % 画出单缝衍射相对光强
                                           的分布
xlabel('sin(theta)');ylabel('单缝衍射相对光强');
subplot(2,2,2)
plot(sin(theta),Id,'k')                  % 画出 N 缝光栅相对光强
                                           的分布
xlabel('sin(theta)');ylabel('多缝干涉相对光强');
subplot(2,1,2)
plot(sin(theta),N*N*I0,':b',sin(theta),I,'k')
                                         % 画出单缝衍射对多缝干
                                           涉调制后的光强分布图
xlabel('sin(theta)');ylabel('光栅衍射的相对光强');
```



(a) 单缝衍射　　(b) 多缝干涉



(c) 光栅衍射

解图 12-45

7. 光的偏振

12-46. 使自然光通过两个偏振化方向成 60°角的偏振片，透射光强为 I_1。今在这两个偏振片之间再插入另一偏振片，它的偏振化方向与前两个偏振片均成 30°角，则透射光强为多少？

解： 设强度为 I_0 的自然光，依次通过偏振片 A、B、C。A、C 间的夹角为 $\theta_1=60°$，A、B 与 B、C 间的夹角均为 $\theta_2=30°$。自然光入射于起偏器 A 后的透射光为线偏振光，即

$$I_A=\frac{1}{2}I_0$$

插入 B 前，透过 C 的光强为

$$I_1=I_A\cos^2\theta_1=\frac{I_0}{2}\cos^2 60°=\frac{1}{8}I_0$$

插入 B 后，设透过 B 和 C 的光强为分别为 I_B 和 I_2，有

$$I_B=I_A\cos^2\theta_2=\frac{I_0}{2}\cos^2 30°=\frac{3}{8}I_0$$

$$I_2=I_B\cos^2\theta_2=\frac{3}{8}I_0\cos^2 30°$$

解得

$$I_2=\frac{9}{32}I_0=\frac{9}{32}\times 8I_1=2.25I_1$$

12-47. 如果起偏振器和检偏器的偏振化方向之间的夹角为 30°。(1) 假定

偏振片是理想的，则非偏振光通过起偏振器和检偏器后，其出射光强与原来光强之比是多少？（2）如果起偏振器和检偏器分别吸收了10%的可通过光线，则出射光强与原来光强之比是多少？

解： 非偏振光即自然光，设其光强为 I_0。

（1）自然光通过理想起偏振器 P_1 后，成为线偏振光，光强为

$$I_1=\frac{1}{2}I_0$$

线偏振光 I_1 通过理想检偏器 P_2 后的透射光强为

$$I_2=I_1\cos^2\theta=\frac{1}{2}I_0\cos^2 30°$$

所以

$$\frac{I_2}{I_0}=\frac{1}{2}\cos^2 30°=\frac{3}{8}=0.375$$

（2）P_1 吸收10%的光能，有

$$I_1'=(1-0.1)I_1=0.9I_1$$

P_2 也吸收10%的光能，有

$$I_2'=0.9I_1'\cos^2\theta$$

所以

$$\frac{I_2'}{I_0}=\frac{0.9^2I_2}{I_0}=0.304$$

12-48. 自然光和线偏振光的混合光束，通过一偏振片时，随着偏振片以光的传播方向为轴的转动，透射光的强度也跟着改变。如最强和最弱的光强之比为6∶1，那么入射光中自然光和线偏振光的强度之比为多大？

分析：偏振片的偏振化方向与混合光束中的线偏振光振动方向平行时，透射光最强，垂直时的透射光强最小，为自然光强度之半。

解： 设混合光束中的自然光光强为 I_0，线偏振光光强为 I_1，透射光强最大值为 I_{max}，最小值为 I_{min}，有

$$I_{max}=\frac{1}{2}I_0+I_1,\quad I_{min}=\frac{1}{2}I_0$$

$$\frac{I_{max}}{I_{min}}=\frac{I_0+2I_1}{I_0}=6$$

得

$$5I_0=2I_1$$

入射光中自然光和线偏振光的强度之比为

$$\frac{I_0}{I_1}=0.4$$

12-49. 水的折射率为 1.33,玻璃的折射率为 1.50。当光由水中射向玻璃而反射时,起偏振角为多少？当光由玻璃射向水面而反射时,起偏振角又为多少？

解: 设布儒斯特角为 α,水的折射率为 n_1,玻璃的介质率为 n_2。

光从水中射向玻璃而反射起偏时,由布儒斯特定律

$$\tan\ \alpha_1=\frac{n_2}{n_1}$$

得起偏角为

$$\alpha_1=\arctan\frac{n_2}{n_1}=48°26'$$

光从玻璃射向水中而反射起偏时,有

$$\tan\ \alpha_2=\frac{n_1}{n_2}$$

起偏角为

$$\alpha_2=\arctan\frac{n_1}{n_2}=41°34'$$

12-50. 怎样测定不透明电介质(例如珐琅)的折射率？今测得釉质的起偏振角 $i_B=58.0°$,试求它的折射率。

分析:根据布儒斯特定律,利用反射起偏确定介质的折射率,与该介质是否透明无关。

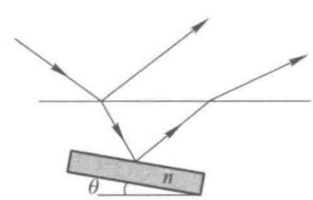
解: 设不透明介质的折射率为 n,在空气($n_1=1$)中观察反射光。用自然光入射,调节入射角,当反射光是垂直于入射面振动的线偏振光时,该入射角为布儒斯特角。有

$$\tan\ i_B=\frac{n}{n_1}=n$$

得

$$n=\tan\ 58.0°=1.60$$

12-51. 如习题 12-51 图所示,一块折射率 $n=1.50$ 的平面玻璃浸在水中,已知一束光入射到水面上时反射光是完全偏振光。若要使玻璃表面的反射光也是完全偏振光,则玻璃表面与水平面的夹角 θ 应是多大？



习题 12-51 图

分析:从水面反射的完全偏振光,由两部分反射光组成:从水面直接反射的完全偏振光和从玻璃表面反射后再经水面透射的完全偏振光。这就要求:自然光在水面的入射角是起偏角,透射入水的部分偏振光在玻璃上的入射角也是起偏角。

解: 如解图 12-51 所示,设自然光由空气射向

水面的入射角为 i_1，折射角为 γ，部分偏振光在水中玻璃上的入射角为 i_2。

根据布儒斯特定律，有

$$\tan i_1 = n_{水} = 1.33$$

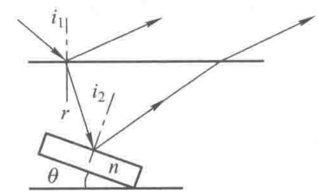
和
$$\tan i_2 = \frac{n}{n_{水}} = \frac{1.50}{1.33}$$

并有
$$i_1 + r = 90°$$

和
$$i_2 = r + \theta$$

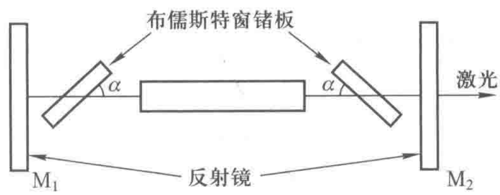
解得
$$i_1 = 53.06°,\quad i_2 = 48.44°$$

和
$$\theta = 11.5° = 11°30'$$



解图 12-51

12-52. 二氧化碳激光器谐振腔的布儒斯特窗一般用锗来制成，使能对 10.6 μm 附近的红外激光有较大的透射率。如果锗的折射率为 4.5，如习题12-52 图所示，试计算用锗制成的布儒斯特窗与放电管轴线所成之角 α。



习题 12-52 图

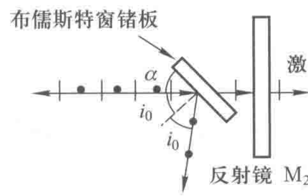
分析：光束在谐振腔的两个反射镜间来回多次的反射过程中，垂直于锗板入射面的光振动经不断反射而逸出谐振腔，平行于入射面的光振动则可几无损耗地透过布儒斯特窗，经多次反射并在激活介质中被连锁地放大，最终输出光振动在入射面内的线偏振激光束，如解图 12-52 所示。反射镜 M_1 和 M_2 分别为全反射镜和部分反射镜。

解：设锗板的折射率为 n，i_0 为锗板表面法向与轴线的夹角，也是沿轴线入射于锗板的光的入射角。当 i_0 为布儒斯特角时，有

$$\tan i_0 = n$$

$$i_0 = \arctan n = \arctan 4.5 = 77°28'$$

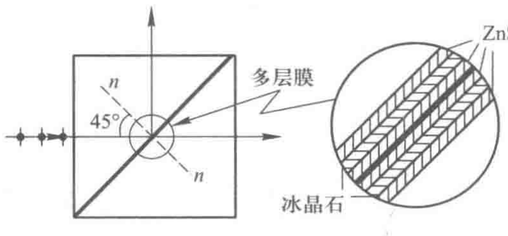
$$\alpha = 90° - i_0 = 12°32'$$



解图 12-52

12-53. 偏振分束器可把入射的自然光分成两束传播方向互相垂直的偏振光，其结构如习题 12-53 图所示。两个等边直角玻璃棱镜的斜面合在一起，两斜面间有一多层膜。多层膜是由高折射率材料（硫化锌，$n_H = 2.38$）和低折射率材料（冰晶石，$n_L = 1.25$）交替镀膜而成。如用氩离子激光（$\lambda = 514.5\text{nm}$）以 45° 角入射到多层膜上。(1) 为使从膜层反射的光为线偏振光，玻璃棱镜的折射率

应取多少？(2) 画出反射光和透射光的振动方向；(3) 为使透射光的偏振度最大，高折射率层和低折射率层的厚度的最小值是多少？



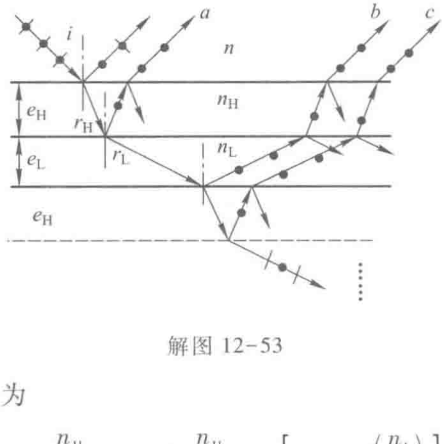
习题 12-53 图

分析：光束在玻璃棱镜内，以 45° 角入射到玻璃-高折射率膜层界面后，依次在各界面按满足光的折射定律和反射定律的方向传播。为使从各膜层反射的光为线偏振光，在各界面的入射角都应是布儒斯特角(玻璃与膜的界面除外)。当各膜层厚度满足两界面的反射光干涉加强条件时，垂直于入射面的波长为 λ 的光振动干涉加强，在透射光中则被减弱。当膜层很多时(一般为 10 层左右，取奇数层)，透射光成为振动方向平行于入射面的波长为 λ 的偏振光。这样，便可从一束单色光中得到两束传播方向互相垂直的线偏振光。

解：(1) 如解图 12-53 所示，沿光的传播方向，设薄膜按折射率为 $n_H \to n_L \to n_H \to n_L \to \cdots$ 的顺序排列。光束以 $i=45°$ 由折射率为 n 的玻璃入射于高折射率(n_H)薄膜，在 n_H 和 n_L 中的折射角分别为 r_H 和 r_L。

在 $n \to n_H$ 界面，有 $$n\sin i = n_H \sin r_H$$

在 $n_H \to n_L$ 界面，有 $$\tan r_H = \frac{n_L}{n_H}$$



解图 12-53

得玻璃棱镜的折射率为

$$n = \frac{n_H}{\sin i}\sin r_H = \frac{n_H}{\sin i}\sin\left[\arctan\left(\frac{n_L}{n_H}\right)\right]$$

$$=\frac{2.38}{\sin 45^\circ}\sin\left[\arctan\left(\frac{1.25}{2.38}\right)\right]=1.57$$

（2）由于各界面平行且交替排列，光束在各界面的入射角都是对应的布儒斯特角。因而，在各界面的反射光都是光振动垂直于入射面的偏振光。反射线都相互平行，并且与折射光线相垂直，如解图 12-53 所示。

（3）设 n_H 膜层厚度为 e_H，n_L 膜层厚度为 e_L。

在 n_H 膜两界面，波长为 λ 的反射光干涉加强时（如图中 b 和 c），光程差为

$$2e_H\sqrt{n_H^2-n_L^2\sin^2 r_L}+\frac{\lambda}{2}=k_1\lambda,\quad k_1=1,2,\cdots$$

同理，在 n_L 膜两界面波长为 λ 的反射光干涉加强时（如图中 a 和 b），光程差为

$$2e_L\sqrt{n_L^2-n_H^2\sin^2 r_H}+\frac{\lambda}{2}=k_2\lambda,\quad k_2=1,2,\cdots$$

为简化 e_H 和 e_L 的表达式，将满足布儒斯特定律时，反射角和折射角的关系 $r_H+r_L=\pi/2$ 代入光在两种界面传播时的折射定律，有

$$n\sin i=n_H\sin r_H=n_H\cos r_L$$

和

$$n_H\sin r_H=n_L\sin r_L=n_L\cos r_H$$

故有

$$\sqrt{n_H^2-n_L^2\sin^2 r_L}=n_H\sqrt{1-\sin^2 r_H}=n_H\cos r_H=\frac{n_H n}{n_L}\sin i$$

和

$$\sqrt{n_L^2-n_H^2\sin^2 r_H}=n_L\sqrt{1-\sin^2 r_L}=n_L\cos r_L=\frac{n_L n}{n_H}\sin i$$

可得

$$e_H=(2k_1-1)\frac{n_L}{4n_H n\sin i}\lambda,\quad k_1=1,2,\cdots$$

和

$$e_L=(2k_2-1)\frac{n_H}{4n_L n\sin i}\lambda,\quad k_2=1,2,\cdots$$

取 $k_1=1$ 和 $k_2=1$，得高、低折射率膜层的最小厚度分别为

$$e_H=\frac{1.25\times514.5}{4\times2.38\times1.57\times\sin 45^\circ}\text{ nm}=61\text{ nm}$$

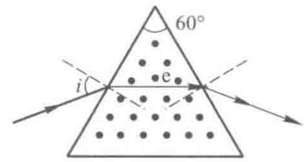
和

$$e_L=\frac{2.38\times514.5}{4\times1.25\times1.57\times\sin 45^\circ}\text{ nm}=221\text{ nm}$$

8. 双折射现象

12-54. 用方解石切割成一个 60°的正三角棱镜，光轴垂直于棱镜的正三角形截面。设非偏振光的入射角为 i，而 e 光在棱镜内的折射线与镜底边平行如习

题 12-54 图所示。求入射角 i,并在图中画出 o 光的光路。已知 $n_e=1.49$,$n_o=1.66$。



习题 12-54 图

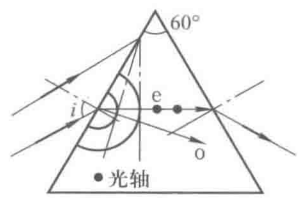
分析:非偏振光垂直于光轴方向入射到方解石晶体时,在晶体中垂直于光轴的平面内,o 光和 e 光的传播速度相差最大,有 $v_e>v_o$。两条光线的主平面不平行,o、e 光的振动方向分别垂直和平行于各自的主平面,都是线偏振光。o 光的球对称波面和 e 光以光轴为对称轴的旋转椭球波面在光轴方向上相切。所以,o、e 光的子波波面都可表示成以入射点为圆心的同心圆弧,大圆弧对应 e 光波面。

解: 如解图 12-54 所示,晶体内两条折射光线都在图示平面内。在这个平面内,对 e 光运用折射定律,有

$$\sin i=n_e\sin r_e$$

式中 i 为空气中的入射角,r_e 为 e 光在晶体内的折射角,据题图可知 $r_e=30°$。可得

$$i=\arcsin(n_e\sin r_e)=\arcsin(1.49\times\sin 30°)$$
$$=0.84\ \text{rad}=48°10'$$



解图 12-54

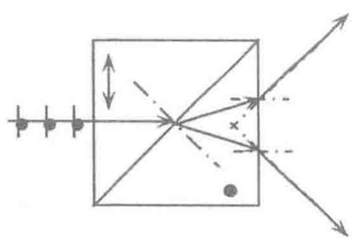
对 o 光运用折射定律,有

$$\sin i=n_o\sin r_o$$

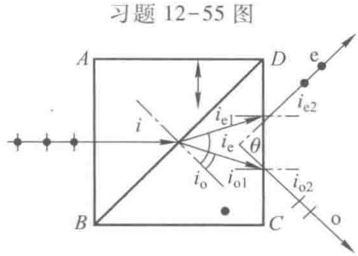
式中 r_o 为 o 光在晶体内的折射角,为

$$r_o=\arcsin\left(\frac{\sin i}{n_o}\right)=\arcsin\left(\frac{0.74}{1.66}\right)=0.47\ \text{rad}=26°40'$$

12-55. 如习题 12-55 图所示的沃拉斯顿棱镜是由两个 45° 的方解石棱镜组成的。光轴方向如图所示,以自然光入射,求两束出射光线间的夹角和振动方向。已知 $n_o=1.66$,$n_e=1.49$。


习题 12-55 图

分析:如解图 12-55 所示,对 ABD 棱镜,自然光垂直于光轴并垂直于晶体表面入射,在晶体内,o 光和 e 光分别以 v_o 和 v_e 沿原方向传播,$v_o<v_e$。对 CBD 棱镜,来自左边棱镜的光束也垂直于光轴入射,但对 BD 面是斜入射,因此 o 光和 e 光的传播方向将分开。e 光在左、右两棱镜中都以最大速率 v_e 传播。需注意,在



解图 12-55

棱镜 ABD 中 o、e 光的主平面重合,而在棱镜 CBD 中o、e光的主平面不重合;在棱镜 ABD 中的 o 光,在 CBD 中成为 e 光,在棱镜 ABD 中的 e 光,则成为 CBD 中的 o 光。当两光线从 CBD 棱镜出射后,都是从光密介质进入光疏介质,两光线将分得更开。

解:在 BD 界面,来自左边棱镜的光束以 $i=45°$ 入射。入射于 BD 的 o 光,折射成 e 光,入射的 e 光,则折射成 o 光。设折射角分别为 i_e 和 i_o。根据折射定律,有

$$n_e \sin i = n_o \sin i_o \quad 和 \quad n_o \sin i = n_e \sin i_e$$

解得 $$i_o = \arcsin\left(\frac{n_e \sin i}{n_o}\right) = \arcsin\left(\frac{1.49\times\sqrt{2}}{1.66\times2}\right) = 0.69\ \text{rad} = 39°24'$$

和 $$i_e = \arcsin\left(\frac{n_o \sin i}{n_e}\right) = \arcsin\left(\frac{1.66\times\sqrt{2}}{1.49\times2}\right) = 0.91\ \text{rad} = 51°58'$$

由解图 12-55 可知,o 光在 DC 界面的入射角为

$$i_{o1} = i - i_o = 45° - 39°24' = 5°36'$$

e 光在 DC 界面的入射角为

$$i_{e1} = i_e - i = 51°58' - 45° = 6°58'$$

再次运用折射定律,求得两个偏振光束在空气中的折射角,有

$$n_e \sin i_{e1} = \sin i_{e2} \quad 和 \quad n_o \sin i_{o1} = \sin i_{o2}$$

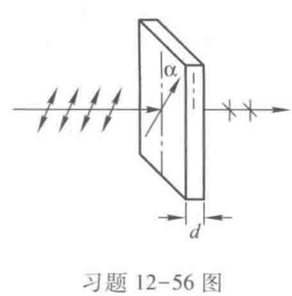
得 $$i_{e2} = \arcsin(n_e \sin i_{e1}) = \arcsin(0.18) = 0.18\ \text{rad} = 10°25'$$

和 $$i_{o2} = \arcsin(n_o \sin i_{o1}) = \arcsin(0.16) = 0.16\ \text{rad} = 9°19'$$

两束出射光线间的夹角为

$$\theta = i_{e2} + i_{o2} = 19°44'$$

12-56. 线偏振光垂直入射于双折射晶片,晶片的光轴与晶面平行,如习题 12-56 图所示。入射光的振动方向与晶片的光轴之间的夹角为 α,则偏振光在晶片内将分成振动面相互垂直的 o 光和 e 光。适当选择晶片的厚度,使透过晶片的 o 光和 e 光的相位差 $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$,这样的晶片称为 1/4 波片。已知石英晶片对钠黄光($\lambda = 589.3$ nm)的两个主折射率 $n_e = 1.553$, $n_o = 1.541$。求石英晶片制成 1/4 波片的最小厚度。



习题 12-56 图

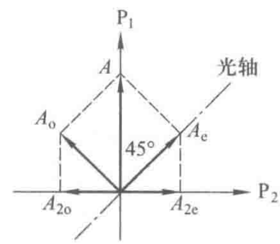
解:设石英晶片的厚度为 d,入射光的波长为 λ。通过 1/4 波片产生的光程差为

$$\delta = (n_e - n_o)d = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$$

$k=0$，对应 1/4 波片的最小厚度 d_0，得

$$d_0=\frac{\lambda}{4(n_e-n_o)}=\frac{589.3\times10^{-9}}{4\times(1.553-1.541)}\ \text{m}=0.012\ \text{mm}$$

12-57. 一厚度为 10 μm 的方解石晶片，其光轴平行于表面，放置在两正交偏振片之间，晶片的光轴与第一偏振片的偏振化方向夹角为 45°，若要使波长 600 nm 的光通过上述系统后呈现极大，晶片的厚度至少需磨去多少？



解图 12-57

分析：如解图 12-57 所示，经起偏器 P_1 透射的线偏振光（振幅为 A），其振动方向平行于 P_1 的透光方向，与晶片光轴成 45°，在晶片中形成传播方向相同但振动方向互相垂直的 o 光（振幅为 A_o）和 e 光（振幅为 A_e）。

o 光和 e 光以速率 v_o 和 v_e 在方解石晶片内传播，$v_o<v_e$。通过晶片厚度 d 后，两束偏振光有一与 d 有关的相位差 $\Delta\phi_0$。

当 o 光和 e 光垂直入射于检偏器 P_2 时，与 P_2 透光方向平行的光振动分量 A_{2o} 和 A_{2e} 可以透过，但方向相反，又附加了相位 π。

所以，图中 A_{2o} 和 A_{2e} 表示两个振动方向相同、频率相同、相位差恒定的相干光。当总相位差 $\Delta\phi$ 为 2π 的整数倍时，经 P_2 的透射偏振光将因干涉而呈现极大。

解：设晶片厚度为 d，A_o 和 A_e 在晶片后表面的相位差为

$$\Delta\phi_0=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d$$

通过 P_2 的 A_{2o} 和 A_{2e} 有附加相位差 π，在 P_2 方向振动的 A_{2o} 和 A_{2e} 间总的相位差为

$$\Delta\phi=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d+\pi$$

干涉加强时 $\Delta\phi=2k\pi$

能够呈现透射偏振光干涉极大的晶片厚度为

$$d=(2k-1)\frac{\lambda}{2(n_o-n_e)}=(2k-1)\frac{600\times10^{-3}}{2\times(1.66-1.49)}\ \mu\text{m}=1.76(2k-1)\ \mu\text{m}$$

取 $k=3$，得 $d=1.76\times5\ \mu\text{m}=8.8\ \mu\text{m}$

需要磨去的晶片厚度为

$$\Delta=(10-8.8)\ \mu\text{m}=1.2\ \mu\text{m}$$

第五篇

量子物理基础

第十三章　早期量子论和量子力学基础
第十四章　激光和固体的量子理论
第十五章　原子核物理和粒子物理简介

第十三章　早期量子论和量子力学基础

一、教学基本要求

1. 理解黑体辐射、光电效应、康普顿效应和氢原子光谱等的实验规律，经典理论解释的困难和早期量子论的解释。

2. 理解戴维孙-革末实验规律，德布罗意的物质波假设.理解物质波的波粒二象性和不确定关系。

3. 理解波函数及其概率解释.理解薛定谔方程及其对一维无限深势阱、一维势垒和隧道效应的量子力学描述。

4. 理解氢原子的能量和角动量量子化，电子自旋.理解原子的壳层结构。

二、本章习题分类

1. 黑体辐射规律
2. 光电效应和康普顿效应
3. 玻尔氢原子理论
4. 德布罗意波和不确定关系
5. 波函数计算

三、习题分析与解答

1. 黑体辐射规律

13-1. 估测星球表面温度的方法之一是：将星球看成黑体，测量它的辐射峰值波长 λ_m，利用维恩位移定律便可估计其表面温度。如果测得北极星和天狼星的 λ_m 分别为 0.35 μm 和 0.29 μm，试计算它们的表面温度。

解： 根据维恩位移定律　　$T\lambda_m = b$

得北极星的表面温度为

$$T_1 = \frac{b}{\lambda_{m1}} = \frac{2.897\times10^{-3}}{0.35\times10^{-6}}\ \text{K} = 8.28\times10^3\ \text{K}$$

天狼星的表面温度为

$$T_2 = \frac{b}{\lambda_{m2}} = \frac{2.897\times10^{-3}}{0.29\times10^{-6}}\ \mathrm{K} = 9.99\times10^3\ \mathrm{K}$$

13-2. 在加热黑体过程中，其单色辐出度的峰值波长是由 0.69 μm 变化到 0.50 μm，求总辐出度改变为原来的多少倍？

分析：根据黑体被加热前后辐射的峰值波长之比，由维恩位移定律得到其温度之比。斯特藩-玻耳兹曼定律给出了黑体的总辐出度与绝对温度的四次方成正比，由此可求得黑体被加热前后的总辐出度之比。

解：设 $\lambda_{m1}=0.69\ \mu m$，$\lambda_{m2}=0.50\ \mu m$。根据维恩位移定律 $T\lambda_m=b$，可得黑体温度之比为

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}}=\frac{0.69}{0.50}=1.38$$

根据斯特藩-玻耳兹曼定律 $M_0=\sigma T^4$

得黑体总辐出度之比为 $$\frac{M_{02}}{M_{01}}=\frac{T_2^4}{T_1^4}=(1.38)^4=3.63$$

13-3. 假设太阳表面温度为 5 800 K，太阳半径为 6.96×10^8 m。如果认为太阳的辐射是稳定的，求太阳在 1 年内由于辐射，它的质量减小了多少？

解：太阳通过其表面辐射出的总功率为

$$P=M_0S=\sigma T^4 4\pi R^2$$

太阳在一年内辐射出的总能量为

$$\Delta E=P\Delta t$$

太阳在一年内的质量亏损为

$$\begin{aligned}\Delta m &= \frac{\Delta E}{c^2}=\frac{4\pi R^2\sigma T^4\Delta t}{c^2}\\ &=\frac{4\pi\times(6.96\times10^8)^2\times5.67\times10^{-8}\times(5.8\times10^3)^4\times3\ 600\times24\times365}{(3\times10^8)^2}\ \mathrm{kg}\\ &=1.37\times10^{17}\ \mathrm{kg}\end{aligned}$$

*13-4. 黑体的温度 $T_1=6\ 000$ K，问 $\lambda_1=0.35\ \mu m$ 和 $\lambda_2=0.70\ \mu m$ 的单色辐出度之比等于多少？当温度上升到 $T_2=7\ 000$ K 时，λ_1 的单色辐出度增加到原来的多少倍？

解：普朗克公式 $$M_\lambda(T)=2\pi hc^2\lambda^{-5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$$

(1) 温度为 T_1 时,$\lambda_1=0.35\ \mu\mathrm{m}=0.35\times10^{-6}\mathrm{m}$ 和 $\lambda_2=0.70\ \mu\mathrm{m}=0.70\times10^{-6}\mathrm{m}$ 的单色辐出度之比为

$$\frac{M_{\lambda1}(T_1)}{M_{\lambda2}(T_1)}=\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5\frac{e^{hc/\lambda_2kT_1}-1}{e^{hc/\lambda_1kT_1}-1}$$

式中 $$e^{hc/\lambda_1kT_1}-1=\exp\left(\frac{hc}{\lambda_1kT_1}\right)-1=\exp\left(\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{0.35\times10^{-6}\times1.38\times10^{-23}\times6\times10^3}\right)-1=955.6$$

$$e^{hc/\lambda_2kT_1}-1=\exp\left(\frac{hc}{\lambda_2kT_1}\right)-1=\exp\left(\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{0.7\times10^{-6}\times1.38\times10^{-23}\times6\times10^3}\right)-1=29.9$$

所以,有 $$\frac{M_{\lambda1}(T_1)}{M_{\lambda2}(T_1)}=\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5\frac{e^{hc/\lambda_2kT_1}-1}{e^{hc/\lambda_1kT_1}-1}=2^5\times\frac{29.9}{955.6}=1.001\ 3$$

(2) 当温度上升到 $T_2=7\ 000\ \mathrm{K}$ 时,λ_1 的单色辐出度为

$$M_{\lambda1}(T_2)=2\pi hc^2\lambda_1^{-5}\frac{1}{e^{hc/\lambda_1kT_2}-1}$$

与温度为 T_1 时 λ_1 单色辐出度的比值为

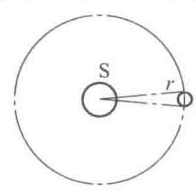
$$\frac{M_{\lambda1}(T_2)}{M_{\lambda1}(T_1)}=\frac{e^{hc/\lambda_1kT_1}-1}{e^{hc/\lambda_1kT_2}-1}$$

式中 $$e^{hc/\lambda_1kT_2}-1=\exp\left(\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{0.35\times10^{-6}\times1.38\times10^{-23}\times7\times10^3}\right)-1=357.8$$

所以,有 $$\frac{M_{\lambda1}(T_2)}{M_{\lambda1}(T_1)}=\frac{955.6}{357.8}=2.67$$

*13-5. 假定太阳和地球都可以看成黑体,如太阳表面温度 $T_S=6\ 000\ \mathrm{K}$,地球表面各处温度相同,试求地球的表面温度(已知太阳的半径 $R_S=6.96\times10^5\ \mathrm{km}$,太阳到地球的距离 $r=1.496\times10^8\ \mathrm{km}$)。

分析:根据简化模型,太阳在单位时间内辐射的能量均匀分布在以 r 为半径的球面上,单位时间内地球接收到的辐射能量(功率),可等效为均匀分布在过地心的地球截面上,如解图 13-5 所示。根据斯特藩-玻耳兹曼定律,由太阳表面的辐出度(单位面积辐射的功率),可得到太阳的辐射总功率。根据地球接收到的辐射功率,再由斯特藩-玻耳兹曼定律,求得地球的表面温度。



解图 13-5

解: 太阳辐射的总功率为

$$P_S=M_S(T_S)S=\sigma T_S^4 4\pi R_S^2$$

在半径为 r 的球面上，单位面积上的太阳辐射功率为 $P_S/4\pi r^2$，地球接收太阳辐射的等效截面为 $S_E=\pi R_E^2$，R_E 为地球半径。因此，地球接收到的辐射功率为

$$P_E=\frac{P_S}{4\pi r^2}S_E=\frac{\sigma 4\pi R_S^2T_S^4}{4\pi r^2}\pi R_E^2=\frac{\sigma\pi R_S^2T_S^4}{r^2}R_E^2$$

根据斯特藩-玻耳兹曼定律，地球表面单位面积辐射的功率（辐出度）为

$$M_E(T_E)=\sigma T_E^4=\frac{P_E}{4\pi R_E^2}=\frac{\sigma R_S^2}{4r^2}T_S^4$$

地球表面的温度为

$$T_E=T_S\sqrt{\frac{R_S}{2r}}=6\times10^3\times\sqrt{\frac{6.96\times10^8}{2\times1.496\times10^{11}}}\ \text{K}=289\ \text{K}$$

13-6. 有一空腔辐射体，在壁上有一直径为 0.05 mm 的小圆孔，腔内温度为 7 500 K，试求在 500~501 nm 的微小波长范围内单位时间从小孔辐射出来的能量。

分析：空腔壁上的小圆孔可视作黑体，其辐出度随辐射波长的变化关系，由普朗克公式给出。在 $\lambda\sim\lambda+\Delta\lambda$ 波长范围内，小圆孔单位面积的辐出度可近似表示为 $M_\lambda(T)\Delta\lambda$，其与小孔面积的乘积即为从小孔辐射的功率。

解：在 $\lambda\sim\lambda+\Delta\lambda$ 波长范围内，小圆孔单位面积的辐出度为

$$M_\lambda(T)\Delta\lambda=2\pi hc^2\lambda^{-5}\frac{\Delta\lambda}{e^{hc/\lambda kT}-1}$$

设小圆孔的面积为 S，则从小圆孔辐射的功率（单位时间辐射的能量）为

$$P=M_\lambda(T)\Delta\lambda S=2\pi hc^2\lambda^{-5}\frac{\Delta\lambda}{e^{hc/\lambda kT}-1}\left(\frac{1}{4}\pi d^2\right)=\frac{(c\pi d)^2h\Delta\lambda}{2\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$$

式中 $\dfrac{(c\pi d)^2h\Delta\lambda}{2\lambda^5}=\dfrac{(3\times10^8\times3.14\times5\times10^{-5})^2\times6.63\times10^{-34}\times1\times10^{-9}}{2\times(500\times10^{-9})^5}\ \text{J/s}=2.36\times10^{-2}\ \text{J/s}$

$$e^{hc/\lambda kT}-1=\exp\left(\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{500\times10^{-9}\times1.38\times10^{-23}\times7.5\times10^3}\right)-1=45.7$$

得　$P=M_\lambda(T)\Delta\lambda S=\dfrac{(c\pi d)^2h\Delta\lambda}{2\lambda^5}\dfrac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}=\dfrac{2.36\times10^{-2}}{45.7}\ \text{J/s}=5.16\times10^{-4}\ \text{J/s}$

2. 光电效应和康普顿效应

13-7. 钾的光电效应红限波长为 $\lambda_0=0.62\ \mu\text{m}$。求（1）钾的逸出功；（2）在

波长 $\lambda=330$ nm 的紫外线照射下，钾的遏止电势差。

解：由爱因斯坦光电效应方程 $h\nu=E_{km}+A$，可得

（1）$E_{km}=0$ 时，入射光子的能量等于逸出功，入射光子的频率为红限频率时，有

$$A=h\nu_0=\frac{hc}{\lambda_0}=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{0.62\times10^{-6}}\ \text{J}=3.21\times10^{-19}\ \text{J}=2.01\ \text{eV}$$

（2）使光电流为零，阴、阳电极间反向的电场力做功在数值上应等于光电子的最大初动能，施加于电极间的电势差为遏止电势差 U_a，有

$$E_{km}=eU_a$$

得

$$U_a=\frac{E_{km}}{e}=\frac{h\nu-A}{e}=\frac{h(\nu-\nu_0)}{e}=\frac{hc}{e}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_0}\right)$$

$$=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{1.602\times10^{-19}\times1\times10^{-9}}\left(\frac{1}{330}-\frac{1}{620}\right)\ \text{V}=1.76\ \text{V}$$

13-8. 在光电效应实验中，有个学生测得某金属的遏止电势差 U_a 和入射光波长 λ 有下列对应关系：

λ/nm	U_a/V
253.6	2.60
283.0	2.11
303.9	1.81
330.2	1.47
366.3	1.10
435.8	0.57

画出遏止电势差与入射光频率的曲线，并求出：（1）普朗克常量 h；（2）该金属的逸出功；（3）该金属的光电效应红限频率。

解：（1）真空中 $c=\lambda\nu$，实验测得的 λ、U_a 与 ν 的对应关系如下表所示。

λ/nm	$\nu/10^{14}$ Hz	U_a/V
253.6	11.8	2.60
283.0	10.6	2.11
303.9	9.87	1.81
330.2	9.09	1.47
366.3	8.19	1.10
435.8	6.88	0.57

根据实验数据可得到一直线，如解图 13-8 所示。方程为

$$U_a=k\nu-U_0$$

式中 k 为直线斜率，U_0为纵轴截距。

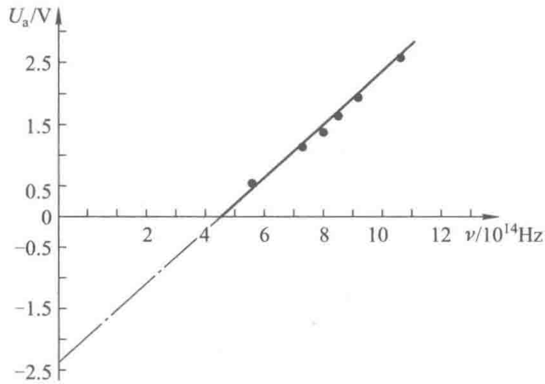
将直线方程表示为　　$eU_a=ek\nu-eU_0$

并与光电效应方程　　$E_{km}=h\nu-A$

比较可得　　$h=ek,\quad A=eU_0,\quad E_{km}=eU_a$

由实验数据可求得直线斜率

$$k=\frac{\Delta U}{\Delta\nu}=\frac{2.60-0.57}{(11.8-6.88)\times10^{14}}\ \mathrm{V\cdot s}=4.13\times10^{-15}\ \mathrm{V\cdot s}$$



解图 13-8

所以，普朗克常量为

$$h=ek=1.60\times10^{-19}\times4.13\times10^{-15}\ \mathrm{J\cdot s}=6.61\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$$

(2) 将实验数据代入直线方程，得到纵轴截距

$$U_0=k\nu-U_a=(4.13\times10^{-15}\times11.8\times10^{14}-2.60)\ \mathrm{V}=2.27\ \mathrm{V}$$

该金属的逸出功为　　$A=eU_0=2.27\ \mathrm{eV}$

(3) 根据实验方程，$U_a=0$ 时，$E_{km}=0$，　$\nu_0=\dfrac{U_0}{k}=\dfrac{2.27}{4.13\times10^{-15}}\ \mathrm{Hz}=5.50\times10^{14}\ \mathrm{Hz}$

红限波长为　　$\lambda_0=\dfrac{c}{\nu_0}=545.5\ \mathrm{nm}$

13-9. 铝的逸出功为 4.2 eV。今用波长为 200 nm 的紫外线照射到铝表面上，发射的光电子的最大初动能为多少？遏止电势差为多大？铝的红限波长是多大？

解：根据光电效应方程　　$E_{km}=h\nu-A$

和实验规律 $eU_a = ek\nu - eU_0$

得光电子的最大初动能

$$E_{km} = h\nu - A = h\frac{c}{\lambda} - A = 3.23\times10^{-19}\ \mathrm{J} = 2.0\ \mathrm{eV}$$

遏止电势差 $U_a = \dfrac{E_{km}}{e} = 2.0\ \mathrm{V}$

由逸出功与红限关系 $A = h\nu_0 = \dfrac{hc}{\lambda_0}$

得铝的红限波长为 $\lambda_0 = \dfrac{hc}{A} = 296\ \mathrm{nm}$

13-10. 能引起人眼视觉的最小光强约为 $10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$,如瞳孔的面积约为 $0.5\times10^{-4}\ \mathrm{m^2}$,计算每秒平均有几个光子进入瞳孔到达视网膜上。设光的平均波长为 550 nm。

分析:根据爱因斯坦光子理论,一束光可看作一束光子流。每个光子的能量为 $h\nu$,一束光的强度为 $Nh\nu$,N 为单位时间内通过面积 S 的平均光子数。

解:设最小光强为 I,瞳孔的面积为 S,单位时间内垂直进入瞳孔单位面积的平均光子数为 n。有

$$I = nh\nu = \frac{Nh\nu}{S} = \frac{Nhc}{S\lambda}$$

每秒平均进入瞳孔的光子数为

$$N = \frac{IS\lambda}{hc} = \frac{1\times10^{-12}\times0.5\times10^{-4}\times550\times10^{-9}}{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}} = 138$$

*13-11. 100 W 钨丝灯在 1 800 K 温度下工作,假定可视其为黑体,试计算每秒内在 500~500.1 nm 波长间隔内发射的光子数。

解:设钨丝灯的辐射面积(黑体辐射面积)为 S,由斯特藩-玻耳兹曼定律,可得钨丝灯的功率为

$$P = \sigma T^4 S = 100\ \mathrm{W}$$

由普朗克公式,温度为 T 时,黑体在 $\lambda\sim\lambda+\Delta\lambda$ 波长范围内辐射的功率为

$$P(\Delta\lambda, T) = M_\lambda(T)\Delta\lambda S = 2\pi hc^2\lambda^{-5}\frac{\Delta\lambda}{e^{hc/\lambda kT}-1}\frac{P}{\sigma T^4}$$

式中 $\lambda = 500\ \mathrm{nm}$,$\Delta\lambda = 0.1\ \mathrm{nm}$。

由爱因斯坦光子理论,黑体在 $\lambda\sim\lambda+\Delta\lambda$ 波长范围内辐射的功率,为单位时

间内发射出的 N 个能量为 $\varepsilon=h\nu$ 的光子的总能量,故有

$$P(\Delta\lambda,T)=N\varepsilon=Nh\frac{c}{\lambda}$$

整理上述关系式,可得

$$N=\frac{P(\Delta\lambda,T)\lambda}{hc}=\frac{2\pi c\Delta\lambda P}{\sigma T^4\lambda^4}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$$

代入数据可得式中

$$\frac{2\pi c\Delta\lambda P}{\sigma(T\lambda)^4}=\frac{2\times3.14\times3\times10^8\times0.1\times10^{-9}\times100}{5.67\times10^{-8}\times(1.8\times10^3\times500\times10^{-9})^4}=5.06\times10^{20}$$

$$e^{hc/\lambda kT}-1=\exp\left(\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{500\times10^{-9}\times1.38\times10^{-23}\times1.8\times10^3}\right)-1=9.02\times10^6$$

每秒在 500~500.1 nm 波长间隔内发射的光子数为

$$N=\frac{5.06\times10^{20}}{9.02\times10^6}=5.61\times10^{13}$$

13-12. 如果一个光子的能量等于一个电子的静止能量,问该光子的频率、波长和动量各是多少?在电磁波谱中属于何种射线?

解:设电子的静止质量为 m_{e0},静止能量为 ε_{e0},光子的能量为 ε,有

$$\varepsilon_{e0}=m_{e0}c^2,\quad \varepsilon=h\nu$$

因

$$m_{e0}c^2=h\nu$$

得光子的频率为

$$\nu=\frac{m_{e0}c^2}{h}=\frac{9.11\times10^{-31}\times(3\times10^8)^2}{6.63\times10^{-34}}\ \text{Hz}=1.24\times10^{20}\ \text{Hz}$$

光子波长为 $\lambda=\dfrac{c}{\nu}=2.43\times10^{-12}\ \text{nm}=2.43\times10^{-3}\ \text{nm}$

光子动量为 $p=\dfrac{\varepsilon}{c}=m_{e0}c=\dfrac{h}{\lambda}=2.73\times10^{-22}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$

该光子在电磁波谱中属于 γ 射线。

13-13. 试根据相对论力学,应用能量守恒定律和动量守恒定律,讨论光子和自由电子之间的碰撞:(1) 证明处于静止的自由电子是不能一次完全吸收一个光子的;(2) 证明处于运动的自由电子也是不能一次完全吸收一个光子的;(3) 说明处于什么状态的电子才能吸收光子而产生光电效应。

证:设光子能量为 $h\nu$、动量为 $\dfrac{h\nu}{c}$,与静止质量为 m_0 的自由电子发生碰撞。用

E 和 p 分别表示碰撞后自由电子的能量和动量。设碰撞后这个光子湮没并把它的全部能量和动量转移给自由电子。

(1) 初始时自由电子是静止的,其静止能量为 E_0。取相对电子静止的参考系,根据能量守恒有

$$h\nu+E_0=E$$

动量守恒有
$$\frac{h\nu}{c}+0=p=\frac{\sqrt{E^2-E_0^2}}{c}$$

解以上两式可得
$$\sqrt{E-E_0}=\sqrt{E+E_0}$$

上式只有在 $E_0=0$ 情况下才能成立。因为任何实物粒子都具有非零的静止能量,即 $E_0\neq0$。所以,静止的自由电子是不能一次完全吸收一个光子的。

(2) 初始时自由电子是运动的。因电子不受束缚,故可取相对电子静止的惯性参照系。在此参照系内光子的能量不变,电子的初始能量仍用 E_0表示,初动量为零。碰撞后自由电子的能量和动量仍分别用 E 和 p 表示。根据能量守恒有

$$h\nu+E_0=E$$

动量守恒有
$$\frac{h\nu}{c}+0=p=\frac{\sqrt{E^2-E_0^2}}{c}$$

结论与(1)相同。所以,相对惯性系运动的自由电子也是不能一次完全吸收一个光子的。

(3) 自由电子不能一次完全吸收一个光子,是因为这过程不满足动量守恒定律。

当电子处于束缚状态,需要能量 A 才能成为自由电子时,其所受束缚能为 $-A$。设束缚电子吸收一个光子后的能量为 E、速度为 v。根据能量守恒有

$$h\nu+E_0-A=E$$

即
$$h\nu=(E-E_0)+A$$

在 $v\ll c$ 情况下,式中 $E-E_0=\frac{1}{2}m_0v^2$,

即有
$$h\nu=\frac{1}{2}m_0v^2+A$$

这就是光电效应的爱因斯坦公式。

13-14.已知 X 射线的光子能量为 0.60 MeV,在康普顿散射后波长改变了20%,求反冲电子获得的能量和动量。

解: (1) 设入射光子的能量为 ε_0,波长为 λ_0;散射光子的能量为 ε_φ,波长为

λ;反冲电子的能量为 ε_e。则有

$$\varepsilon_0 = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = 1.2\lambda_0$$

$$\varepsilon_\varphi = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{1.2\lambda_0} = \frac{\varepsilon_0}{1.2}$$

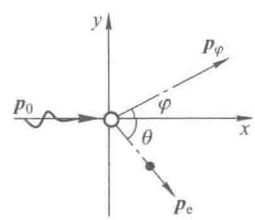
根据能量守恒定律,有

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_\varphi + \varepsilon_e$$

解得反冲电子的能量为

$$\begin{aligned}\varepsilon_e &= \varepsilon_0 - \varepsilon_\varphi = \left(1 - \frac{1}{1.2}\right)\varepsilon_0 = \left(1 - \frac{1}{1.2}\right) \times 0.60\ \mathrm{MeV} \\ &= 0.10\ \mathrm{MeV}\end{aligned}$$

(2) 如解图 13-14 所示,设入射光子的动量 $\boldsymbol{p}_0$沿 x 轴正方向,散射光子的动量为 $\boldsymbol{p}_\varphi$,反冲电子的动量为 $\boldsymbol{p}_e$。



解图 13-14

由康普顿散射效应可知

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 0.2\lambda_0 = \frac{2h}{m_{e0}c}\sin^2\frac{\varphi}{2} = 2\lambda_C\ \sin^2\frac{\varphi}{2}$$

解得散射角

$$\begin{aligned}\varphi &= 2\arcsin\sqrt{\frac{0.2\lambda_0}{2\lambda_C}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{0.2hc}{2\lambda_C\varepsilon_0}} \\ &= 2\arcsin\sqrt{8.5\times10^{-2}} = 0.59\ \mathrm{rad} = 33.96°\end{aligned}$$

计算中利用了电子的康普顿波长 $\lambda_C = \dfrac{h}{m_{e0}} = 2.43\times10^{-12}$ m。

反冲电子的动量 $\boldsymbol{p}_e$可由动量守恒定律求得,由

$$0 = p_\varphi \sin\varphi - p_e \sin\theta$$

和

$$p_e^2 = p_\varphi^2 + p_0^2 - 2p_0p_\varphi\cos\varphi$$

两式解得

$$\begin{aligned}p_e &= \sqrt{p_\varphi^2 + p_0^2 - 2p_0p_\varphi\cos\varphi} \\ &= \frac{h}{\lambda\lambda_0}\sqrt{\lambda^2 + \lambda_0^2 - 2\lambda\lambda_0\cos\varphi} = \frac{h}{1.2\lambda_0}\sqrt{1.2^2 + 1 - 2\times1.2\cos\varphi} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{1.2c}\sqrt{2.44 - 2.4\cos\varphi} = 1.78\times10^{-22}\ \mathrm{kg\cdot m/s}\end{aligned}$$

和

$$\theta = \arcsin\left(\frac{p_\varphi}{p_e}\sin\varphi\right) = \arcsin\left(\frac{\varepsilon_0}{1.2cp_e}\sin\varphi\right)$$

$$=\arcsin 0.83=0.99\ \text{rad}=56.57°$$

13-15. 在康普顿散射中，入射 X 射线的波长为 3×10^{-3} nm。反冲电子的速率为 $0.6c$，求散射光子的波长和散射方向。

解： 设电子的静止质量为 m_0，在反冲中获得动能为

$$\Delta\varepsilon=mc^2-m_0c^2=\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-1\right)m_0c^2$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1-(0.6c/c)^2}}-1\right)m_0c^2=0.25m_0c^2$$

设入射光子的能量为 ε_0，波长为 λ_0，散射光子的能量为 ε_φ，波长为 λ。由能量守恒定律，有

$$\varepsilon_\varphi=\varepsilon_0-\Delta\varepsilon$$

即

$$\frac{hc}{\lambda}=\frac{hc}{\lambda_0}-\Delta\varepsilon$$

解得散射光子的波长为

$$\lambda=\frac{hc\lambda_0}{hc-\Delta\varepsilon\lambda_0}=\frac{h\lambda_0}{h-0.25m_0c\lambda_0}$$

$$=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{-12}}{6.63\times10^{-34}-0.25\times9.11\times10^{-31}\times3\times10^{8}\times3\times10^{-12}}\ \text{m}=4.34\times10^{-3}\ \text{nm}$$

由康普顿散射效应可知

$$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0=\frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\varphi}{2}=2\lambda_C\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

得散射角为

$$\varphi=2\arcsin\sqrt{\frac{\lambda-\lambda_0}{2\lambda_C}}=2\arcsin\sqrt{\frac{(4.34-3)\times10^{-3}}{2\times2.43\times10^{-3}}}=1.11\ \text{rad}=63°21'$$

式中 $\lambda_C=\dfrac{h}{m_0c}=2.43\times10^{-12}$ m 为电子的康普顿波长。

13-16. 以 $\lambda_1=400$ nm 的可见光和 $\lambda_2=0.04$ nm 的 X 射线与自由电子碰撞，在 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 的方向上观察散射光。(1) 计算两种情况下，波长的相对改变量 $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda}$ 之比和电子获得的动能之比；(2) 欲获得明显的康普顿效应，应如何选取入射光？

解: 在散射角 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 的方向上,散射光波长的改变量为康普顿波长

$$\Delta\lambda=\lambda_C=2.43\times10^{-3}\ \text{nm}$$

与散射物质及入射光波长无关。

设入射光的能量为 $\varepsilon_0=h\nu_0=\dfrac{hc}{\lambda_0}$,散射光的能量为 $\varepsilon_\varphi=h\nu_\varphi=\dfrac{hc}{\lambda}$,电子获得的动能为 $\Delta\varepsilon$。根据能量守恒定律,电子获得的动能为

$$\Delta\varepsilon=\varepsilon_0-\varepsilon_\varphi$$

即

$$\Delta\varepsilon=\frac{hc}{\lambda_0}-\frac{hc}{\lambda}=hc\,\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda\lambda_0}=hc\,\frac{\Delta\lambda}{(\lambda_0+\Delta\lambda)\lambda_0}$$

(1) 设可见光波长为 λ_1,X 射线波长为 λ_2。在两种情况下,波长的相对改变量之比为

$$\frac{\Delta\lambda/\lambda_1}{\Delta\lambda/\lambda_2}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{0.04}{400}=1\times10^{-4}$$

电子获得的动能之比为

$$\frac{\Delta\varepsilon_1}{\Delta\varepsilon_2}=\frac{(\lambda_2+\Delta\lambda)\lambda_2}{(\lambda_1+\Delta\lambda)\lambda_1}\approx\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2=1\times10^{-8}$$

(2) 由以上计算可知,用 X 射线与自由电子碰撞,波长的相对改变量和电子获得的动能,均远大于可见光与自由电子碰撞的结果。所以,欲获得明显的康普顿效应,入射光应选择短波长的 X 射线。

3. 玻尔氢原子理论

13-17. 在基态氢原子被外来单色光激发后发出的巴耳末系中,仅观察到三条谱线,试求:(1) 外来光的波长;(2) 这三条谱线的波长。

解: 根据氢原子光谱的实验规律,原子由高能态 n 向低能态 m 跃迁时,发出谱线的频率为

$$\nu_{mn}=Rc\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

巴耳末系谱线由高能态 n 向 $m=2$ 的低能态跃迁所产生。巴耳末系中的三条谱线,可以是 $5\to2, 4\to2, 3\to2$。

(1) 把原子从基态 $m=1$ 激发到 $n=5$ 的能级所需能量为

$$E=E_5-E_1=h\nu_{15}$$

式中
$$\nu_{15}=Rc\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5^2}\right)=Rc\left(\frac{24}{25}\right)$$

外来光的波长为 $\lambda_{15}=\dfrac{c}{\nu_{15}}=\dfrac{25}{24R}=\dfrac{25}{24\times1.097\times10^7}\ \text{nm}=95.0\ \text{nm}$

(2) 巴耳末系($m=2$)谱线的波长为

$$\lambda_{2n}=\frac{c}{\nu_{2n}}=\frac{1}{R}\left(\frac{4n^2}{n^2-4}\right)$$

原子由 $n=3$、4、5 能态向 $m=2$ 能态跃迁时，激发的三条巴耳末系谱线的波长分别为

$$\lambda_{23}=\frac{1}{R}\left(\frac{4\times3^2}{3^2-4}\right)=656.3\ \text{nm}$$

$$\lambda_{24}=\frac{1}{R}\left(\frac{4\times4^2}{4^2-4}\right)=486.2\ \text{nm}$$

$$\lambda_{25}=\frac{1}{R}\left(\frac{4\times5^2}{5^2-4}\right)=434.1\ \text{nm}$$

13-18. 在气体放电管中，高速电子撞击原子发光。如高速电子的能量为 12.2 eV，轰击处于基态的氢原子，试求氢原子被激发后所能发射的光谱线波长。

解： 设高速电子的能量为 E，把氢原子从基态 E_1 激发到高能态 E_n。有

$$E=E_n-E_1=12.2\ \text{eV}$$

氢原子的能级为
$$E_n=\frac{E_1}{n^2}$$

式中 E_1 为氢原子基态的能量　$E_1=-13.6\ \text{eV}$

可解得
$$n=\sqrt{\frac{E_1}{E+E_1}}=\sqrt{\frac{-13.6}{12.2-13.6}}=3.1$$

取 $n=3$，高速电子将氢原子从基态激发到 E_3 能级。

根据跃迁的频率条件，处于 E_n 能级的氢原子向 E_m 能级跃迁，发射光子的频率为

$$\nu_{mn}=\frac{1}{h}(E_n-E_m)$$

波长为
$$\lambda_{mn}=\frac{c}{\nu_{mn}}=\frac{hc}{E_n-E_m}=\frac{hc}{E_1}\frac{n^2m^2}{(m^2-n^2)}=-91.2\times\frac{n^2m^2}{(m^2-n^2)}\ \text{nm}$$

跃迁为 $E_3\rightarrow E_1$ 发射光子的波长为

$$\lambda_{13}=-91.2\times\frac{3^2\times1^2}{(1-3^2)}\ \text{nm}=102.6\ \text{nm}$$

跃迁为 $E_3 \to E_2$ 发射光子的波长为

$$\lambda_{23} = -91.2 \times \frac{3^2 \times 2^2}{(2^2 - 3^2)}\ \text{nm} = 656.6\ \text{nm}$$

跃迁为 $E_2 \to E_1$ 发射光子的波长为

$$\lambda_{12} = -91.2 \times \frac{2^2}{(1 - 2^2)}\ \text{nm} = 121.6\ \text{nm}$$

13-19. 试计算氢原子各线系的最长的波长 λ_{lm} 和最短的波长 λ_{sm}。

解： 氢原子各线系谱线的波数为 $\sigma = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$， $n > k$

波长为 $$\lambda = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{R}\frac{n^2k^2}{(n^2 - k^2)} = \frac{1}{1.097 \times 10^7}\frac{n^2k^2}{(n^2 - k^2)} = 91.2 \times \frac{n^2k^2}{(n^2 - k^2)}\ \text{nm}$$

$n \to \infty$ 为各线系最短波长 λ_{sm}，有

$$\lambda_{\text{sm}}(k) = 91.2 \times \frac{k^2}{\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)} = 91.2k^2\ \text{nm}$$

$n = k+1$ 为各线系最长波长 λ_{lm}，有

$$\lambda_{\text{lm}}(n,k) = 91.2 \times \frac{n^2k^2}{(n+k)(n-k)} = 91.2 \times \frac{n^2k^2}{(n+k)}\ \text{nm}$$

计算得到氢原子各线系最长和最短波长如下表所示

光谱谱系		最短波长 λ_{sm}	最长波长 λ_{lm}
莱曼系	$k=1$	91.2 nm	121.6 nm
巴耳末系	$k=2$	364.8 nm	656.6 nm
帕邢系	$k=3$	820.8 nm	1.876 μm
布拉开系	$k=4$	1.459 μm	4.053 μm
普丰德系	$k=5$	2.280 μm	7.462 μm
汉弗莱系	$k=6$	3.283 μm	12.38 μm

13-20. 动能为 20 eV 的电子，与处于基态的氢原子相碰，使氢原子激发。当氢原子回到基态时，辐射出波长为 121.6 nm 的光谱。试求碰撞后电子的速度。

解： 根据氢原子跃迁到基态时辐射谱线的波长，可得光子的能量

$$\varepsilon = h\frac{c}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{121.6 \times 10^{-9}}\ \text{J} = 1.64 \times 10^{-18}\ \text{J} = 10.25\ \text{eV}$$

由于电子的动能 20 eV 远小于其静能(511 keV),可不考虑相对论效应。设电子在相碰前、后的动能分别为 E_{k0} 和 E_k,氢原子在辐射出光子时无反冲。根据能量守恒定律,有

$$E_k = E_{k0} - \varepsilon$$

电子的动能为

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

解得 $v = \sqrt{\dfrac{2(E_{k0}-\varepsilon)}{m_0}} = \sqrt{\dfrac{2\times(20\times1.6\times10^{-19}-1.64\times10^{-18})}{9.11\times10^{-31}}}\ \mathrm{m/s} = 1.85\times10^{6}\ \mathrm{m/s}$

13-21. 对于氢原子中处于基态时的电子,试求:(1) 电子绕行速率 v 与光速 c 之比值;(2) 电子绕行频率与可见光谱频率的比值。

解: 电子受库仑力作用,在半径为 r_1 的基态圆轨道上作匀速率圆周运动。设电子速率为 v_1,有

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_1^2} = m_0 \frac{v_1^2}{r_1}$$

根据玻尔理论,基态轨道角动量为

$$L_1 = m_0 v_1 r_1 = \hbar$$

可得

$$r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_0 e^2}$$

和

$$v_1 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}$$

(1) 用 $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ 改写 v_1 表式,有

$$v_1 = \frac{e^2\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\hbar} = \frac{e^2 c}{4\pi\hbar}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

基态电子绕行速率 v_1 与光速 c 的比值为

$$\frac{v_1}{c} = \frac{e^2}{4\pi\hbar}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \frac{(1.6\times10^{-19})^2}{4\times3.14\times1.05\times10^{-34}}\sqrt{\frac{4\times3.14\times10^{-7}}{8.85\times10^{-12}}} = 7.3\times10^{-3} = \frac{1}{137}$$

(2) 基态电子绕行频率为

$$\nu_1 = \frac{v_1}{2\pi r_1} = \frac{m_0 e^4}{2\pi\,(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^3} = \frac{m_0 e^4}{4\varepsilon_0^2 h^3}$$

$$= \frac{9.11\times10^{-31}\times(1.6\times10^{-19})^4}{4\times(8.85\times10^{-12})^2\times(6.63\times10^{-34})^3}\ \mathrm{Hz} = 6.54\times10^{15}\ \mathrm{Hz}$$

可见光的频率在 10^{14} Hz 量级，故电子绕行频率约为可见光频率的 10 倍。

4. 德布罗意波和不确定关系

13-22. 一束带电粒子经 206 V 电压加速后，测得其德布罗意波长为 2.0×10^{-3} nm，已知该粒子所带的电荷量与电子电荷量相等，求这粒子的质量。

解： 设粒子的质量为 m，加速后的动量为 p，动能为

$$E_k=\frac{p^2}{2m}=eU$$

德布罗意波长为 $$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2mE_k}}=\frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

粒子的质量为 $$m=\frac{h^2}{2eU\lambda^2}=1.67\times10^{-27}\ \text{kg}$$

13-23. 设电子与光子的波长均为 0.50 nm。试求两者的动量之比以及动能之比。

解： 根据德布罗意关系 $\lambda=\dfrac{h}{p}$，波长相同的粒子有相同的动量。以 p_e 和 p_φ 分别表示电子与光子的动量，有

$$p_e=\frac{h}{\lambda_e}\quad 和\quad p_\varphi=\frac{h}{\lambda_\varphi}$$

因 $\lambda_e=\lambda_\varphi$，所以 $$p_e:p_\varphi=1$$

光子的动能就是总能量 $$E_\varphi=h\nu=p_\varphi c$$

为计算电子的动能，可先做估算：

$$p_ec=\frac{h}{\lambda_e}c\approx4.0\times10^{-16}\ \text{J}\approx2.5\ \text{keV}$$

此值远小于电子的静能 $E_0=511$ keV，可不考虑相对论效应。所以，电子的动能用经典表式

$$E_e=\frac{p_e^2}{2m_0}$$

两者动能之比为 $$E_e:E_\varphi=\frac{p_e}{2\,cm_0}=\frac{h}{2\lambda_e\,cm_0}=\frac{\lambda_C}{2\lambda_e}=2.43\times10^{-3}$$

式中 $\lambda_C=\dfrac{h}{m_0c}=2.43\times10^{-3}$ nm 为电子的康普顿波长。可见，电子和光子的动量相

同时,电子的动能远小于光子的动能。利用相对论关系求解电子动能

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = E - E_0$$

和动能、动量关系

$$E^2 - E_0^2 = p_e^2c^2$$

可得到

$$E_k = \sqrt{E_0^2 + p_e^2c^2} - E_0$$

解得动能之比为

$$\frac{E_k}{E_\varphi} = \frac{1}{h}\left[\sqrt{1+\left(\frac{h}{m_0c\lambda_e}\right)^2} - 1\right] = \frac{1}{h}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\lambda_C}{\lambda_e}\right)^2} - 1\right] \approx \frac{\lambda_C}{2\lambda_e}$$

所得结果相同。

13-24. 若一个电子的动能等于它的静能,试求该电子的速率和德布罗意波长。

解: 电子的动能与静能相等时,应考虑相对论效应。设电子的速度为 v、质量为 m,静止质量为 m_0。动能与静能相等时,有

$$mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2$$

得电子的运动质量为

$$m = 2m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

解得

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c = 0.866c = 2.6\times10^8\ \text{m/s}$$

德布罗意波长为 $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{3}m_0c} = \frac{\lambda_C}{\sqrt{3}} = 1.4\times10^{-3}\ \text{nm}$

式中 $\lambda_C = \frac{h}{m_0c} = 2.43\times10^{-3}\ \text{nm}$ 为电子的康普顿波长。

13-25. 设一电子被电势差 U 加速后打在靶上,若电子的动能全部转为一个光子的能量,求当这光子相应的光波波长为 500 nm(可见光)、0.1 nm(X 射线)和 0.000 1 nm(γ 射线)时,加速电子的电势差各是多少?

解: 加速电子的动能为　$E_k = eU$

光子的能量为　$E_\varphi = h\nu = h\dfrac{c}{\lambda}$

电子的动能全部转为一个光子的能量,有

$$E_k = E_\varphi$$

得电子的加速电势差

$$U=\frac{hc}{e\lambda}=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{-8}\ \mathrm{V/m}}{\lambda\times1.6\times10^{-19}}=\frac{1.24\times10^{-6}\ \mathrm{V/m}}{\lambda}$$

光子为可见光时

$$U_1=\frac{hc}{e\lambda_1}=\frac{1.24\times10^{-6}}{500\times10^{-9}}\ \mathrm{V}=2.48\ \mathrm{V}$$

光子为 X 射线时

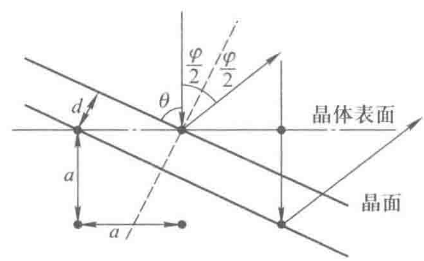
$$U_2=\frac{hc}{e\lambda_2}=\frac{1.24\times10^{-6}}{0.1\times10^{-9}}\ \mathrm{V}=1.24\times10^{4}\ \mathrm{V}$$

光子为 γ 射线时

$$U_3=\frac{hc}{e\lambda_3}=\frac{1.24\times10^{-6}}{0.0001\times10^{-9}}\ \mathrm{V}=1.24\times10^{7}\ \mathrm{V}$$

13-26. 在戴维孙-革末实验中，已知某简单立方晶体的晶格常量 $a=0.3$ nm，电子经 100 V 电压加速，垂直投射于晶体表面。求散射各极大值与电子束间的夹角。

分析：在布拉格公式 $2d\sin\theta=k\lambda$ 中，θ 为电子束对面间距为 d 的晶面族的掠射角。电子束垂直投射于晶体表面时，晶格常量 a 与可能产生散射极大的晶面间距 d 有关系 $d=a\sin\dfrac{\varphi}{2}$，如解图 13-26 所示。布拉格公式可表示为 $a\sin\varphi=k\lambda$ 或 $a\sin2\theta=k\lambda$，其中 $\varphi=\pi-2\theta$，φ 为散射极大与电子束间的夹角。



解图 13-26

解：加速电子的波长为

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2m_0e}}\frac{1}{\sqrt{U}}=\frac{1.225}{\sqrt{100}}\ \mathrm{nm}=0.1225\ \mathrm{nm}$$

由布拉格公式

$$a\sin\varphi=k\lambda,\quad k=1,2,\cdots$$

解得

$$\varphi=\arcsin\left(k\frac{\lambda}{a}\right)=\arcsin\left(k\frac{0.1225}{0.3}\right)=\arcsin(0.408k)$$

$k=1$ 时，对面间距为 d_1 的晶面族出现散射极大，与入射线的夹角为

$$\varphi_1=\arcsin0.408=24.1^\circ$$

$k=2$ 时，对面间距为 d_2 的晶面族出现散射极大，与入射线的夹角为

$$\varphi_2=\arcsin(2\times0.408)=54.7^\circ$$

13-27. 把热中子窄束射到晶体上，由布拉格衍射图样可以求得热中子的能量。若晶体的晶面间距为 0.18 nm，第一级加强时掠射角为 30°，试求这些热中子的能量。

解：常温下的中子称为热中子，由于能量较低，可不考虑相对论效应。由布拉格公式可知

$$2d\sin\theta=k\lambda,\quad k=1,2,\cdots$$

代入 d 和 θ 的数值，可得

$$d=\lambda$$

中子的动量为

$$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{h}{d}$$

中子的动能为

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{p^2}{2m_{\mathrm{n0}}}=\frac{1}{2m_{\mathrm{n0}}}\frac{h^2}{\lambda^2}$$

$$=\frac{1}{2\times1.67\times10^{-27}}\left(\frac{6.63\times10^{-34}}{0.18\times10^{-9}}\right)^2=4.06\times10^{-21}\ \mathrm{J}$$

$$=2.54\times10^{-2}\ \mathrm{eV}$$

与中子的静能相比较，有

$$E_{\mathrm{n0}}=m_{\mathrm{n0}}c^2=1.50\times10^{-10}\ \mathrm{J}=9.39\times10^8\ \mathrm{eV}\gg E_{\mathrm{k}}$$

与热中子的平均动能相比较，有

$$\overline{E_{\mathrm{k}}}=\frac{3}{2}kT=\frac{3}{2}\times1.38\times10^{-23}\times300\ \mathrm{J}=6.21\times10^{-21}\ \mathrm{J}\approx E_{\mathrm{k}}$$

13-28. 设粒子在沿 x 轴运动时，速率的不确定量为 $\Delta v=1\ \mathrm{cm/s}$，试估算下列情况下坐标的不确定量 Δx：(1) 电子；(2) 质量为 10^{-13} kg 的布朗粒子；(3) 质量为 10^{-4} kg 的小弹丸。

解：设粒子的质量为 m。根据不确定关系，沿 x 轴运动的粒子，其坐标的不确定量为

$$\Delta x\geqslant\frac{\hbar}{2\Delta p_x}=\frac{\hbar}{2m\Delta v_x}=\frac{1.05\times10^{-34}\ \mathrm{m\cdot kg}}{2\times0.01m}=\frac{5.25\times10^{-33}\ \mathrm{m\cdot kg}}{m}$$

(1) 电子的坐标不确定量

$$\Delta x\geqslant\frac{5.25\times10^{-33}}{9.11\times10^{-31}}\ \mathrm{m}=5.76\times10^{-3}\ \mathrm{m}$$

(2) 布朗粒子的坐标不确定量

$$\Delta x\geqslant\frac{5.25\times10^{-33}}{1\times10^{-13}}\ \mathrm{m}=5.25\times10^{-20}\ \mathrm{m}$$

(3) 小弹丸的坐标不确定量

$$\Delta x \geqslant \frac{5.25\times10^{-33}}{1\times10^{-4}}\ \mathrm{m}=5.25\times10^{-29}\ \mathrm{m}$$

13-29. 作一维运动的电子,其动量不确定量是 $\Delta p_x=10^{-25}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$,能将这个电子约束在内的最小容器的大概尺寸是多少?

解: 由不确定关系 $$\Delta x\Delta p_x\geqslant\frac{\hbar}{2}$$

得 $$\Delta x\geqslant\frac{\hbar}{2\Delta p_x}=\frac{1.05\times10^{-34}}{2\times10^{-25}}\ \mathrm{m}=5.25\times10^{-10}\ \mathrm{m}=0.525\ \mathrm{nm}$$

这个范围约为玻尔半径(0.5×10^{-10}m)的 10 倍,5 个基态氢原子沿直线排列的长度。

13-30. 氦氖激光器所发出的红光波长为 $\lambda=632.8\ \mathrm{nm}$,谱线宽度 $\Delta\lambda=10^{-9}\ \mathrm{nm}$。试求该光子沿运动方向的位置不确定量(即波列长度)。

分析:根据谱线宽度求得光子动量的不确定度,再利用不确定关系得到光子位置的不确定量。

解: 由光子的动量与波长关系 $p=\frac{h}{\lambda}$,得光子动量不确定量的大小为

$$|\Delta p|=\frac{h}{\lambda^2}\Delta\lambda$$

由不确定关系 $$\Delta x\Delta p=\Delta x\cdot\frac{h}{\lambda^2}\Delta\lambda\geqslant\frac{\hbar}{2}$$

得到光子位置的不确定量为

$$\Delta x\geqslant\frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda}=\frac{(632.8\times10^{-9})^2}{4\times3.14\times1\times10^{-18}}\ \mathrm{m}=31.9\times10^3\ \mathrm{m}$$

13-31. 如果钠原子所发出的黄色谱线($\lambda=589$ nm)的自然宽度为$\frac{\Delta\nu}{\nu}=1.6\times10^{-8}$,计算钠原子相应该波长状态的平均寿命。

解: 原子辐射能量为 $E=h\nu$ 的光子,波长为 $\lambda=c/\nu$。当能级的不确定量为 ΔE,相应的谱线有不确定量 $\Delta\nu$,有 $\Delta E=h\Delta\nu$。根据能量-时间的不确定关系

$$\Delta E\Delta t\geqslant\hbar/2$$

有 $$\Delta E\Delta t=h\Delta\nu\Delta t\geqslant\hbar/2$$

所以,原子在与波长 λ 相对应的激发态的时间不确定量,即平均寿命为

$$\Delta t \geqslant \frac{\hbar}{2h\Delta\nu}=\frac{1}{4\pi\Delta\nu}=\frac{1}{4\pi\nu}\frac{\nu}{\Delta\nu}=\frac{\lambda}{4\pi c}\frac{\nu}{\Delta\nu}$$

代入数据，得　$$\Delta t \geqslant \frac{589\times10^{-9}}{4\times3.14\times3\times10^{8}\times1.6\times10^{-8}}\ \mathrm{s}=9.77\times10^{-9}\ \mathrm{s}$$

13-32. 利用不确定关系估算氢原子基态的结合能和第一玻尔半径(提示：写出总能量的表达式，然后利用不确定关系分析使能量为最小的条件)。

解： 作为粗略估算，设氢原子中的电子在半径为 r 的圆周轨道上运动，动量为 p，总能量为

$$E=E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}=\frac{p^2}{2m}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

由于作圆周运动电子的动量和位置的平均值均为 0，故可取 $\Delta p_x\approx p$，$\Delta x\approx r$。根据不确定关系，有

$$\Delta x\Delta p_x\geqslant\frac{\hbar}{2}$$

作为估算，这里取　$$\Delta x\Delta p_x=rp=\hbar$$

于是，总能量为　$$E=\frac{\hbar^2}{2mr^2}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

基态能量 E 有最小值，由 $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}=-\dfrac{\hbar^2}{mr^3}+\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=0$

解得氢原子基态半径(玻尔半径)为

$$r=r_1=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$$

$$=\frac{4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times(1.05\times10^{-34})^2}{9.11\times10^{-31}\times(1.6\times10^{-19})^2}\ \mathrm{m}=0.526\times10^{-10}\ \mathrm{m}$$

基态结合能为

$$E_1=\frac{\hbar^2}{2mr_1^2}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1}=-\frac{me^4}{32\pi^2\hbar^2\varepsilon_0^2}=-\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}=-13.6\ \mathrm{eV}$$

13-33. 如果某球形病毒的直径为 5 nm，密度为 1.2 g/cm^3。试估算病毒的最小速率。

解： 病毒的质量为　$$m=\rho V=\frac{4}{3}\pi\rho\left(\frac{D}{2}\right)^3=\frac{1}{6}\pi\rho D^3$$

设病毒位置的不确定量为 $\Delta x=D$，动量的不确定量为 Δp_x。根据坐标和动量

的不确定关系，

$$\Delta x\Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2}$$

可得

$$\Delta p_x = m\Delta v_x \geqslant \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\hbar}{2D}$$

病毒速率的不确定量为 $\Delta v_x \geqslant \frac{\hbar}{2mD} = \frac{3\hbar}{\pi\rho D^4} = 0.13\times10^{-3}\ \mathrm{m/s}$

速率 v_x 与其不确定量 Δv_x 之间，应满足条件：$v_x \geqslant \Delta v_x$。所以，病毒的最小速率应以其不确定量为估算值，即

$$v_x \approx \Delta v_x = 0.13\times10^{-3}\ \mathrm{m/s}$$

5. 波函数计算

13-34. 试计算在宽度为 0.1 nm 的无限深势阱中 $n=1,2,10,100,101$ 各能态电子的能量。如果势阱宽为 1.0 cm 又如何？

解：电子被束缚在一维无限深势阱中时的能级为

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = n^2\frac{h^2}{8ma^2} = n^2E_1, \quad n=1,2,3,\cdots$$

$a_1 = 0.1$ nm 时，有 $E_{1,a_1} = \frac{h^2}{8ma_1^2} = 6.03\times10^{-18}\ \mathrm{J} = 37.7\ \mathrm{eV}$

$$E_{n,a_1} = 37.7n^2\ \mathrm{eV}, \quad n=1,2,3,\cdots$$

$a_2 = 1.0$ cm 时，有 $E_{1,a_2} = \frac{h^2}{8ma_2^2} = 6.03\times10^{-34}\ \mathrm{J} = 3.77\times10^{-15}\ \mathrm{eV}$

$$E_{n,a_2} = 3.77\times10^{-15}n^2\ \mathrm{eV}, \quad n=1,2,3,\cdots$$

下表列出计算所得各能态的能量值.

	$n=1$	$n=2$	$n=10$	$n=100$	$n=101$
E_{n,a_1}/eV	37.7	150.8	3.77×10^3	3.77×10^5	3.85×10^5
E_{n,a_2}/eV	3.77×10^{-15}	1.51×10^{-14}	3.77×10^{-13}	3.77×10^{-11}	3.85×10^{-11}

13-35. 一维无限深势阱中粒子的定态波函数为 $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$。试求：(1) 粒子处于基态时；(2) 粒子处于 $n=2$ 的状态时，在 $x=0$ 到 $x=a/3$ 之间找到粒子的概率。

解：粒子在一维无限深势阱中出现的概率密度正比于波函数模的平方，即

$$|\psi_n|^2=\frac{2}{a}\sin^2\frac{n\pi x}{a},\quad n=1,2,3,\cdots$$

（1）粒子在 $n=1$ 的基态时出现的概率密度为

$$|\psi_1|^2=\frac{2}{a}\sin^2\frac{\pi x}{a}$$

在 $x=0$ 到 $x=a/3$ 之间找到粒子的概率为

$$\int_0^{a/3}|\psi_1|^2\mathrm{d}x=\int_0^{a/3}\frac{2}{a}\sin^2\frac{\pi x}{a}\mathrm{d}x=0.195$$

（2）粒子处于 $n=2$ 的状态时，在 $x=0$ 到 $x=a/3$ 之间找到粒子的概率为

$$\int_0^{a/3}|\psi_2|^2\mathrm{d}x=\int_0^{a/3}\frac{2}{a}\sin^2\frac{2\pi x}{a}\mathrm{d}x=0.402$$

13-36. 一维运动的粒子处于如下波函数所描述的状态：

$$\psi(x)=\begin{cases}Axe^{-\lambda x} & (x\geqslant 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

式中 $\lambda>0$。（1）求波函数 $\psi(x)$ 的归一化常数 A；（2）求粒子的概率分布函数；（3）在何处发现粒子的概率最大？

解：（1）在整个一维空间，粒子出现的概率为 1，据此可求得波函数的归一化常数。令

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}A^2x^2e^{-2\lambda x}\mathrm{d}x=1$$

可有

$$\int_0^{\infty}A^2x^2e^{-2\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{A^2}{4\lambda^3}=1$$

归一化常数为

$$A=2\sqrt{\lambda^3}$$

归一化的波函数为

$$\psi(x)=\begin{cases}2\sqrt{\lambda^3}\,xe^{-\lambda x} & (x\geqslant 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

（2）设粒子的概率分布函数为 $w(x)$，有

$$w(x)=|\psi(x)|^2=\begin{cases}4\lambda^3x^2e^{-2\lambda x} & (x\geqslant 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

（3）由概率分布函数对位置求极值，即令 $\dfrac{\mathrm{d}w(x)}{\mathrm{d}x}=0$，可得方程

$$8\lambda^3xe^{-2\lambda x}[1-\lambda x]=0$$

解得

$$x_1=0,\quad x_2=\infty,\quad x_3=\frac{1}{\lambda}$$

由
$$\left.\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right|_{x_3}=8\lambda^3e^{-2\lambda x}[1-4\lambda x+2\lambda^2x^2]|_{x_3}<0$$
可知，发现粒子概率最大的位置为 $x=1/\lambda$。

13-37. 一维无限深势阱中的粒子的波函数，在边界处为零，这种定态物质波相当于两端固定的弦中的驻波，因而势阱宽度 a 必须等于德布罗意半波长的整数倍。试利用这一条件导出能量量子化公式 $E_n=\frac{h^2}{8ma^2}n^2$。

解：设势阱中粒子的德布罗意波波长为 λ，其动量为
$$p=h/\lambda$$
势阱宽度为德布罗意半波长的整数倍，有
$$a=n\lambda/2$$
势阱中粒子的能量为动能
$$E_n=\frac{p_n^2}{2m}=\frac{n^2h^2}{8ma^2}$$
得证。

13-38. 一个质子在一维无限深势阱中，阱宽 $a=10^{-14}$m。(1) 质子的零点能量有多大？(2) 由 $n=2$ 态跃迁到 $n=1$ 态时，质子放出多大能量的光子？

解：一个质子在一维无限深势阱的能量为
$$E_n=\frac{h^2}{8ma^2}n^2=n^2E_1,\quad n=1,2,3,\cdots$$
式中 E_1 为质子的最小能量。

(1) 阱宽 $a=10^{-14}$ m 时，一维无限深势阱中质子的零点能量即最小能量 E_1 为
$$E_1=\frac{(6.63\times10^{-34})^2}{8\times1.67\times10^{-27}\times(1\times10^{-14})^2}\text{ J}=3.29\times10^{-13}\text{ J}$$
(2) 质子由 $n=2$ 态跃迁到 $n=1$ 态时，放出光子的能量为
$$\Delta E=E_2-E_1=(2^2-1)E_1=3\times3.29\times10^{-13}\text{ J}=9.87\times10^{-13}\text{ J}$$

*13-39. 能量为 30 eV 的电子入射在高为 40 eV 的方势垒，如果势垒的宽度为(1) 1.0 nm；(2) 0.1 nm，求电子穿透该势垒的概率各为多少？比较(1)、(2)的结果能得出什么启示？

分析：电子的能量 $E=30$ eV 小于势垒高度 $U_0=40$ eV 时，由于隧道效应，可

以一定的概率穿越隧道,此概率的大小,用贯穿系数描述。

解: 设势垒的宽度为 a,贯穿系数为

$$T=e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}a}=\exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}\,a\right]$$

$$=\exp\left[-\frac{2\times\sqrt{2\times9.11\times10^{-31}\times(40-30)\times1.6\times10^{-19}}}{1.05\times10^{-34}}a\right]=\exp[-3.25\times10^{10}a]\ (\text{SI 单位})$$

(1) $a_1=1.0$ nm 时,有

$$T_1=\exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}\,a_1\right]=\exp(-32.52)=7.52\times10^{-15}$$

(2) $a_2=0.1$ nm 时,有

$$T_2=\exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}\,a_2\right]=\exp(-3.25)=3.9\times10^{-2}$$

由(1)、(2)的结果可见,电子以相同的能量,穿透高于自身能量势垒的概率与势垒宽度有关。当势垒宽度很大时,穿透的概率趋于零。这与经典力学的结论相符,即电子将被反射回去而不能穿越。

*13-40. 如果将玻尔理论应用于太阳-地球的两粒子系统,假定地球在万有引力的作用下绕太阳作半径为 $r=1.5\times10^{11}$ m 的圆轨道运动。由于这个系统的引力势能函数与氢原子的电势能函数有相似的数学形式,因此太阳-地球系统的玻尔理论的解与氢原子也有相同的数学形式。(1) 写出太阳-地球系统的能量量子化关系式;(2) 求地球在目前轨道上运动的轨道量子数;(3) 从上面的计算结果你能得出关于经典物理与量子物理有什么关系(地球的质量 $m_e\approx6\times10^{24}$ kg,太阳的质量 $m_s\approx2\times10^{30}$ kg)。

解: 对太阳-地球的两粒子系统,运用玻尔理论,有

$$G\frac{m_s m_e}{r^2}=m_e\frac{v^2}{r}$$

和

$$L=r_n m_e v_n=n\hbar$$

可解得

$$r_n=n^2\frac{\hbar^2}{Gm_s m_e^2}=n^2a_0$$

式中 a_0 为地球的"玻尔半径",即 $a_0=\dfrac{\hbar^2}{Gm_s m_e^2}$

(1) 太阳-地球系统的能量为

$$E=\frac{1}{2}m_e v^2+U(r)=\frac{1}{2}m_e v^2-G\frac{m_s m_e}{r}=-G\frac{m_s m_e}{2r}$$

将 r_n 表式代入上式，得

$$E_n=-G\frac{m_s m_e}{2r_n}=-\frac{1}{n^2}\frac{G^2m_s^2m_e^3}{2\hbar^2}=-\frac{1}{n^2}\frac{Gm_s m_e}{2a_0}$$

上式为太阳-地球系统能量量子化的表达式。与氢原子的能量量子化表达式

$$E_n=-\frac{1}{n^2}\frac{ke^2}{2r_1}$$

有相同形式。式中 $k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$，$r_1=\dfrac{\hbar^2}{kme^2}$ 是玻尔半径，定态轨道半径为 $r_n=n^2r_1$。

(2) 地球运动轨道半径 $r=1.5\times10^{11}$ m，轨道量子数为

$$n=\sqrt{\frac{r}{a_0}}=\frac{m_e}{\hbar}\sqrt{rGm_s}=2.55\times10^{74}$$

(3) 上述结果表明，由于太阳-地球系统的引力势能函数与氢原子的电势能函数有相似的数学形式，因此它们的解必定会有相同的数学表达式；太阳-地球系统的量子数很大，可以认为经典系统是量子系统在 $n\to\infty$ 时的极限情况，这也称为"对应原理"。

将太阳-地球系统和氢原子作比照，如下表所示。

	氢原子	太阳-地球	对照关系
势能	$U(r)=-k\dfrac{e^2}{r}$	$U(r)=-G\dfrac{m_s m_e}{r}$	$e^2\Leftrightarrow m_s m_e$ $k\Leftrightarrow G$
总能量	$E=\dfrac{p^2}{2m}+U(r)$	$E=\dfrac{p^2}{2m_e}+U(r)$	$m\Leftrightarrow m_e$

*13-41. 设线性谐振子处在基态和第一激发态的波函数为 $\psi_0=\sqrt[4]{\dfrac{\alpha^2}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}$，$\psi_1=\sqrt{\dfrac{2\alpha^3}{\pi^{1/2}}}x\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}$，其中 $\alpha=\sqrt[4]{\dfrac{4\pi^2mk}{h^2}}$，$k$ 为劲度系数。求在这两状态时概率最大的位置。

解： 波函数模的平方为粒子出现的概率密度。

线性谐振子在基态的概率分布函数为 $w_0(x)=|\psi_0|^2=\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{\pi}}\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}$

令

$$\frac{\mathrm{d}w_0(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\,|\psi_0|^2}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{\pi}}\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}\right)=0$$

可得 $x=0$,并有
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2|\psi_0|^2}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}<0$$

线性谐振子在基态时,概率分布的最大值在 $x=0$ 处。

线性谐振子在第一激发态的概率分布函数为

$$w_1(x)=|\psi_1|^2=\frac{2\alpha^3}{\sqrt{\pi}}x^2\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}$$

令
$$\frac{\mathrm{d}w_1(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}|\psi_1|^2}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2\alpha^3}{\sqrt{\pi}}x^2\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}\right)=0$$

可得 $x=\pm\dfrac{1}{\alpha}$,并有
$$\left.\frac{\mathrm{d}|\psi_1|^2}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pm\frac{1}{\alpha}}<0$$

线性谐振子在第一激发态时,概率分布的最大值在 $x=\pm\dfrac{1}{\alpha}$ 处。

13-42. 假设氢原子处于 $n=3$, $l=1$ 的激发态,其轨道角动量在空间有哪些可能取向? 计算各可能取向的角动量与 z 轴之间的夹角。

解: 氢原子处于 $n=3$, $l=1$ 的激发态时,轨道角动量 L 的大小为

$$L=\sqrt{l(l+1)}\,\hbar=\sqrt{1\times(1+1)}\,\hbar=\sqrt{2}\,\hbar$$

L 的空间取向由其在 z 轴(磁场方向)上的投影 L_z 决定,大小为 $m_l\hbar$,即

$$L_z=m_l\hbar,\quad m_l=0,\pm1,\pm2,\cdots\pm l$$

式中 m_l 为磁量子数。$l=1$ 时,m_l 只能取 0 和 ±1 三个值,即

$$L_z=\hbar,\quad L_z=0,\quad L_z=-\hbar$$

如解图 13-41 所示,氢原子处于 $n=3$, $l=1$ 的激发态时,其轨道角动量 L 与 z 轴正方向的夹角分别为 $\pi/4(m_l=1)$, $\pi/2(m_l=0)$ 和 $3\pi/4(m_l=-1)$。

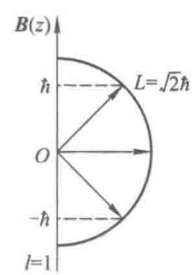
13-43. 试说明钾原子中电子的排列方式,并和钠元素的化学性质进行比较。

解: 电子在原子中的分布遵从泡利不相容原理和能量最小原理。

钾原子共有 19 个电子,其排列方式为:$1s^2$, $2s^2$, $2p^6$, $3s^2$, $3p^6$, $4s^1$。

钠原子共有 11 个电子,其排列方式为:$1s^2$, $2s^2$, $2p^6$, $3s^1$。

钠和钾最外层都只有一个电子(价电子),都属于活泼元素,有相似的化学性质。



解图 13-41

13-44. 氢原子在 $n=2, l=1$ 能态的径向概率分布可写成 $P(r)=A\dfrac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}$，其中 A 是 θ 的函数，而与 r 无关，试证明 $r=2a_0$ 处概率有极大值。

解： 令
$$\frac{dP(r)}{dr}=\frac{d}{dr}\left(\frac{A}{a_0}re^{-r/2a_0}\right)=0$$
有
$$e^{-r/2a_0}-r\frac{1}{2a_0}e^{-r/2a_0}=0$$
即得
$$r=2a_0$$
并有
$$\left.\frac{d^2P(r)}{dr^2}\right|_{r=2a_0}<0$$
由此证得，氢原子在 $n=2, l=1$ 能态时，沿径向 $r=2a_0$ 处电子出现的概率最大。

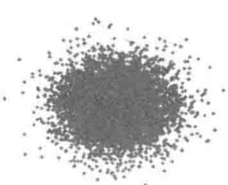
13-45. 氢原子的径向波函数及概率密度函数如下表所示，a_0 是玻尔半径。试编写一计算机程序，在平面上描绘出氢原子 1s，2s 和 3s 态的电子概论分布图（即电子云）。

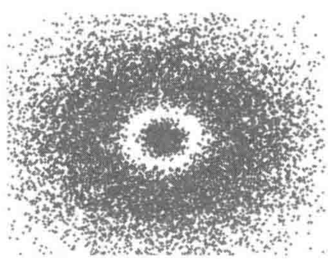
电子状态	径向波函数 $R_{nl}(r)$	径向概率密度 $\|R_{nl}(r)\|^2r^2$
1s $(n=1,l=0)$	$\dfrac{2}{a_0^{3/2}}e^{-\frac{r}{a_0}}$	$\dfrac{4r^2}{a_0^3}e^{-\frac{2r}{a_0}}$
2s $(n=2,l=0)$	$\dfrac{1}{2\sqrt{2}a_0^{3/2}}\left(2-\dfrac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}$	$\dfrac{r^2}{8a_0^3}\left(2-\dfrac{r}{a_0}\right)^2e^{-\frac{r}{a_0}}$
3s $(n=3,l=0)$	$\dfrac{2}{81\sqrt{3}a_0^{3/2}}\left(27-\dfrac{18r}{a_0}+\dfrac{2r^2}{a_0^2}\right)e^{-\frac{r}{3a_0}}$	$\dfrac{4r^2}{19\,683a_0^3}\left(27-\dfrac{18r}{a_0}+\dfrac{2r^2}{a_0^2}\right)^2e^{-\frac{2r}{3a_0}}$

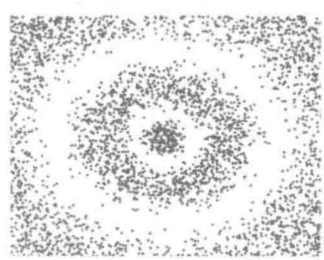
参考程序

```
% 氢原子的电子概率分布图
clear
 for i=1:400;
     k=(i-1)/25;                          % k=r/ao,ao 是玻尔半径
     % p(i)=round(500*4*k.*k.*exp(-2*k));
```

```
                                         % 1s 氢原子径向概率密
                                           度函数
    % p(i)=round(500*k*k*(2-k)^2*exp(-k)/8);
                                         % 2s 氢原子径向概率密
                                           度函数
    p(i)=round(500*4*k*k*(27-18*k+2*k*k)^2*
              exp(-2*k/3)/19683);
                                         % 3s 氢原子径向概率密
                                           度函数
    theta=(2*pi*rand(p(i),1))';          % 电子随机的角位置
    r=k*ones(p(i),1)';                   % 电子可能的径向位置
    x=r.*cos(theta);                     % 将电子的位置换算为直
                                           角坐标(x)
    y=r.*sin(theta);                     % 将电子的位置换算为直
                                           角坐标(y)
    plot(x(1,:),y(1,:),'b.')             % 逐点描出氢原子的电子
                                           概率分布图
    hold on
end
axis([-10 10 -10 10])
xlabel('x');ylabel('y')
```


(a) 1s


(b) 2s


(c) 3s

解图 13-45

第十四章　激光和固体的量子理论

一、教学基本要求

1. 了解形成激光的基本条件,激光的特征及其基本应用。
2. 了解固体能带结构的基本概念,了解半导体的导电机构。
3. 了解超导电性。

二、本章习题分类

1. 激光原理
2. 半导体基础知识

三、习题分析与解答

1. 激光原理

14-1. 已知 Ne 原子的某一激发态和基态的能量差 $E_2-E_1=16.7\ \text{eV}$,试计算 $T=300\ \text{K}$ 时在热平衡条件下,处于两能级上的原子数的比。

解: 在热平衡状态下,原子在各能级上的分布服从玻耳兹曼分布律。在温度为 T 时,原子处于能级 E_i 上的原子数 N_i 为

$$N_i=A\mathrm{e}^{-E_i/kT}$$

设 $T=300\ \text{K}$ 时,处于基态 E_1 上的原子数为 N_1,处于激发态 E_2 上的原子数为 N_2。处于两能级上的原子数的比为

$$\frac{N_2}{N_1}=\mathrm{e}^{-(E_2-E_1)/kT}=1/\mathrm{e}^{645}\approx 0$$

可见,在室温时 Ne 原子基本上全部处于基态。

14-2. CO_2激光器发出的激光波长是 10.6 μm。(1) 和此波长相应的 CO_2能级差是多少?(2) 如果此激光器工作时其中 CO_2分子在高能级上的分子数比低能级上的分子数多 1%,则和此粒子数反转对应的热力学温度是多少?

解: (1) $\Delta E=h\nu=h\dfrac{c}{\lambda}=\dfrac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{10.6\times10^{-6}}\ \text{J}=1.88\times10^{-20}\ \text{J}=0.117\ \text{eV}$

(2) $$N=Ae^{-E/kT},\quad N_1=Ae^{-E_1/kT},\quad N_2=Ae^{-E_2/kT}$$

$$\frac{N_2}{N_1}=e^{-(E_2-E_1)/kT}=e^{-hc/\lambda kT}$$

$$T=-\frac{\dfrac{hc}{\lambda k}}{\ln\dfrac{N_2}{N_1}}=-\frac{\dfrac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{10.6\times10^{-6}\times1.38\times10^{-23}}}{\ln\dfrac{1.01}{1}}\ \mathrm{K}=-1.3\times10^{5}\ \mathrm{K}$$

14-3. 现今激光器可以产生一个光脉冲的延续时间只有 10 fs(1 fs=10^{-15} s)，这样的一个脉冲中有几个波长？(设光的波长为 500 nm)

解：一个光脉冲在真空中的波列长度为

$$L=c\Delta t$$

含有的波长数为 $$n=\frac{L}{\lambda}=\frac{c\Delta t}{\lambda}=\frac{3\times10^{8}\times10\times10^{-15}}{500\times10^{-9}}=6$$

14-4. 已知 He-Ne 激光器的输出功率为 4 mW，输出端反射镜的透射率为 1%，毛细管直径为 1 mm，求腔内能量密度。

解：设谐振腔(毛细管)的直径为 d，截面积为 S，腔内沿轴线向输出端反射镜运动的光辐射平均能量密度为 w_0，其平均能流为

$$P_0=\omega_0cS=\frac{1}{4}\omega_0c\pi d^2$$

设输出端反射镜的透射率为 T，则激光器的输出功率 P 为

$$P=\frac{1}{2}TP_0$$

由于光辐射沿轴线来回反射，腔内光波的平均能量密度 $\omega=2\omega_0$，故有

$$w_0=\frac{P}{cS}=\frac{8P}{c\pi d^2T}$$

$$=\frac{8\times4\times10^{-3}}{3\times10^{8}\times3.14\times(1\times10^{-3})^2\times0.01}\ \mathrm{J/m^3}=3.4\times10^{-3}\ \mathrm{J/m^3}$$

2. 半导体基础知识

14-5. 在室温下 n 型锗的霍耳系数 $R_H=100\ \mathrm{cm^3/C}$，求载流子浓度。

解： 由 n 型半导体的霍耳系数 $R_{\mathrm{H}}=\dfrac{1}{en_{\mathrm{n}}}$

可得
$$n_{\mathrm{n}}=\frac{1}{eR_{\mathrm{H}}}=6.25\times10^{16}\ \mathrm{cm}^{-3}$$

14-6. 硅晶体的禁带宽度为 1.2 eV，适量掺入磷后，施主能级和硅的导带底的能极差为 $\Delta E_D=0.045$ eV。试计算此掺杂半导体能级吸收光子的最大波长。

解： $\lambda_{\mathrm{M}}=\dfrac{ch}{\Delta E_D}=\dfrac{3\times10^{8}\times6.63\times10^{-34}}{0.045\times1.6\times10^{-19}}\ \mathrm{m}=2.76\times10^{-5}\ \mathrm{m}=27.6\ \mu\mathrm{m}$

14-7. 已知 CdS 和 PbS 的禁带宽度分别为 2.43 eV 和 0.3 eV，试计算它们在光照射下导电时波长的限度，并由此说明为什么 CdS 可用在可见光到 X 射线的短波方面，而 PbS 却可有效地用在红外方面。

解： 入射于半导体的光子能量大于禁带宽度时，价带电子被激发到导带，形成可导电的载流子电子和空穴。即

$$h\nu\geqslant E_{\mathrm{g}}\quad 或\quad \lambda\leqslant\frac{ch}{E_{\mathrm{g}}}$$

CdS：
$$\lambda_1\leqslant\frac{ch}{E_{\mathrm{g1}}}=\frac{3\times10^{8}\times6.63\times10^{-34}}{2.43\times1.6\times10^{-19}}\ \mathrm{nm}=510\ \mathrm{nm}$$

PbS：
$$\lambda_2\leqslant\frac{ch}{E_{\mathrm{g2}}}=\frac{3\times10^{8}\times6.63\times10^{-34}}{0.3\times1.6\times10^{-19}}\ \mathrm{nm}=4\ 140\ \mathrm{nm}$$

CdS 的禁带宽度较宽，与可见光到 X 射线波段光子能量相对应。PbS 的禁带宽度较窄，与红外波段光子能量相对应。

14-8. 制造半导体元件的纯净锗必须掺入少量杂质原子，设均匀掺杂比例为 10^{-9}，若将锗的结构看作为立方点阵，晶格常量设为 0.5 nm，试估计杂质原子之间的距离。

解： 设锗原子数密度为 n_1，杂质原子数密度为 n_2。有

$$\frac{n_2}{n_1}=10^{-9}$$

设锗的晶格常量为 a_1，杂质原子间距为 a_2。有

$$a_1^3n_1=1$$

和
$$a_2^3n_2=1$$

可得
$$a_2 = a_1 \sqrt[3]{\frac{n_1}{n_2}} = 0.5\ \mu\text{m}$$

14-9. 已知 $T \to 0$ K 时纯硅能吸收的辐射的最长波长是 1.09 μm,求硅的禁带宽度,以 eV 为单位。

解: 设硅的禁带宽度为 E_g,有

$$E_g = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

可得
$$E_g = h\frac{c}{\lambda} = \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{1.09\times10^{-6}\times1.6\times10^{-19}}\ \text{eV} = 1.14\ \text{eV}$$

14-10. Ga-As-P 半导体发光二极管的禁带宽度为 1.9 eV,它能发出的光的最大波长是多少?

解: $\lambda_M = \dfrac{ch}{\Delta E_D} = \dfrac{3\times10^{8}\times6.63\times10^{-34}}{1.9\times1.6\times10^{-19}}\ \text{m} = 6.54\times10^{-7}\ \text{m} = 654\ \text{nm}$

第十五章　原子核物理和粒子物理简介

一、教学基本要求

1. 了解原子核的基本性质,结合能和放射性衰变规律。
2. 了解粒子物理与宇宙学基础知识。

二、本章习题分类

1. 原子核的基本性质
2. 原子核的放射性衰变规律
3. 哈勃定律的应用

三、习题分析与解答

1. 原子核的基本性质

15-1. ${}_{1}^{3}H$ 原子的质量是 3.016 05 u,${}_{2}^{3}He$ 原子质量是 3.016 03 u,试计算:(1) 这两个原子的核的质量(以 u 计);(2) 结合能(以 MeV 计)(要达到足够准确度以便相互作比较)。

解: (1) 用原子质量单位 u 表示时,电子的质量为

$$m_e = \frac{9.109\ 39\times10^{-31}}{1.660\ 54\times10^{-27}}\ \mathrm{u} = 5.485\ 80\times10^{-4}\ \mathrm{u}$$

${}_{1}^{3}H$ 原子核的质量为

$$m_{1X} = (3.016\ 05 - 1\times5.485\ 80\times10^{-4})\ \mathrm{u} = 3.015\ 50\ \mathrm{u}$$

${}_{2}^{3}He$ 原子核的质量为

$$m_{2X} = (3.016\ 03 - 2\times5.485\ 80\times10^{-4})\ \mathrm{u} = 3.014\ 93\ \mathrm{u}$$

(2) 用原子质量单位 u 表示的质子质量为

$$m_p = 1.007\ 277\ \mathrm{u}$$

中子质量为
$$m_n = 1.008\ 665\ \mathrm{u}$$

质量亏损为
$$\Delta m = Zm_p + (A-Z)m_n - m_X$$

结合能为
$$\Delta E = \Delta mc^2$$

所以，${}^3_1$H 原子核的结合能为

$$\Delta E_1=(m_p+2m_n-m_{1X})c^2$$
$$=\frac{(1.007\,277+2\times1.008\,665-3.015\,50)\times1.660\,54\times10^{-27}\times(3\times10^8)^2}{1.602\,177\times10^{-19}}\text{ eV}$$
$$=8.495\,9\text{ MeV}$$

${}^3_2$He 原子核的结合能

$$\Delta E_2=(2m_p+m_n-m_{2X})c^2=7.731\,85\text{ MeV}$$

15-2. ${}^{208}_{82}$Pb 核的比结合能近似为 8 MeV/核子。(1) 铅的这一同位素的总结合能是多少？(2) 总结合能相当于多少个核子的静质量？(3) 总结合能相当于多少个电子的静质量？

解：(1) 总结合能 ΔE 等于比结合能 ε 与质量数(核子数)A 的乘积。${}^{208}_{82}$Pb 核的总结合能为

$$\Delta E=\varepsilon A=8\times208\text{ MeV}=1.664\times10^3\text{ MeV}$$

(2) 每个核子对应的静能为 m_0c^2，m_0 为核子的静质量。

与 ${}^{208}_{82}$Pb 核总结合能相当的核子静质量数为

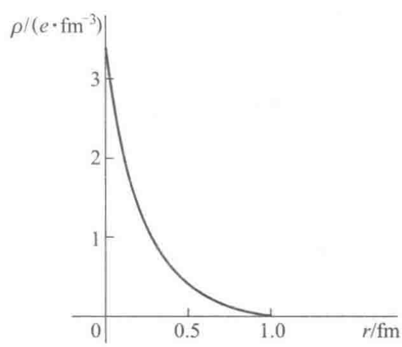
$$n=\frac{\Delta E}{m_0c^2}=\frac{1.664\times10^9\times1.6\times10^{-19}}{1.67\times10^{-27}\times(3\times10^8)^2}\approx1.75$$

(3) 每个电子对应的静能为 $m_{e0}c^2$。

与 ${}^{208}_{82}$Pb 核的总结合能相当的电子静质量数为

$$n_e=\frac{\Delta E}{m_{e0}c^2}=\frac{1.664\times10^9\times1.6\times10^{-19}}{9.11\times10^{-31}\times(3\times10^8)^2}\approx3.25\times10^3$$

15-3. 质子的电荷密度分布如习题 15-3 图所示，它的平均密度约为 1 fm³ 一个量子电荷单位(e/fm³)。试计算：(1) 以 C/m³ 表示这一电荷密度；(2) 离质子中心 1 fm远处，电势为多少伏特？



习题 15-3 图

解：(1) 平均电荷密度 $\rho=\frac{e}{1\text{ fm}^3}=\frac{1.60\times10^{-19}}{(10^{-15})^3}\text{C/m}^3=1.60\times10^{26}\text{C/m}^3$

(2) 假定质子的电荷是球形对称分布

的，由图示电荷密度分布可知，电荷分布在半径为 1 fm 的球体内。所以，离质子中心 1 fm 处的电势为

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r}=1.44\times10^{6}\ \mathrm{V}$$

15-4. 核${}^{5}_{3}\mathrm{Li}$的寿命约为 10^{-21} s。(1) 应用不确定关系估计这个核的总能量的不确定度；(2) 这个不确定度对测量核质量的精度（10^{-30} kg）会产生什么影响？

解：(1) 由不确定关系，核的总能量的不确定度为

$$\Delta E\geqslant\frac{\hbar}{2\Delta t}=\frac{1.05\times10^{-34}}{2\times10^{-21}}\ \mathrm{J}=5.25\times10^{-14}\ \mathrm{J}=0.328\ \mathrm{MeV}$$

(2) 核的总能量的不确定度对应核的质量的不确定度为

$$\Delta m=\frac{\Delta E}{c^2}=\frac{\hbar}{2c^2\Delta t}=5.83\times10^{-31}\ \mathrm{kg}$$

核的质量的不确定度与核质量的测量精度（10^{-30} kg）几乎同数量级，据此测得的核${}^{5}_{3}\mathrm{Li}$的质量是不可信的。

15-5. (1) ${}^{6}_{2}\mathrm{He}$ 核的质量是 6.017 79 u，${}^{6}_{3}\mathrm{Li}$ 核的质量是 6.013 48 u，试分别计算两核的结合能和比结合能。(2) 在${}^{6}_{2}\mathrm{He}\to{}^{6}_{3}\mathrm{Li}+e^-+\bar{\nu}_e$ 衰变中，如果${}^{6}_{3}\mathrm{Li}$ 近似不动，则电子和反中微子所得的总能量是多少？

解：(1) 由原子核质量亏损 $\Delta m=Zm_p+(A-Z)m_n-m_x$

得

$$\Delta m({}^{6}_{2}\mathrm{He})=2m_p+4m_n-m({}^{6}_{2}\mathrm{He})=0.031\ 42\ \mathrm{u}$$

$$\Delta m({}^{6}_{3}\mathrm{Li})=3m_p+3m_n-m({}^{6}_{3}\mathrm{Li})=0.034\ 35\ \mathrm{u}$$

由结合能 $$\Delta E=\Delta mc^2$$

可得，${}^{6}_{2}\mathrm{He}$ 核的结合能为 $\Delta E({}^{6}_{2}\mathrm{He})=\Delta m({}^{6}_{2}\mathrm{He})\ c^2=29.31\ \mathrm{MeV}$

${}^{6}_{3}\mathrm{Li}$ 核的结合能为 $\Delta E({}^{6}_{3}\mathrm{Li})=\Delta m({}^{6}_{3}\mathrm{Li})\ c^2=32.05\ \mathrm{MeV}$

由比结合能 $$\varepsilon=\frac{\Delta E}{A}$$

可得，${}^{6}_{2}\mathrm{He}$ 核的比结合能为 $\varepsilon({}^{6}_{2}\mathrm{He})=\dfrac{\Delta E}{A}=\dfrac{29.31}{6}=4.89$ MeV/核子

${}^{6}_{3}\mathrm{Li}$ 核的比结合能为 $\varepsilon({}^{6}_{3}\mathrm{Li})=\dfrac{\Delta E}{A}=\dfrac{32.0}{6}=5.34$ MeV/核子

(2) 在${}^{6}_{2}\mathrm{He}$ 核的 β^- 衰变中放出高速电子和反中微子 $\bar{\nu}_e$ 而转变为${}^{6}_{3}\mathrm{Li}$ 核，衰变前后核的结合能之差即为电子和反中微子所得的总能量。所以

$$\Delta E({}_3^6\mathrm{Li})-\Delta E({}_2^6\mathrm{He})=(32.05-29.31)\ \mathrm{MeV}=2.74\ \mathrm{MeV}$$

15-6. 试计算在下列热核反应中

$${}_1^2\mathrm{H}+{}_1^2\mathrm{H}\rightarrow{}^3\mathrm{He}+\mathrm{n}+3.27\ \mathrm{MeV}$$

燃烧 1 g 核燃料氘时所产生的能量(焦耳)。

解：两个氘核融合成一个 ^{3}He 核和一个中子,并产生能量 $\varepsilon=3.27$ MeV。由于一个氘原子质量为

$$m_{\mathrm{D}}=2.014\mathrm{u}=3.343\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

1 g 核燃料氘内含有氘原子数为

$$N=\frac{1\times10^{-3}}{3.343\times10^{-27}}=2.99\times10^{23}$$

所以在燃烧 1 g 核燃料氘的热核反应中产生的能量为

$$W=\frac{N\varepsilon}{2}=\frac{2.99\times10^{23}\times3.27\times10^{6}\times1.6\times10^{-19}}{2}\ \mathrm{J}=7.82\times10^{10}\ \mathrm{J}$$

2. 原子核的放射性衰变规律

15-7. 放射性 ${}_{86}^{226}\mathrm{R}_{\mathrm{a}}$ 的半衰期为 1.6×10^3 a,如果某样品在时刻 t 含有 3.0×10^{16} 个核,求该时刻核素的放射性强度是多少?

解：已知放射性 ${}_{86}^{226}\mathrm{R}_{\mathrm{a}}$ 的半衰期 $T_{1/2}=1.6\times10^3$ a,可得 ${}_{86}^{226}\mathrm{R}_{\mathrm{a}}$ 的衰变常量为

$$\lambda=\frac{0.693}{T_{1/2}}$$

$t=0$ 时刻原子核的数目 N_0 为

$$N_0=N\mathrm{e}^{\lambda t}$$

放射性强度为

$$A=\lambda N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}=\lambda N=\frac{0.693}{T_{1/2}}N=\frac{0.693\times3.0\times10^{16}}{1.6\times10^3\times365\times86\ 400\times3.7\times10^{10}}\ \mathrm{Ci}$$
$$=11\times10^{-6}\ \mathrm{Ci}=4.12\times10^{5}\ \mathrm{Bq}$$

15-8. 一放射样品含 ${}_6^{11}\mathrm{C}$3.5 μg,半衰期为 20.4 min。(1) 求最初的核数量;(2) 样品最初及 8 h 后的放射性强度各是多少?(3) 8 h 后放射性核还有多少?

解：(1) 设样品质量为 m,最初的核数量为 N_0,则应有

$$m=AN_0\mathrm{u}=AN_0 1.66\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

式中 A 为样品质量数,则

$$N_0=\frac{m}{A1.66\times10^{-27}\ \mathrm{kg}}=\frac{3.5\times10^{-9}}{1.66\times10^{-27}\times11}=1.92\times10^{17}$$

（2）由样品的半衰期可得衰变常量为

$$\lambda=\frac{0.693}{T_{1/2}}=\frac{0.693}{20.4\times60}\ \mathrm{s}=5.66\times10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$$

样品在最初（$t_0=0$）时刻的放射性强度为

$$A_0=\lambda N_0\mathrm{e}^{-\lambda t_0}=\lambda N_0=1.087\times10^{14}\ \mathrm{Bq}=2.938\times10^{3}\ \mathrm{Ci}$$

样品在 8 h 时的放射性强度为

$$\begin{aligned}A&=\lambda N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}=1.085\times10^{14}\times\exp(-5.66\times10^{-4}\times8\times3\ 600)\\&=9.04\times10^{6}\ \mathrm{Bq}=2.44\times10^{-4}\ \mathrm{Ci}\end{aligned}$$

（3）8 h 时样品中的放射性核数为

$$N=N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}=1.92\times10^{17}\times\exp(-5.66\times10^{-4}\times8\times3\ 600)=1.60\times10^{10}$$

15-9. 利用^{14}C 的放射性可以测定古生物遗骸的年代。如测得古墓遗骸骨中^{14}C 的含量是现代人的 3/5，^{14}C 的半衰期为 5 690 a。求此墓的年代。

解： 根据衰变定律　　$N=N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$

和衰变常量　　$\lambda=\dfrac{0.693\ \mathrm{s}}{T_{1/2}}$

可得衰变时间为　　$t=-\dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{N}{N_0}=-\dfrac{T_{1/2}}{0.693}\ln\dfrac{N}{N_0}$

式中是 N_0是现代人刚死亡时骨中^{14}C 原子的数目，N 则是目前古人遗骨中^{14}C 原子的数目。

代入数据，可得

$$t=-\frac{5\ 690}{0.693}\ln\frac{3}{5}\ \mathrm{a}=4\ 194\ \mathrm{a}\approx4\ 200\ \mathrm{a}$$

此墓的年代约为公元前 2200 年。

3. 哈勃定律的应用

15-10. 类星体是离地球非常遥远而又十分明亮的天体。利用多普勒效应测量它发出的光谱位移，可以测出它的运动速度。今测得某一类星体从地球的退行速度为 0.55c。（1）问这类星体离地球多远？（2）假定这一类星体从大爆炸以来就以 0.55c 的速度运动，试估算一下宇宙的年龄。

解：（1）根据哈勃定律

$$v=H_0r \quad (H_0=1.78\times10^{-18}\ \mathrm{s}^{-1})$$

可得
$$r=\frac{v}{H_0}=\frac{0.55\times3\times10^8}{1.78\times10^{-18}}\ \mathrm{m}=9.27\times10^{25}\ \mathrm{m}=9.8\times10^9\ \mathrm{l.\,y.}$$

（2）假定从大爆炸以来宇宙就一直膨胀着，则由哈勃常量可得宇宙的年龄为

$$T=\frac{1}{H_0}=\frac{1}{1.78\times10^{-18}}\ \mathrm{s}=5.6\times10^{17}\ \mathrm{s}=1.78\times10^{10}\ \mathrm{a}$$

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》,其行为人将承担相应的民事责任和行政责任;构成犯罪的,将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序,保护读者的合法权益,避免读者误用盗版书造成不良后果,我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为,希望及时举报,本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581999 58582371 58582488

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法律事务与版权管理部

邮政编码 100120

普通物理学系列教材

（程守洙　江之永　主编）

□ 978-7-04-042919-0　普通物理学（第七版）　上册

□ 978-7-04-043797-3　普通物理学（第七版）　下册

□ 978-7-04-044934-1　普通物理学简明教程（第三版）　上册

□ 978-7-04-044933-4　普通物理学简明教程（第三版）　下册

■ 978-7-04-046009-4　普通物理学（第七版）习题分析与解答

ISBN 978-7-04-046009-4

9 787040 460094 >

定价：43.00 元

[General Information]
书名=普通物理学（第7版）习题分析与解答
作者=孙?疆，胡盘新主编
页数=437
SS号=14170146
DX号=
出版日期=2016.12
出版社=高等教育出版社