南京航空航天大学

二〇二一 ～ 二〇二二 学年 第一学期《机械振动基础及应用》

考试试题

考试日期：2022年3月11日　　试卷类型：A　　试卷代号：020021

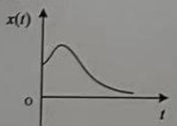
班号　　　学号　　　姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

本题分数	10分
得　分	

一、（10分，每题2分）判断题

1. 确定一个简谐振动所需的三个要素是频率、周期和相位。（　）
2. 应用 Laplace 变换可以求解非零初始条件下的振动响应问题。（　）
3. 对于临界阻尼条件下系统的振动，若要实现下图中细实线所示的振动响应，则其对应的初始条件为 $x(0)>0, \dot{x}(0)<0$。（　）



4. 无阻尼多自由度系统的自由振动可表示为各阶主振型的叠加，在任何初始条件下也不可能仅按某一阶模态振动。（　）
5. 多自由度系统互异固有频率所对应的固有振型，关于质量矩阵加权正交。（　）

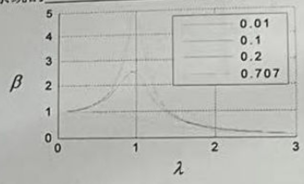
本题分数	10
得　分	

二、（10分，每题2分）填空题

1. 位移频响函数矩阵 $H(\omega)$ 中的元素 $H_{ij}(\omega)$ 反映了系统第 j 个自由度上施加________

________后，第 i 个自由度的____________。

2. 下图为单自由系统的____________性曲线。



3. 在比例阻尼多自由度系统中，阻尼矩阵可视为________和________的线性组合

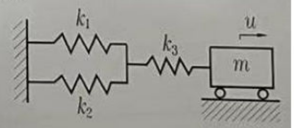
4. 一般粘性多自由度阻尼系统具有质量矩阵 $\boldsymbol{M}$，刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$，阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}$，通过引入状态向量 $v(t)=[u(t)\ \dot{u}(t)]^T$ 则可以在状态空间中用微分方程组 $\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{v}}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{0}$

描述，其中 $\boldsymbol{A}=$________，$\boldsymbol{B}=$________。

5. 如下图所示的均质直 Bernoulli-Euler 梁模型，左端 $x=0$ 处固支、右端 $x=l$ 自由，则梁弯曲振动的边界条件为________________。

本题分数	5
得　分	

三、（5分）振动系统如下图所示，三个弹簧的刚度系数分别为：k_1、k_2、k_3，写出图示系统的等效刚度表达式。当 $k_3=4\times10^5\,\text{N/m}$，$m=10\text{kg}$，$k_1=2\times10^5\,\text{N/m}$，$k_2=2\times10^5\,\text{N/m}$，求出系统振动的固有频率。

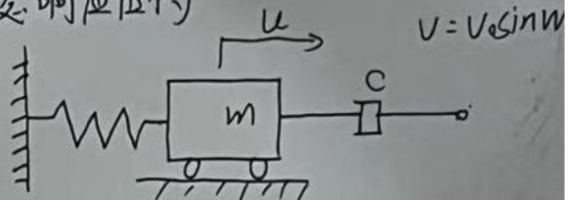


四. 已知单自由度无阻尼系统的质量和刚度分别为 $m=5kg$ $k=180N/m$. 求该系统在初始条件

$u_0=0.2m$ $\dot{u}_0=0.12m/s$ 下的自由振动

五. 振动系统如下图所示. $u(t)$ 表示质量块的绝对位移. $v(t)=V_0\sin\omega t$ 为阻尼器末端点位移

(1) 推导质量块 m 的运动微分方程 (2) 求质量块 m 的稳态响应位移

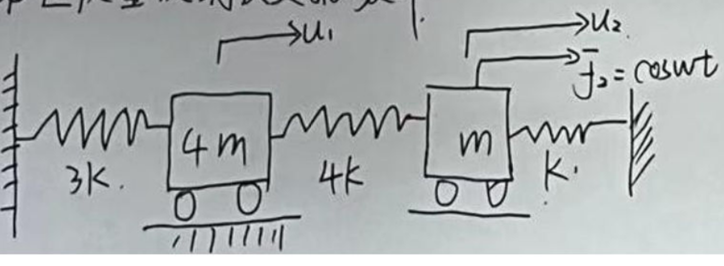


八 振动系统如下图所示

(1) 写出系统振动微分方程

(2) 求解系统两个质量块的稳态响应位移.

(3) 求右边质量块的反共振频率

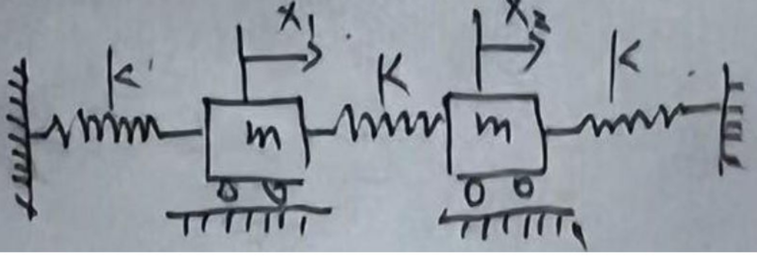


七：如图所示两自由度系统 (1) 写出系统振动微分方程

(2) 求固有频率和固有振型，画出各阶主振型图形。

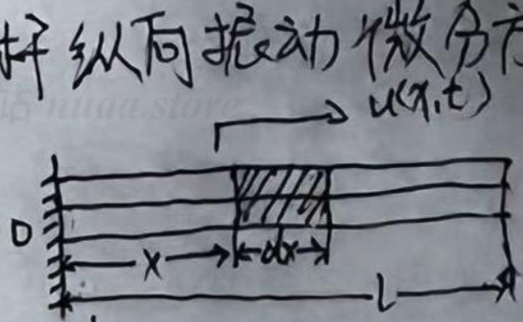
(3) 当系统存在初始条件 $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 时

求解系统自由振动响应



九、如下图所示，等截面均匀杆一端固定，另一端自由。

(1) 写出杆的边界条件，(2) 试推导杆纵向振动微分方程



一、1. ×

2. √

3. ×

4. √

5. √

1. 单位正弦激励 $\sin\omega t$，稳态位移响应幅值

2. 幅频特性

3. 质量矩阵，刚度矩阵

4. $\frac{C}{M}$，$\frac{K}{M}$

5. $Y(0)=0$，$\frac{d^2Y(0)}{dx^2}=0$，$Y(l)=0$，$\frac{d^2Y(l)}{dx^2}=0$

三、$k' = k_1 + k_2$

$= 4\times10^5\ N/m$

等效刚度：$k_{eq} = \dfrac{k'\cdot k_3}{k'+k_3} = 2\times10^5\ N/m$

固有频率：$w_n = \sqrt{\dfrac{k_{eq}}{m}} = 141.42\ rad/s$

四. $m\ddot{u}+ku=0$

$$w_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=6\,rad/s$$

$$u(t)=A_1\cos w_n t+A_2\sin w_n t \quad ①$$

把 $u_0=0.2m$，$\dot{u}_0=0.12m/s$ 代入①式，得

$$u(t)=u_0\cos w_n t+\frac{\dot{u}_0}{w_n}\sin w_n t$$

$$=0.2\cos 6t+0.02\sin 6t$$

五(1) $m\ddot{u}(t)+ku(t)-c(\dot{v}(t)-\dot{u}(t))=0$

$$m\ddot{u}+ku+c\dot{u}=cV_0 w\cos wt$$

(2) 稳态响应: $$u(t)=\frac{cV_0 w/k}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}\cos(wt-\varphi)$$

$w_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$. 式中, $\lambda=\frac{w}{w_n}$ $\quad \xi=\frac{c}{2mw_n}$

$$\varphi=\arctan\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$$

七.（1）振动微分方程： $M\ddot{X}+KX=0$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2)频率方程：$\left|K-\omega^2 M\right|=0$

$$\begin{vmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & 2k-\omega^2 m \end{vmatrix}=0$$

解，得 固有圆频率 $\omega_{n1}=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ $\omega_{n2}=\sqrt{\dfrac{3k}{m}}$

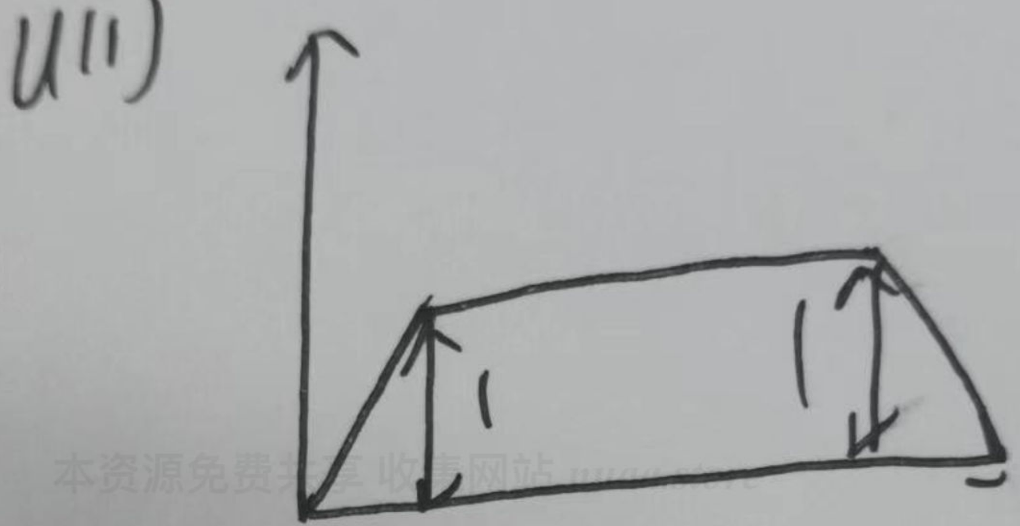
把 ω_{n1}、ω_{n2} 分别代入特征值问题方程 $\left(K-\omega^2 M\right)U=0$ 解，得

主振型：$U1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $U2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

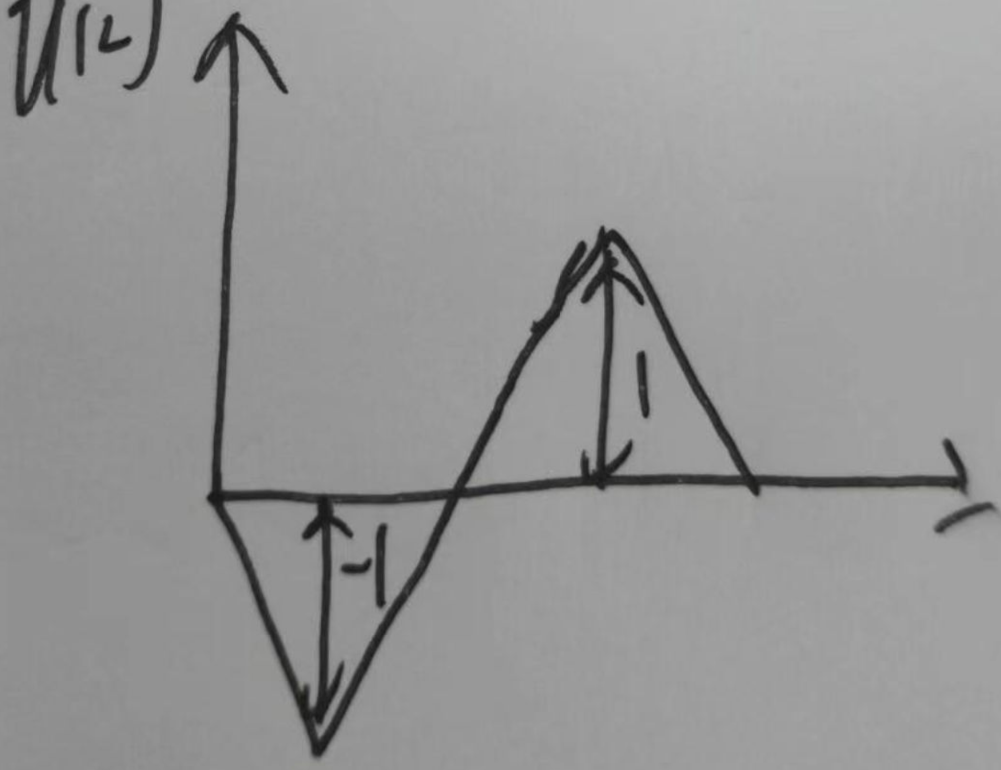
接上(2)

主振型图:

一阶:



二阶:



七(3) 固有振型矩阵

$$U=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$U^{T}MU=m\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\quad \alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2m}}\quad \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2m}}$$

正则振型矩阵: $U_N=\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$

$$X_N=U_N^{T}MX_0$$

$$=\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\sqrt{m}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\sqrt{m}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}$$

接上(3) $x_N = u_N^T M u_0$

$$= \sqrt{m}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

自由振动响应 $x = u_N\left[x_{Nr}\cos w_r t + \frac{1}{w_r}\dot{x}_{Nr}\sin w_r t\right]$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2}\cdot\sqrt{m}\cos w_1 t + \frac{1}{w_1}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{m}\sin w_1 t \\ \frac{1}{w_2}\cdot -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{m}\sin w_2 t \end{bmatrix}$$

八.（1）.振动微分方程： $M\ddot{U}+KU=0$

$$\begin{bmatrix} 4m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7k & -4k \\ -4k & 5k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2)频率方程： $\left|K-\omega^2 M\right|=0$

$$\begin{vmatrix} 7k-4\omega^2 m & -4k \\ -4k & 5k-\omega^2 m \end{vmatrix}=0$$

解，得 固有圆频率 $\omega_{n1}=\sqrt{\dfrac{(27-5\sqrt{17})k}{8m}}$ $\omega_{n2}=\sqrt{\dfrac{(27+5\sqrt{17})k}{8m}}$

把 ω_{n1}、ω_{n2} 分别代入特征值问题方程 $\left(K-\omega^2 M\right)U=0$ 解，得

主振型： $U1=\begin{bmatrix} 1.05 \\ 1 \end{bmatrix}$ $U2=\begin{bmatrix} -0.24 \\ 1 \end{bmatrix}$

九. (1) 左端固定，其边界条件为 $U(0)=0$.

右端不固定，～ 为 $\left.\frac{dU(x)}{dx}\right|_{x=L}=0$

(2) ~~$U(x)=$~~ $u(x,t)=U(x)F(t)$ ①

$$F(t)=A\sin\omega t+B\cos\omega t$$

$$U(x)=C\sin\frac{\omega x}{a}+D\cos\frac{\omega x}{a} \quad ②$$

边界条件代入②式，得.

$$D=0,\ \frac{\omega}{a}C\cos\frac{\omega L}{a}=0$$

频率方程： $\cos\frac{\omega L}{a}=0$

杆的固有频率： $\omega_r=\frac{2r-1}{2}\cdot\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\quad (r=1,2,\cdots)$

$$U_r(x)=\sin\left(\frac{2r-1}{2}\cdot\frac{\pi x}{L}\right)\quad (r=1,2,\cdots)$$