南京航空航天大学

二〇二一～二〇二二 学年 第一学期 《随机信号分析》 考试试题

考试日期：2021年 12月 29日 试卷类型：B 试卷代号：040011

班号		学号		姓名	

题号	一	二	总分
得分			

本题分数	36
得 分	

（试卷最后一页给出了可能用到的傅立叶变换对）

一、填空题（每空 2 分，共 36 分）

1、随机变量 X 和 Y 互不相关，均服从标准高斯分布，令随机变量 $Z=X-5Y-2$。则 $E[Z]=$__________，$D[Z]=$__________，特征函数 $Q_Z(u)=$__________。

2、随机变量 X 服从 $[-1,3]$ 区间上的均匀分布，随机变量 Y 服从 $N(X-1,5)$ 的高斯分布，则数学期望 $E\{E[2Y+1|X]\}=$__________。

3. 已知复随机过程 $Z(t)$ 由 N 个复信号的和构成，即 $Z(t)=\sum_{n=1}^{N}A_n e^{j(100t+\Theta_n)}$，其中 A_n 和 Θ_n 为相互独立的随机变量，且 Θ_n $(n=1,2,\ldots,N)$ 之间也相互独立，$\Theta_n \sim U(-\pi,\pi)$，$E[A_n]=2$，$D[A_n]=1$。则 $Z(t)$ 的自相关函数为__________。

4、各态历经过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau)=5e^{-10|\tau|}$，则 $D[X(t)]=$______，$E\{2X(t)-5\}=$__________，$G_X(\omega)=$__________，$X(t)$ 的总平均

功率为________。

5、已知随机信号 $X(t)$ 的功率谱密度 $G_X(\omega)=\dfrac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}$，则 $R_X(\tau)=$________；均方值为________。

6、设计一稳定的线性系统，输入为具有单位谱的白噪声，输出信号的功率谱密度为 $G_Y(\omega)=\dfrac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}$。则系统的单位冲激响应 $h(t)=$________。

7、$H^{-1}\left[\dfrac{t}{1+t^2}\right]=$________，$H^{-1}\left[\exp(jt)\right]=$________。

8、已知均方可微过程 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)=2e^{-\tau^2}$，其导数为 $Y(t)=X'(t)$，则 $G_{XY}(\omega)=$________，$G_Y(\omega)=$________。

9、已知线性系统的单位冲激响应为 $h(t)=2U(t)-U(t-1)-U(t-3)$，其中 $U(t)$ 为单位阶跃函数，当系统的输入为具有功率谱密度 $G_X(\omega)=10$ 的白噪声时，则系统的等效噪声带宽为________。

10. 随相余弦信号 $s(t)$ 的功率远小于窄带高斯噪声 $N(t)$ 的功率，则 $X(t)=s(t)+N(t)$ 在某个时刻，其包络平方服从________分布。

本题满分	64
得　分	

二、计算题（共 64 分，给出计算过程）

1、统计独立的零均值随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 具有自相关函数 $R_X(\tau)=e^{-|\tau|}$，$R_Y(\tau)=\cos(2\pi\tau)$。试求：① $W(t)=X(t)+Y(t)$ 的自相关函数；② $V(t)=X(t)-Y(t)$ 的自相关函数；③ $W(t)$ 和 $V(t)$ 的互相关函数。（8 分）

2. 设 A 与 B 是两个独立随机变量，且 A□ $N(0,\sigma^2)$， B□ $N(0,\sigma^2)$ 。而随机信号 $X(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ 是高斯信号，其中 ω 是常量。试写出：①该信号的一维概率密度函数；② $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 的二维概率密度函数。（6 分）

3. 设随机信号 $Z(t)=X\sin t+Y\cos t$，其中 X 和 Y 是两个具有不同概率密度的独立的随机变量，它们的均值均为零，方差均为 σ^2。试求：① $Z(t)$ 的均值；② $Z(t)$ 的自相关函数；③判断 $Z(t)$ 是否宽平稳，给出理由；④判断 $Z(t)$ 是否严平稳，给出理由。（12 分）

4. 设 A 与 B 均为零均值随机变量，方差皆为σ^2，且互不相关。定义随机信号 $X(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$，其中 ω_0 是实常数。求① $X(t)$ 的自相关函数；② $X(t)$ 的功率谱密度；③ $X(t)$ 的总平均功率。（6 分）

5. 设一线性系统的传递函数为：

$$H(\omega)=\frac{1}{1+j\omega a}$$

其中 a 为正实数。若输入信号 $X(t)$ 为白噪声，其自相关函数 $R_X(\tau)=\sigma_X^2\delta(\tau)$。记输出信号为 $Y(t)$，求：① $Y(t)$ 的自相关函数；② $Y(t)$ 的总平均功率；③ $Y(t)$ 的一维概率密度函数。（8 分）

6、随机信号 $X(t)=2\sin(100t+\Theta)$，$\Theta\sim U(0,2\pi)$，附加到物理谱密度为1的白噪声上。它们的和作用到系统功率传递函数为 $|H(\omega)|^2=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2}$ 的线性系统上，其中 a 为正的常数。试求：①输出信号的功率谱；②输出噪声的功率谱；③输出信号的总平均功率和输出噪声总平均功率的比（输出信噪比）；④ a 为何值时，输出信噪比最大？

（14分）

7、零均值窄带平稳过程 $X(t)=A(t)\cos\omega_0 t-B(t)\sin\omega_0 t$ 的功率谱密度 $G_X(\omega)$ 在频带内关于中心频率 ω_0 偶对称。其中，$A(t)$ 和 $B(t)$ 均为平稳过程，且自相关函数均为 $R(\tau)$。①求 $X(t)$ 的自相关函数；② $X(t)$ 的自相关函数的包络；③ $X(t)$ 的自相关函数的预包络。（10 分）

可能用到的傅立叶变换对

$$e^{-a|t|}\Leftrightarrow\frac{2a}{a^2+\omega^2}\qquad e^{-at}U(t)\Leftrightarrow\frac{1}{a+j\omega}$$

$$te^{-at}U(t)\Leftrightarrow\frac{1}{(a+j\omega)^2}\qquad \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right]\Leftrightarrow\sigma\sqrt{2\pi}\exp\left[-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right]$$

1. -2 26

$\exp\{-2ju - 13u^2\}$

2. 7

3. 5^N

4. 5 -5

$\frac{100}{w^2+100}$ 5

5 $\frac{3}{16}e^{-|\tau|}+\frac{5}{24}e^{-3|\tau|}$

$\frac{19}{48}$

6. $\left(\frac{1}{2}e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{-t}\right)u(t)$

7 $\frac{1}{1+t^2}$ $j\exp(jt)$

8. $-j\omega\sqrt{\pi}\exp\{-\frac{\omega^2}{4}\}$

$\omega^2\sqrt{\pi}\exp\{-\frac{\omega^2}{4}\}$

9. 1

10 x^2

二. 1. ① $E(w(t)w(t+\tau))$

$= E(X(t)X(t+\tau) + X(t)Y(t+\tau)$

$+ X(t+\tau)Y(t) +$

$Y(t)Y(t+\tau))$

$= R_X(\tau) + R_Y(\tau)$

$= e^{-|\tau|} + \cos(2\pi\tau)$

1. ② $E(V(t)V(t+\tau))$

$$= E\big(X(t)X(t+\tau) + Y(t)Y(t+\tau) - X(t)Y(t+\tau) - Y(t)X(t+\tau)\big)$$

$$= R_X(\tau) + R_Y(\tau)$$

$$= e^{-|\tau|} + \cos 2\pi\tau$$

1. ③ $E(W(t)V(t+\tau))$

$$= E(X(t)X(t+\tau)) - E(Y(t)Y(t+\tau))$$

$$= R_X(\tau) - R_Y(\tau)$$

$$= e^{-|\tau|} - \cos(2\pi\tau)$$

2. ① $E(X(t)) = 0 \cdot \cos wt + 0 \cdot \sin wt$

$= 0$

$R_X(\tau) = E\big(A^2 \cos(wt)\cos(wt + w\tau)$

$+ AB \sin(wt)\cos(wt + w\tau)$

$+ AB \sin(wt + w\tau)\cos(wt)$

$+ B^2 \sin(wt)\sin(wt + w\tau)\big)$

$= \sigma^2 \cos(w\tau)$

② $Var(X(t)) = R_X(0) - R_X(\infty)$

$= \sigma^2$

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2(t)}{2\sigma^2}\right)$$

2. ②

$x(t_1)$ $x(t_2)$ 的协方差

$$C = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma^2\cos\omega\tau \\ \sigma^2\cos\omega\tau & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

$$m_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|C| = \sigma^4 - \sigma^4\cos^4\omega\tau$$

$$f_x(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^4 - \sigma^4\cos\omega\tau}} \exp\left\{ -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma^2} - \frac{x_1 x_2}{2\sigma^2\cos^2\omega\tau} \right\}$$

3. ① $E(z(t)) = E(X)\sin t + E(Y)\cos t$

$$= 0$$

② $R_z(\tau)$

$$= E(z(t)z(t+\tau))$$

$$= E(X^2 \sin t \sin(t+\tau) + Y^2 \cos t \cos(t+\tau)$$

$$+ XY \sin t \cos(t+\tau) + XY \cos t \sin(t+\tau))$$

$$= \sigma^2 [\sin t \sin(t+\tau) + \cos t \cos(t+\tau)]$$

$$= \sigma^2 \cos(\tau)$$

3. ③ 由于 $E(Z(t))$ 为常数

且 $R_Z(\tau)$ 只与 τ 有关

则宽平稳

3的4问 不是严平稳过程

4.

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$$

$$= E[A^2]\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau)$$

$$+ E[B^2]\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)$$

$$+ 0 + 0$$

$$E[A^2] = E[B^2] = \sigma^2$$

$$R_X(\tau) = \sigma^2\cos\omega_0\tau$$

② $$G_X(\omega) = F[R_X(\tau)]$$

$$= \sigma^2\pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$$

③ $$P = R(0) = \sigma^2$$

5

① $|H(\omega)|^2 = \dfrac{1}{\omega^2 + 2^2}$

$G_X(\omega) = \sigma_X^2$

$G_Y(\omega) = \dfrac{\sigma_X^2}{\omega^2 + 2^2}$

$R_Y(\tau) = \dfrac{\sigma_X^2}{2 \cdot 2} e^{-2|\tau|}$

② $P_Y = R_Y(0) = \dfrac{\sigma_X^2}{2 \cdot 2}$

③ $Y \sim N\left(0, \dfrac{\sigma_X^2}{2 \cdot 2}\right)$

$f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi \dfrac{\sigma_X^2}{2}}} \exp\left\{-\dfrac{y^2}{\dfrac{\sigma_X^2}{2}}\right\}$

6. ① $R_x(\tau) = E\left(4\sin(100t+\theta)\sin(100t+\theta+100\tau)\right)$

$$= 2\cos(100\tau)$$

$$S_X(w) = 2\pi\left[\delta(w+100) + \delta(w-100)\right]$$

$$S_Y(w) = S_X(w) \cdot |H(w)|^2$$

$$= 2\pi\left[\delta(w+100) + \delta(w-100)\right] \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{100}{a}\right)^2}$$

6. ②

$$S_N(w) = \frac{1}{2} \cdot |H(w)|^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{w^2 + a^2}$$

6. 3 $R_Y(\tau) = \frac{2}{1+\left(\frac{100}{a}\right)^2} \cos(100\tau)$

$R_N(\tau) = \frac{a}{4} e^{-a|\tau|}$

$S/N = \frac{2}{1+\left(\frac{100}{a}\right)^2} \cdot \frac{4}{a}$

6. 4 $a=100$

7. (1)

$A(t)$ 同相分量

$B(t)$ 正交分量

$$R_X(\tau) = R_A(\tau)\cos w_0\tau$$

$$= R_B(\tau)\cos w_0\tau$$

$$= R(\tau)\cos w_0\tau$$

(2) 相关函数

$$R_X(\tau) = \mathrm{Re}[R_X(\tau)e^{jw_0\tau}]$$

包络为 $R_X(\tau) = R(\tau)$

7.3

预包络

$x(t)$自相关函数为

$$R(\tau)\cos\omega_0\tau$$

预包络：

$$R(\tau)\cos\omega_0\tau + jH[R(\tau)\cos\omega_0\tau]$$

$$= R(\tau)\cos\omega_0\tau + jR(\tau)\sin\omega_0\tau$$