选择：1. 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=4$. 下列结论正确的是（　　）

A. $\oiint\limits_{\Sigma} x\,dS=0$　　　B. $\oiint\limits_{\Sigma(外侧)} x\,dy\,dz=4\pi$

C. $\oiint\limits_{\Sigma} x^2\,dS=0$　　　D. $\oiint\limits_{\Sigma(外侧)} x^2\,dy\,dz=4\pi$

2. 设曲线L: $f(x,y)=1$（$f(x,y)$具有一阶连续偏导数）. 求第二象限内的点M和第四象限内的点N. T为L上从M到N的一段弧. 则下列小于零的是（　　）

A. $\int_T f(x,y)\,dx$　　B. $\int_T f(x,y)\,dy$　　C. $\int_T f(x,y)\,ds$　　~~D. $\int_T f_x(x,y)$~~

D. $\int_T f_x'(x,y)\,dx+f_y'(x,y)\,dy$.

3. 微分方程 $y''+y'=e^{2x}+\cos x$ 的一个特解应具有形式（　　）

A. $ae^{2x}+b\cos x$　　B. $ae^{2x}+b\sin x+c\cos x$

C. $axe^{2x}+b\cos x$　　D. $axe^{2}+b\sin x+c\cos x$.

一. 填空

1. 根值审敛法中 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=r<1$ 是正项级数收敛的 ______；
函数 $u(x,y)$ 在点可微是函数在该点沿任一方向导数存在的 ______；
正项级数部分和有界是正项级数收敛的 ______；（1.充分不必要条件；2.必要不充分…；3.充要…）

2. 向量场 $A=\sqrt{x^2+y^2}\,\vec{i}+\sqrt{x^2+y^2}\,\vec{j}+\frac{e^{z}}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{k}$ 在点 $(1,1,0)$ 处的散度为 ______

3. 设曲面 Σ是 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $z=0$，$z=1$ 中间的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x+z)\,ds=$ ______

4. Ω是被柱面 $x^2+y^2=1$ 以及 $z=0$，$z=1$ 围成的封闭区域，$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dv=$ ______

5. 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{9}\right)^n$ ______，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}=$ ______

6. $2e^{x}\tan y\,dx-(1+e^{x})\sec^2 y\,dy=0$ 满足 $y(0)=\frac{\pi}{4}$ 的特解为 ______

7. 以 $y=\sin 3x$ 为特解的二阶常系数齐次线性微分方程为 ______

三. 1. $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导，且 $g(x,y)=f(e^{x+y},xy)$，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$

2. 设 $z=f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 求 $z=f(x,y)$ 的极值点和极值.

四. 判断下列级数是否是绝对收敛，条件收敛或发散，说明理由

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\sin n}{5^n+3^n}$　　2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n^2+n+1}}$

五. 利用高斯公式计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\,dydz+(z+1)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$，其中Σ为下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧

六. 设 $f(u)$ 具有连续的一阶导数，且当 $x>0$，$y>0$ 时，$z=\frac{y}{x}f\left(\frac{y}{x}\right)$ 满足 $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{y}{x}\right)^3$

求z的表达式.

七. 求微分方程 $y''+y=x\sin x$ 的通解

八. 求 $f(x)=x\ln(1+x^2)$ 的麦克劳林展开式

九. 求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$ 的收敛域，并求收敛域内的和函数.

十. 1. 证明 P-级数在 $p>1$ 收敛　　2. 若存在另外一正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n^2}$ 也收敛

1. 由对称性. A

2. B

3. A

$$\int_T f(x,y)\,dy = \int_T dy = y_2 - y_1 < 0$$

填空1. 充分不必要；充分不必要；充要

2. $\operatorname{div} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+2y) + \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$= \frac{x+y+e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{2+1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

3. $\iint\limits_{\Omega} (x+\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy$

$$= \sqrt{2}\iint\limits_{\Omega}(x+\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy$$

$$= \sqrt{2}\iint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2\,dr$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

4. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^1 \rho^2\, dz$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

6. $(1+e^x)|\csc 2y + \cot 2y| = 2$

7. $y'' + 9y = 0$

三. 1. $\frac{\partial g}{\partial x}=f_1'\cdot e^{x+y}+f_2'\cdot y$.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=(f_{11}''\cdot e^{x+y}+f_{12}''\cdot y)\cdot e^{x+y}+f_1'\cdot e^{x+y}+(f_{12}''\cdot e^{x+y}+f_{22}''\cdot y)\cdot y+f_2'$$

$$=f_{11}''e^{2(x+y)}+2ye^{x+y}f_{12}''+y^2f_{22}''+f_1'e^{x+y}+f_2'$$

2. $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+6x-9$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-3y^2+6y$. 令 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$，得 $(1,0)\ (-3,0)\ (1,2)\ (-3,2)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x+6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6y+6$.

① 把 $(1,0)$ 代入得 $A=12$, $B=0$, $C=6$. $AC-B^2>0$, $A>0$, 极小值点，极小值 $=-5$

② ⋯ $(-3,0)$ ⋯, ⋯ -12, ⋯, ⋯ 6, $AC-B^2<0$, 非极值点.

③ ⋯ $(1,2)$ ⋯, ⋯ 12, ⋯, ⋯ -6, ⋯ ⋯

④ ⋯ $(-3,2)$ ⋯ -12, ⋯ $C=-6$, $AC-B^2>0$, $A<0$, 极大值点，极大值 $=31$

四、1. $\because \left|\frac{4^n\sin n}{5^n+3^n}\right| \le \frac{4^n}{5^n+3^n} < \frac{4^n}{5^n} = \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ 收敛

$\therefore$ 原级数绝对收敛.

2. $\because \left|\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n^2+n+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} > \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot n}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{n}$ 发散

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n^2+n+1}}\right|$ 发散.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n^2+n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} = 0$, $\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$ 单调递减.

$\therefore$ 由莱布尼茨定理,原级数收敛

$\therefore$ 原级数条件收敛

五. 补充平面 $x^2+y^2=1$. 下侧.

$$-\iiint_{\Omega} \cancel{du}[2(z+1)+1]\,dxdydz-\iint_{\Sigma}dxdy$$

$$=-\iiint_{\Omega}(2z+3)\,dxdydz-\pi$$

$$=-\pi-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^1(2r\cos\varphi+3)\cdot r^2dr$$

$$=-\pi-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^1 2r^3\cos\varphi\,dr$$

$$=-3\pi-4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^1 r^3dr$$

$$=-3\pi-4\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{7\pi}{2}$$

六. $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{y}{x^2}f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y^2}{x^3}f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$-\frac{y}{x}f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y^2}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)+2\frac{y}{x}f\left(\frac{y}{x}\right)+2\frac{y^2}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=\frac{y}{x}f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=\frac{y^3}{z^3}$$

$$z^3=\frac{y^3}{z+\frac{y^2}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)}$$

七. 对应的特征方程为 $r^2+1=0$, $r_1=i$, $r_2=-i$.

∴齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

设特解 $y^*=x\left[(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x\right]$

把 y^* 代入,得,

$2a\cos x-(2ax+b)\cdot\sin x-(2ax+b)\cdot\sin x-(ax^2+bx)\cdot\cos x+2c\cdot\sin x+(2cx+d)\cos x$
$+(2cx+d)\cos x-(cx^2+dx)\cdot\sin x+(ax^2+bx)\cdot\cos x+(cx^2+dx)\cdot\sin x=x\cdot\sin x$.

$[2a+2cx+d+2cx+d]\cdot\cos x+[-2ax+b-2ax+b+2c]\cdot\sin x=x\sin x$.

得,$a=-\frac{1}{4}$, $b=c=0$, $d=\frac{1}{4}$.

∴原方程通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{4}x^2\cos x+\frac{1}{4}x\sin x$.

八. $\ln(1+x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n}}{n}$.

$x\ln(1+x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n+1}}{n}\quad(-1\le x\le 1)$.

九. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{(n+1)^2-1}}{\left(\frac{1}{n^2-1}\right)}\right|=1.$

当$x=1$时, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-1}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right).$

$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$=\frac{3}{2}.$

∴当$x=\pm1$时, 级数收敛.

收敛域$[-1,1].$

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2-1}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{x^n}{n-1}-\dfrac{x^n}{n+1}\right).$

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n-1}=x\cdot\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n-1}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=x\cdot[-\ln(1-x)],\ (-1\le x<1)$

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}=\dfrac{1}{x}\cdot\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=\dfrac{1}{x}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}-x-\dfrac{x^2}{2}\right)=-\dfrac{\ln(1-x)}{x}-1-\dfrac{x}{2},\ (-1\le x<1)$

$\therefore\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left[-x\ln(1-x)+\dfrac{\ln(1-x)}{x}+1+\dfrac{x}{2}\right],\ (-1\le x<1)$

十.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{a_n}}{n^2}$为正项级数

$\because\sqrt{a_n}\cdot\dfrac{1}{n^2}\le\dfrac{(\sqrt{a_n})^2+\left(\frac{1}{n^2}\right)^2}{2}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n^4}.$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$收敛

∴原级数收敛.

设 $p>1$. 因为当 $k-1\leqslant x\leqslant k$ 时,有 $\frac{1}{k^p}\leqslant\frac{1}{x^p}$,所以

$$\frac{1}{k^p}=\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k^p}\mathrm{d}x\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\ (k=2,3,\cdots),$$

从而级数(2-2)的部分和

$$s_n=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^p}\leqslant1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=1+\int_{1}^{n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$$

$$=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1}\ (n=2,3,\cdots),$$

这表明数列 $\{s_n\}$ 有界,因此级数(2-2)收敛.