《高等数学(下)》速成课

——框框老师

第一讲　多元函数微分学（一）

(3种题型)

1. 二元函数极限（二重极限）的计算

例. 求 (1). $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$ ；(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

[分析]：二元极限的计算：法1°. "非0因子，趋向代入"

解：(1) 显然 $(x,y)\to(0,1)$ 时，因子：$x^2+y^2\to 1$，$1-xy\to 1$

则：原式 $= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{1-xy}{x^2+y^2} = \dfrac{1-0\times 1}{0^2+1^2} = 1$

(2) $(x,y)\to(1,0)$ 时，分子、分母均非0，趋向代入.

原式 $= \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\sin(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \sin 2$

例. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

[分析]：二元极限的计算：法2°. 利用恒等变形；法3°. 整体代换+洛必达

解：法1° 分子有理化：$\dfrac{A-\sqrt{B}}{C} = \dfrac{(A-\sqrt{B})(A+\sqrt{B})}{C\cdot(A+\sqrt{B})} = \dfrac{A^2-B}{C\cdot(A+\sqrt{B})}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} \overset{\text{分子}}{\underset{\text{有理化}}{=\!=}} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy\cdot(2+\sqrt{xy+4})} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\cancel{4}-(xy+\cancel{4})}{xy\cdot(2+\sqrt{xy+4})}$$

$$= -\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{2+\sqrt{xy+4}}$$ (非0因子，趋向代入)

$$= -\frac{1}{2+\sqrt{0+4}} = -\frac{1}{4}$$

例. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

[分析]：二元极限的计算：法2°. 利用恒等变形；法3°. 整体代换+洛必达

法2° 令整体 $xy=t$，当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$t=xy\to 0$，则：

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2-\sqrt{t+4}}{t} \overset{\text{洛必达}}{=\!=} \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{0-\frac{1}{2\sqrt{t+4}}}{1}$

$=\lim\limits_{t\to 0}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t+4}}$ （非0因子，趋向代入）

$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{0+4}}=-\frac{1}{4}$

例 求 (1). $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{x}$　　(2). $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln(1+2(x^2+y^2))}{x^2+y^2}$

[分析]：二元极限的计算：法$4°$. 利用无穷小替换

解：(1) $x\to 0$时，$\sin x \sim x \Rightarrow \square\to 0$时，$\sin\square \sim \square$

$$\text{原式} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} y = 0$$

(2) $x\to 0$时，$\ln(1+x) \sim x \Rightarrow \square\to 0$时，$\ln(1+\square) \sim \square$

$$\text{原式} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln(1+2(x^2+y^2))}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 2$$

2. 多元函数的一阶偏导数计算

例. 若 $z=f(x,y)=e^{-y}\cdot\sin x$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x,y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x,y)$，和 $f_y'(1,2)$

[分析]：$z=f(x,y)$ 关于 x (y) 求偏导时，把 y (x) 看成常数.

解：① $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x' \xlongequal{y\text{为常数}} e^{-y}\cdot(\sin x)_x'=e^{-y}\cdot\cos x$

② $\frac{\partial z}{\partial y}=f_y' \xlongequal{x\text{为常数}} \sin x\cdot(e^{-y})_y'=\sin x\cdot(-e^{-y})=-\sin x\cdot e^{-y}$

③ 由 $f_y'(x,y)=-\sin x\cdot e^{-y}\Rightarrow f_y'(1,2)=-\sin 1\cdot e^{-2}$

例. 若 $u=\arctan(x-y\cdot z)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$

[分析]：三元复合函数求偏导：$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，$(\arctan x^2)'=\frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot(x^2)'$

解：① $\frac{\partial u}{\partial x}\xlongequal{y,z\text{为常数}}[\arctan(x-yz)]_x'=\frac{1}{1+(x-yz)^2}\cdot(x-yz)_x'=\frac{1}{1+(x-yz)^2}$

② $\frac{\partial u}{\partial y}\xlongequal{x,z\text{为常数}}[\arctan(x-yz)]_y'=\frac{1}{1+(x-yz)^2}\cdot(x-yz)_y'=\frac{-z}{1+(x-yz)^2}$

③ $\frac{\partial u}{\partial z}\xlongequal{x,y\text{为常数}}[\arctan(x-yz)]_z'=\frac{1}{1+(x-yz)^2}\cdot(x-yz)_z'=\frac{-y}{1+(x-yz)^2}$

例. 若 $z=f(xy,x+2y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$

【分析】：多元抽象复合函数求偏导：链式法则："同枝相乘，异枝相加"

解：$z=f(\underbrace{xy}_{u},\underbrace{x+2y}_{v})$

$$\Rightarrow z<\begin{matrix} u<\begin{matrix}x\\ y\end{matrix} \\ v<\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\end{matrix}$$

因　中　自

① $\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_u'\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f_v'\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

$=f_u'\cdot y+f_v'\cdot 1$

② $\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\underset{f_1'}{\underset{\parallel}{f_u'}}\cdot x+\underset{f_2'}{\underset{\parallel}{f_v'}}\cdot 2$

3. 多元函数求二阶偏导数

例. 若 $z=2xy+\sin(x+y^3)$，求 $f''_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$f''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$f''_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

[分析]：多元函数求二阶偏导数：先求一阶偏导，再求二阶偏导。

解：① $f'_x \overset{y\text{为常数}}{=\!=\!=} 2y+\cos(x+y^3)\cdot(x+y^3)'_x = 2y+\cos(x+y^3)$

$f'_y \overset{x\text{为常数}}{=\!=\!=} 2x+\cos(x+y^3)\cdot(x+y^3)'_y = 2x+\cos(x+y^3)\cdot 3y^2$

② $f''_{xx}=[f'_x]'_x=[2y+\cos(x+y^3)]'_x = 0+(-1)\sin(x+y^3)\cdot(x+y^3)'_x = -\sin(x+y^3)$

③ $f''_{xy}=[f'_x]'_y=[2y+\cos(x+y^3)]'_y = 2+(-1)\sin(x+y^3)\cdot(x+y^3)'_y = 2-\sin(x+y^3)\cdot 3y^2$

④ $f''_{yy}=[f'_y]'_y=[2x+\cos(x+y^3)\cdot 3y^2]'_y = 0+(-1)\cdot\sin(x+y^3)\cdot 9y^4+\cos(x+y^3)\cdot 6y$

例. 设 $z=f(2x-y,\ xy)$，求 $f''_{xy}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

[分析]：多元抽象复合求二阶导数 f''_{xy}：先求 $f'_x(2x-y,\ xy)$，再求 f''_{xy}

解：$z=f(\underbrace{2x-y}_{1},\ \underbrace{xy}_{2})$ $\Rightarrow$ $z\left\langle\begin{array}{l} u \triangleq 2x-y \left\langle\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right. \\ v \triangleq xy \left\langle\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right. \end{array}\right.$

u：1，v：2

"同枝相乘，异枝相加"

① $f'_x = f'_1\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+f'_2\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2f'_1+f'_2\cdot y \xlongequal[\text{中间变量相同}]{f'_1,\ f'_2\text{与}f} 2f'_1(2x-y,xy)+yf'_2(2x-y,xy)$

② $f''_{xy}=[f'_x]'_y=[2f'_1(\underbrace{2x-y}_{1},\underbrace{xy}_{2})+yf'_2(\underbrace{2x-y}_{1},\underbrace{xy}_{2})]'_y$

$=2[f''_{11}\cdot(-1)+f''_{12}\cdot x]+1\cdot f'_2+y\cdot[f''_{21}\cdot(-1)+f''_{22}\cdot x]$

第二讲　多元函数微分学（二）

(4种题型)

4. 多元函数求全微分

例. 求下列函数全微分：(1) $z = xy + \frac{x}{y}$ (2) $u = (xy)^z$

[分析] ① 二元 $z = f(x,y)$ 的全微分：$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

② 三元 $u = f(x,y,z)$ 的全微分：$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$

解：(1) $z = xy + \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} \overset{y\text{常数}}{=\!=} y + \frac{1}{y}$，$\frac{\partial z}{\partial y} \overset{x\text{常数}}{=\!=} x - \frac{x}{y^2}$

$\therefore dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (y + \frac{1}{y})dx + (x - \frac{x}{y^2})dy$

(2) $u = (xy)^z \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \overset{y,z\text{常数}}{=\!=} z\cdot(xy)^{z-1}\cdot y$，$\frac{\partial u}{\partial y} \overset{x,z\text{常数}}{=\!=} z\cdot(xy)^{z-1}\cdot x$

$\frac{\partial u}{\partial z} = (xy)^z\cdot \ln(xy)$

$\therefore du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = zy\cdot(xy)^{z-1}dx + z\cdot x(xy)^{z-1}dy + (xy)^z\cdot\ln(xy)dz$

5. 多元隐函数求偏导数

例. 方程 $e^{x-2y+z}=x^2+3y+z$ 确定二元函数 $z=f(x,y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

[分析]：已知三元方程 $F(x,y,z)=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ —— 方程两边对 x 求偏导，y 为常数

解：① 方程 $e^{x-2y+z}=x^2+3y+z$ 两边对 x 求导（注：y 是常数，z 是因变量）

$$\Rightarrow e^{x-2y+z}\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2x+\frac{\partial z}{\partial x}\xRightarrow{\text{解}}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x-e^{x-2y+z}}{e^{x-2y+z}-1}$$

② 方程 $e^{x-2y+z}=x^2+3y+z$ 两边对 y 求导（注：x 是常数，z 是因变量）

$$\Rightarrow e^{x-2y+z}\cdot\left(-2+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=3+\frac{\partial z}{\partial y}\xRightarrow{\text{解}}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3+2e^{x-2y+z}}{e^{x-2y+z}-1}$$

6. 多元函数求极值

例. 求函数 $z=x^3-3x^2+2y^3+3y^2+4$ 的极值.

口诀:"小大大小"

[分析]:多元极值,一驻二判:①步:先求驻点:令 $f_x'(x,y)=0$, $f_y'(x,y)=0$ 得 (x_0,y_0)

②步:在驻点 (x_0,y_0) 处求 $f''_{xx}(x_0,y_0)\triangleq A$, $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)\triangleq B$, $f''_{yy}(x_0,y_0)\triangleq C$

③步:判别式:$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2$, $\begin{cases} 若 AC-B^2>0,且 \begin{cases} A>0 \Rightarrow f(x_0,y_0)极小 \\ A<0 \Rightarrow f(x_0,y_0)极大 \end{cases} \\ 若 AC-B^2<0,则 f(x_0,y_0) 非极值. \end{cases}$

解:1° 先求驻点:$z=f(x,y)=x^3-3x^2+2y^3+3y^2+4$

$\Rightarrow \begin{cases} f_x'=3x^2-6x=3x(x-2)\triangleq 0 \\ f_y'=6y^2+6y=6y(y+1)\triangleq 0 \end{cases}$ 解得:$\begin{cases} x=0 或 x=2 \\ y=0 或 y=-1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ 驻点:$(0,0)$, $(0,-1)$, $(2,0)$, $(2,-1)$

6. 多元函数求极值

例. 求函数 $z=x^3-3x^2+2y^3+3y^2+4$ 的极值. 口诀: "小大大小"

②步: 在驻点 (x_0,y_0) 处求 $f''_{xx}(x_0,y_0)\triangleq A$, $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)\triangleq B$, $f''_{yy}(x_0,y_0)\triangleq C$

③步: 判别式: $\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2$, 若 $AC-B^2>0$, 且 $\begin{cases} A>0 \Rightarrow f(x_0,y_0)\text{极小} \\ A<0 \Rightarrow f(x_0,y_0)\text{极大} \end{cases}$

若 $AC-B^2<0$, 则 $f(x_0,y_0)$ 非极值.

解: 1° $\begin{cases} f'_x=3x^2-6x=3x(x-2)\triangleq 0 \\ f'_y=6y^2+6y=6y(y+1)\triangleq 0 \end{cases}$ 解得: $\begin{cases} x=0 \text{ 或 } x=2 \\ y=0 \text{ 或 } y=-1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ 驻点: $(0,0),(0,-1)$, $(2,0),(2,-1)$

2° 再求二阶导数: $f''_{xx}=6x-6$, $f''_{xy}=0$, $f''_{yy}=12y+6$

3° 判别: ① 当驻点为 $(0,0)$, $A\triangleq f''_{xx}(0,0)=-6$, $B=f''_{xy}(0,0)=0$, $C=f''_{yy}(0,0)=6$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2=-36<0 \Rightarrow f(0,0)$ 非极值.

6. 多元函数求极值

例. 求函数 $z=x^3-3x^2+2y^3+3y^2+4$ 的极值.

口诀:"小大大小"

②步: 在驻点 (x_0,y_0) 处求 $f''_{xx}(x_0,y_0)\triangleq A$, $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)\triangleq B$, $f''_{yy}(x_0,y_0)\triangleq C$

③步: 判别式: $\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2$,
若 $AC-B^2>0$, 且 $\begin{cases} A>0 \Rightarrow f(x_0,y_0) \text{极小} \\ A<0 \Rightarrow f(x_0,y_0) \text{极大} \end{cases}$
若 $AC-B^2<0$, 则 $f(x_0,y_0)$ 非极值.

解: 1° $\begin{cases} f'_x=3x^2-6x=3x(x-2)\triangleq 0 \\ f'_y=6y^2+6y=6y(y+1)\triangleq 0 \end{cases}$

解得: $\begin{cases} x=0 \text{ 或 } x=2 \\ y=0 \text{ 或 } y=-1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ 驻点: $(0,0)$, $(0,-1)$, $(2,0)$, $(2,-1)$

2° 再求二阶导数: $f''_{xx}=6x-6$, $f''_{xy}=0$, $f''_{yy}=12y+6$

3° 判别: ① 当驻点为 $(0,-1)$, $A=f''_{xx}(0,-1)=-6$, $B=f''_{xy}(0,-1)=0$, $C=f''_{yy}(0,-1)=-6$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2=36>0$, 且 $A=-6<0$ $\Rightarrow f(0,-1)=5$ 为极大值.

6. 多元函数求极值

例. 求函数 $z=x^3-3x^2+2y^3+3y^2+4$ 的极值.

口诀:"小大大小"

②步: 在驻点 (x_0,y_0) 处求 $f''_{xx}(x_0,y_0)\triangleq A$, $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)\triangleq B$, $f''_{yy}(x_0,y_0)\triangleq C$

③步: 判别式: $\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC-B^2$,

$\begin{cases} \text{若 } AC-B^2>0, \text{且} \begin{cases} A>0 \Rightarrow f(x_0,y_0)\text{极小} \\ A<0 \Rightarrow f(x_0,y_0)\text{极大} \end{cases} \\ \text{若 } AC-B^2<0, \text{则 } f(x_0,y_0)\text{非极值.} \end{cases}$

解: 1° $\begin{cases} f'_x = 3x^2-6x = 3x(x-2) \triangleq 0 \\ f'_y = 6y^2+6y = 6y(y+1) \triangleq 0 \end{cases}$ 解得: $\begin{cases} x=0 \text{ 或 } x=2 \\ y=0 \text{ 或 } y=-1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ 驻点: $(0,0)$, $(0,-1)$, $(2,0)$, $(2,-1)$

2° 再求二阶导数: $f''_{xx}=6x-6$, $f''_{xy}=0$, $f''_{yy}=12y+6$

3° 判别: ① 当驻点为 $(2,0)$, $A=f''_{xx}(2,0)=6$, $B=f''_{xy}(2,0)=0$, $C=f''_{yy}(2,0)=6$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC-B^2=36>0$, 且 $A=6>0$ $\Rightarrow f(2,0)=0$ 为极小值.

6. 多元函数求极值

例. 求函数 $z=x^3-3x^2+2y^3+3y^2+4$ 的极值.

口诀:"小大大小"

②步: 在驻点 (x_0,y_0) 处求 $f''_{xx}(x_0,y_0)\triangleq A$, $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)\triangleq B$, $f''_{yy}(x_0,y_0)\triangleq C$

③步: 判别式: $\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC-B^2$, 若 $AC-B^2>0$, 且 $\begin{cases} A>0 \Rightarrow f(x_0,y_0) \text{极小} \\ A<0 \Rightarrow f(x_0,y_0) \text{极大} \end{cases}$

若 $AC-B^2<0$, 则 $f(x_0,y_0)$ 非极值.

解: 1° $\begin{cases} f'_x = 3x^2-6x = 3x(x-2) \triangleq 0 \\ f'_y = 6y^2+6y = 6y(y+1) \triangleq 0 \end{cases}$

解得: $\begin{cases} x=0 \text{ 或 } x=2 \\ y=0 \text{ 或 } y=-1 \end{cases} \Rightarrow$ 驻点: $(0,0),(0,-1)$ $(2,0),(2,-1)$

2° 再求二阶导数: $f''_{xx}=6x-6$, $f''_{xy}=0$, $f''_{yy}=12y+6$

3° 判别: ④当驻点为 $(2,-1)$, $A=f''_{xx}(2,-1)=6$, $B=f''_{xy}(2,-1)=0$, $C=f''_{yy}(2,-1)=-6$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC-B^2=-36<0 \Rightarrow f(2,-1)$ 非极值.

7. 条件极值(最值)

例. 求 $z=f(x,y)=xy$ 在条件 $x+y=1$ 下的极大值.

[分析] 条件极值问题：$z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值(最值)

1° 先构造拉格朗日函数：$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

2° 求驻点：令 $L_x'=0$, $L_y'=0$, $L_\lambda'=0$ 解得驻点 (x_0,y_0)

拉格朗日乘数法

解：法1：1°步：构拉氏函数：$L(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x+y-1)$

2°步：求驻点：
$$\begin{cases} L_x'=y+\lambda\triangleq 0 \\ L_y'=x+\lambda\triangleq 0 \\ L_\lambda'=x+y-1\triangleq 0 \end{cases}$$

L_x'、L_y' 两式 $\Rightarrow x=y$；解得驻点 $(x_0,y_0)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$\Rightarrow$ 唯一的驻点即为所求极大值点：$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ 极大值.

7. 条件极值（最值）

例. 求 $z=f(x,y)=xy$ 在条件 $x+y=1$ 下的极大值.

[分析] 条件极值问题：$z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值（最值）

1° 先构造拉格朗日函数：$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

2° 求驻点：令 $L_x'=0$, $L_y'=0$, $L_\lambda'=0$ 解得驻点 (x_0,y_0)

拉格朗日乘数法

解：法2 把目标函数 $f(x,y)$ 化为一元函数（代入法）

$z=f(x,y)=xy$，由条件 $x+y=1 \xRightarrow{y=1-x} f(x,y)=x(1-x)=\boxed{x-x^2}$

① 求一元驻点：$f_x'=1-2x \triangleq 0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 即驻点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

② $f_{xx}''=-2<0 \Rightarrow f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ 为极大值.

小大大小

$f=x-x^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+x-x^2$

$=\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-x)^2 \Rightarrow f_{max}=\frac{1}{4}$

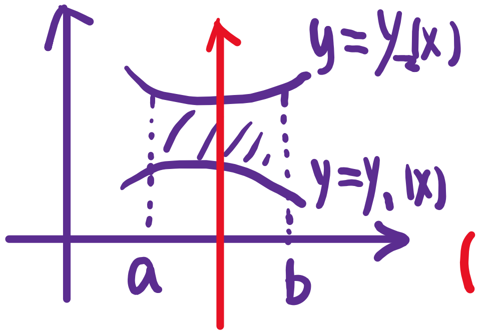
第三讲　二重积分

(3种题型)

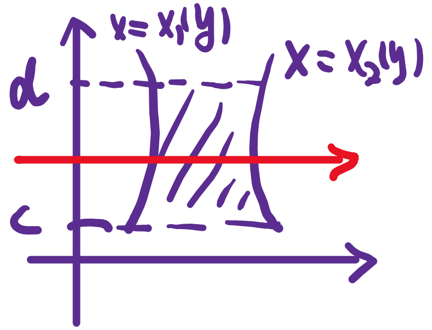
1. 非圆周区域上二重积分的计算

例. 求 $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$，其中 D 由直线：$x=2$，$y=1$，$y=x$ 所围成

[分析]：(1) 区域 D 的分类：



(X－型)



(Y－型)

$\Rightarrow D_x \xlongequal{\text{定}x\text{穿}y} \begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$，$D_Y \xlongequal{\text{定}y\text{穿}x} \begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$

(2) 二次积分法：$\iint\limits_{D_x} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$ （先 y 后 x）

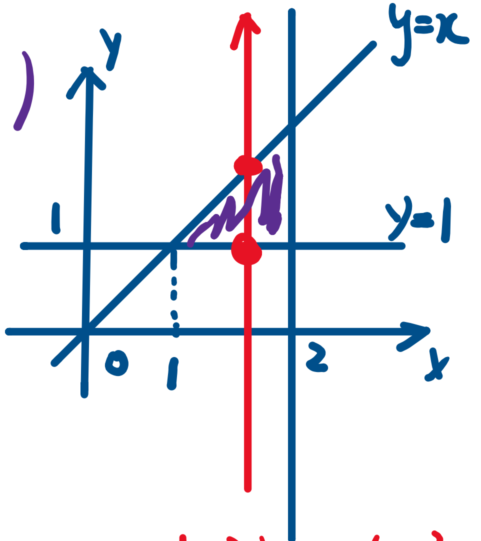
$\iint\limits_{D_Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$ （先 x 后 y）

1. 非圆周区域上二重积分的计算

例. 求 $\iint_D xy\,dx\,dy$，其中 D 由直线：$x=2$，$y=1$，$y=x$ 所围成

[分析]：(1) $D_x \underset{\text{定x穿y}}{=\!=} \begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$，$D_y \underset{\text{定y穿x}}{=\!=} \begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$

(2) 二次积分法：$\iint_{D_x} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$ （先 y 后 x）



解：第1°步：画区域D草图，求交点如右图

第2°步：把D表示出来：$D_x \underset{\text{定x穿y}}{=\!=} \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 1 \le y \le x \end{cases}$

第3°步：用二次积分式：$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_1^2 dx \cdot \int_1^x xy\,dy = \int_1^2 x\,dx \cdot \int_1^x y\,dy$

$\frac{1}{2}y^2\Big|_1^x = \frac{1}{2}(x^2-1)$

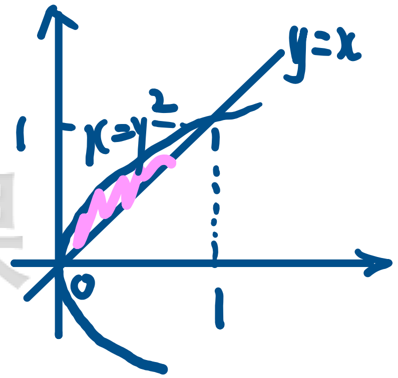
$= \int_1^2 x \cdot \frac{1}{2}(x^2-1)\,dx = 9/8$

例. 求 $\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}dxdy$，其中 D 由曲线 $x=y^2$，$y=x$ 所围成.

[分析]：① 当用 D_x 无法算出二重积分时，则交换积分次序选 D_y 区域.

② 无法算出的积分：$\int \frac{\sin y}{y}dy$，$\int \frac{\cos y}{y}dy$，$\int e^{-y^2}dy$，$\int e^{y^2}dy$.

解：1° 画区域 D 的草图，求交点如右：

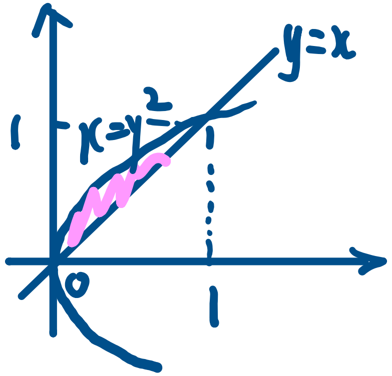


2°. 把 D 表示出来：$D_x \underline{\underline{\text{定}x\text{穿}y}} \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ x\le y\le \sqrt{x} \end{cases}$

3°. 用二次积分公式：$\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}dxdy = \int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y}dy$ 无法算出 ⇒ 交换次序，D_y

4° $D_y \underline{\underline{\text{定}y\text{穿}x}} \begin{cases} 0\le y\le 1 \\ y^2\le x\le y \end{cases}$，则 $\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}dxdy = \int_0^1 dy\int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y}dx$

例. 求 $\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy$，其中 D 由曲成 $x=y^2$, $y=x$ 所围成.



解: 1°. 画区域 D 的草图，求交点如右:

2°. 把 D 表示出来: $D_x \underset{\text{定x穿y}}{=\!=} \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$

3°. 用二次积分公式: $\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy = \int_0^1 dx \underbrace{\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y}\,dy}$ 无法算出 $\Rightarrow$ 交换次序，D_y

4° $D_y \underset{\text{定y穿x}}{=\!=} \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y^2 \le x \le y \end{cases}$，则 $\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{\sin y}{y}\,dy \cdot \underbrace{\int_{y^2}^{y} 1\,dx}$ $\rightarrow$ $x\Big|_{y^2}^{y} = y - y^2$

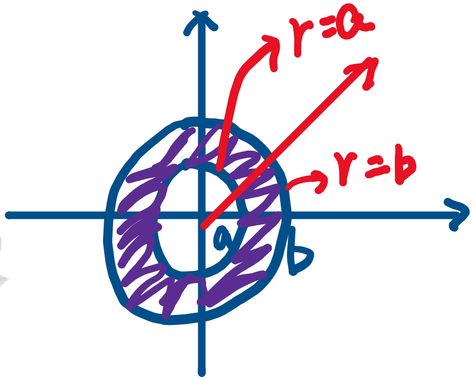
$= \int_0^1 \frac{\sin y}{y}(y-y^2)\,dy = \int_0^1 \sin y - y\cdot\sin y\,dy = 1-\sin 1$

2. 圆周相关区域上二重积分的计算.

例1. 求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中D是圆环区域：$a^2 \le x^2+y^2 \le b^2$

[分析] 当积分区域D与圆有关，或被积函数含有 x^2+y^2 时 —— 利用极坐标计算

$$\iint\limits_{D_{直}} f(x,y)\,dxdy \xlongequal[dxdy=r\,drd\theta]{x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta} \iint\limits_{D_{极}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,drd\theta$$



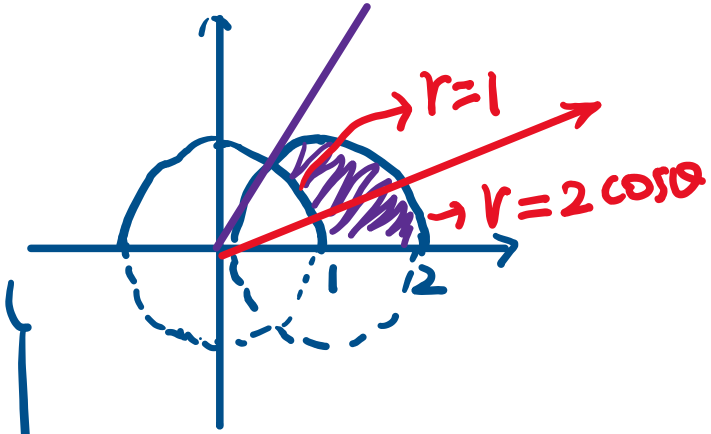
解：第1°步：画D的草图如右.

第2°步：把D表示出来：$D \xlongequal{定\theta穿r} \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ a \le r \le b \end{cases}$

第3°步：$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \xlongequal[dxdy=r\,drd\theta]{x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta} \iint\limits_{D_{极}} \sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}\cdot r\,drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \underbrace{\int_a^b r^2\,dr}_{\frac{r^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3}}$

$$= \frac{b^3-a^3}{3}\cdot\int_0^{2\pi} 1\,d\theta = \frac{2\pi}{3}(b^3-a^3)$$

例 求 $\iint\limits_D xy\,dxdy$，其中 D：$1 \le x^2+y^2 \le 2x$，$y \ge 0$.



解：1°. 画出 D 的草图.

2°. 把 D 表示出来：$D_{极} \xlongequal{定\theta穿r} \left\{ \begin{array}{l} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3} \\ 1 \le r \le 2\cos\theta \end{array} \right\}$

3° 用极坐标下二次积分公式：

$$\iint\limits_D xy\,dxdy \xlongequal[dxdy = r\,drd\theta]{x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta} \iint\limits_{D_{极}} r\cos\theta \cdot r\sin\theta \cdot r\,dr\,d\theta = \iint\limits_{D_{极}} r^3 \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta\, d\theta$$

$D_{极} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3} \\ 1 \le r \le 2\cos\theta \end{array} \right\}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^{2\cos\theta} r^3 \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta\, dr = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta \cdot \sin\theta\, d\theta \cdot \underbrace{\int_1^{2\cos\theta} r^3\, dr}_{\frac{r^4}{4}\Big|_1^{2\cos\theta}} \quad 4\cos^4\theta - \frac{1}{4}$$

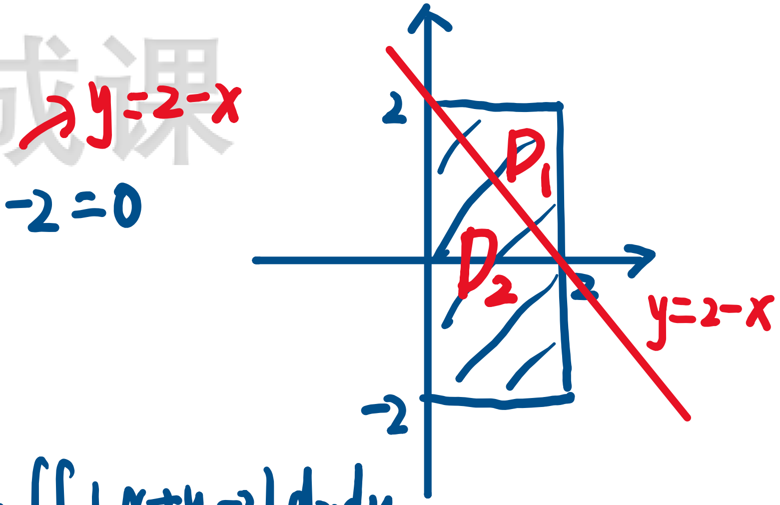
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot \left(4\cos^4\theta - \frac{1}{4}\right) d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^5\theta \cdot \sin\theta\, d\theta - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta \cdot \sin\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{4}{6}\cos^6\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{8}\cos^2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{9}{16}$$

3. 分段函数的二重积分

例. 求 $\iint\limits_D |x+y-2|\,dx\,dy$，其中 $D=\{0\le x\le 2,\ -2\le y\le 2\}$

[分析] 当 $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ 的被积函数 $f(x,y)$ 含绝对值函数时——：1°.先令绝对值函数等于0得一条分段曲线； 2°.再用该曲线把区域D分成 $D_1\cup D_2$；3°.最后用积分区域可加性计算.



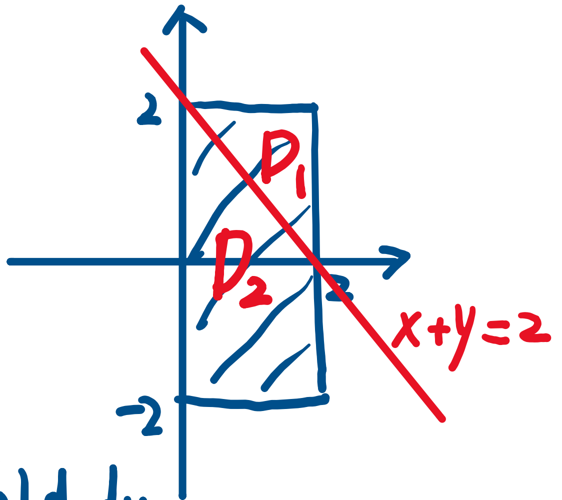
解：1°. D草图如右. 令 $|x+y-2|=0$ 得分段线：$x+y-2=0$

2°. $D=D_1\cup D_2$ 如右图所示

3° 由可加性：$\iint\limits_D |x+y-2|\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1}|x+y-2|\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2}|x+y-2|\,dx\,dy$

3. 分段函数的二重积分计算

例. 求 $\iint\limits_D |x+y-2|\,dx\,dy$，其中 $D=\{0\le x\le 2,\ -2\le y\le 2\}$



解：1°. D 草图如右. 令 $|x+y-2|=0$ 得分段线：$x+y-2=0$

2°. $D=D_1\cup D_2$ 如右图所示

3° 由可加性：$\iint\limits_D |x+y-2|\,dx\,dy=\underbrace{\iint\limits_{D_1}|x+y-2|\,dx\,dy}_{①}+\underbrace{\iint\limits_{D_2}|x+y-2|\,dx\,dy}_{②}$

其中：① $\iint\limits_{D_1}|x+y-2|\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1}x+y-2\,dx\,dy=\int_0^2 dx\int_{2-x}^{2}x+y-2\,dy=\int_0^2\frac{1}{2}x^2dx=\frac{4}{3}$

② $\iint\limits_{D_2}|x+y-2|\,dx\,dy=\iint\limits_{D_2}-(x+y-2)\,dx\,dy=\int_0^2 dx\int_{-2}^{2-x}2-x-y\,dy=\int_0^2\frac{x^2}{2}-4x+8\,dx=\frac{28}{3}$

$\Rightarrow$ 原式 $=①+②=\frac{4}{3}+\frac{28}{3}=\frac{32}{3}$

第四讲　三重积分

(4种题型)

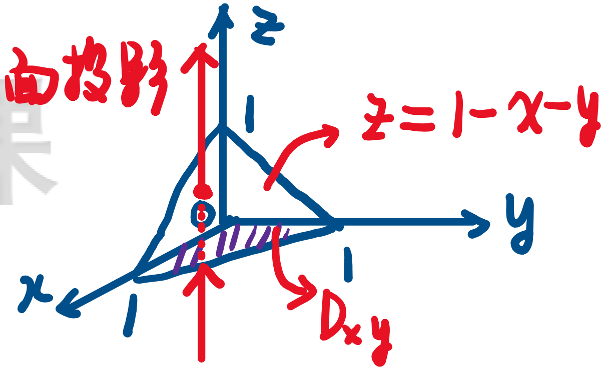
1. 利用投影法("先一后二")求三重积分

例. 求 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dxdydz$，其中 Ω 为由平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成.

[分析]：利用投影法("先一后二")：第1°步：先画积分区域 Ω 的草图；

第2°步：把区域 Ω 表示出来("定 D_{xy} 穿 z")；第3°步：利用"先一后二"的积分公式.

解：1°. 先画 Ω 草图如右：



2°. 把 Ω 表示出来：$\Omega \underline{\underline{\text{定}D_{xy}\text{穿}z}} \begin{cases}(x,y)\in D_{xy} \\ 0\le z\le 1-x-y\end{cases}$ D_{xy}为Ω在xoy面投影

3°. "先一后二"公式：$\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}}dxdy\cdot\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dz$

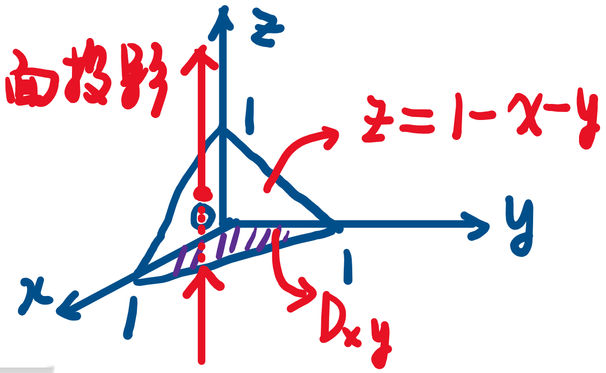
$-\frac{1}{2}(1+x+y+z)^{-2}\Big|_0^{1-x-y}$

$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right]$

1. 利用投影法("先一后二")求三重积分

例. 求 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\,dxdydz$，其中 Ω 为由平面 $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$ 所围成.

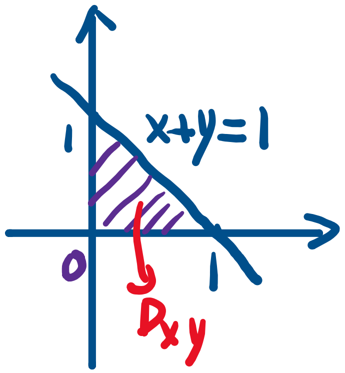
解: 1°. 先画 Ω 草图如右:



2°. 把 Ω 表示出来: $\Omega \xlongequal{\text{定}D_{xy}\text{穿}z} \begin{cases}(x,y)\in D_{xy}\\ 0\le z\le 1-x-y\end{cases}$

3°. "先一后二"公式: $\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}\,dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy\cdot\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}\,dz$

$\Rightarrow$ 原式 $= \iint\limits_{D_{xy}} -\frac{1}{8}+\frac{1}{2(1+x+y)^2}\,dxdy \xlongequal[\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x\end{cases}]{\text{定}x\text{穿}y} \int_0^1 dx\int_0^{1-x} -\frac{1}{8}+\frac{1}{2(1+x+y)^2}\,dy$



$= \int_0^1 -\frac{1}{8}(1-x)+\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$

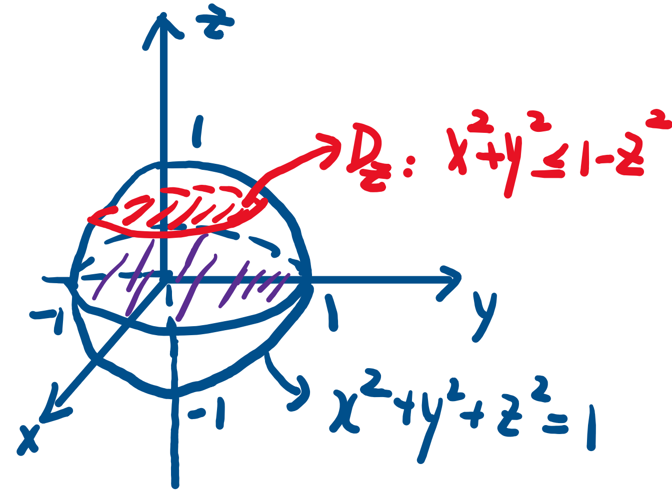
2. 利用平面截割法（"先二后一"）求三重积分

例. 求 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,dx\,dy\,dz$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$

[分析] 当被积函数为 z 的一元函数时，可用平面截割法：1° 画 Ω 草图；

2°. 把 Ω 表示出来（用一个平行于 xoy 面的平面把 Ω 截割）；3° 用"先二后一"公式.

解：1° 先画 Ω 草图如右：



2°. 用一个平行于 xoy 面的平面截割 Ω.

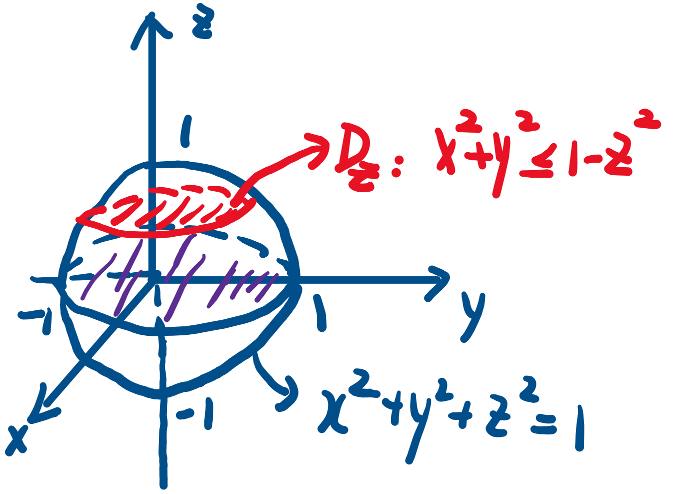
表示 Ω $\underline{\underline{\text{定z穿}D_z}}$ $\begin{cases} -1\le z\le 1 \\ (x,y)\in D_z \end{cases}$

3°. "先二后一"公式：$\iiint\limits_{\Omega} z^2\,dx\,dy\,dz=\int_{-1}^{1}dz\iint\limits_{D_z} z^2\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}z^2\,dz\iint\limits_{D_z} 1\,dx\,dy$

2. 利用平面截割法("先二后一")求三重积分

例. 求 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,dxdydz$ ，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$

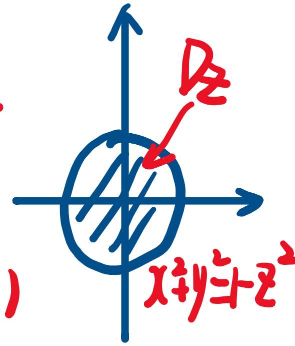
解: 1° 先画 Ω 草图如右:



2°. 用一个平行于 xoy 面的平面截割 Ω.

$$\Rightarrow \Omega \underline{\underline{\text{定}z\text{穿}D_z}} \begin{cases} -1\le z\le 1 \\ (x,y)\in D_z \end{cases}$$

3°. "先二后一"公式: $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,dxdydz = \int_{-1}^{1}dz\iint\limits_{D_z} z^2\,dxdy = \int_{-1}^{1} z^2\,dz \underbrace{\iint\limits_{D_z} 1\,dxdy}_{\begin{array}{c}\parallel\\ S_{\text{圆}}=\pi(\text{半径})^2\\ =\pi\cdot(1-z^2)\end{array}}$



$\Rightarrow$ 原式 $=\int_{-1}^{1} z^2\cdot\pi(1-z^2)\,dz = \frac{4}{15}\pi$

3. 利用柱面坐标求三重积分

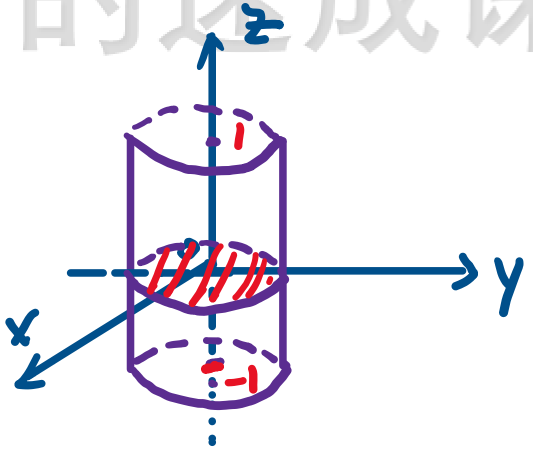
例. 求 $\iiint\limits_{\Omega} x^2+y^2+z^2\,dxdydz$，其中 Ω 为圆柱体：$x^2+y^2\le 1$，$-1\le z\le 1$.

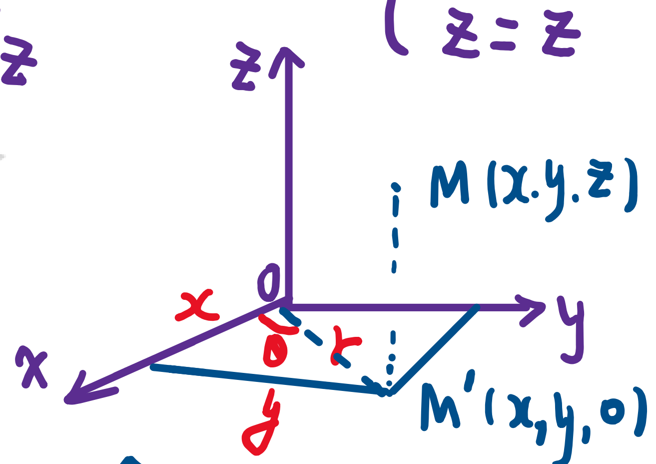
[分析]：当积分区域 Ω 为圆柱体，圆锥体，旋转体时 —— 用柱面坐标：

第1°步：画出 Ω 的草图；第2°步：换元（把直角坐标换成柱面坐标），令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$

并把 Ω 表示出来，还要注意换元时，体积元 $dxdydz = r\,dr\,d\theta\,dz$

第3°步：用三次积分公式计算.



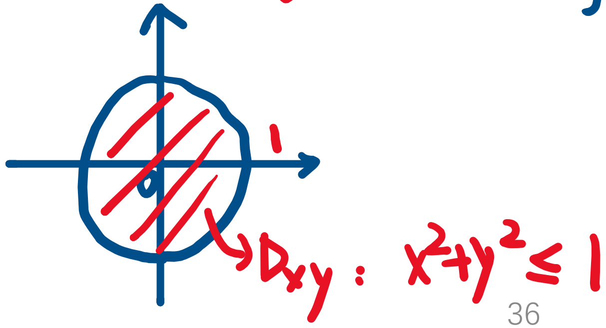


解：1°. 先画 Ω 的草图如右：

2° 令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=z$，

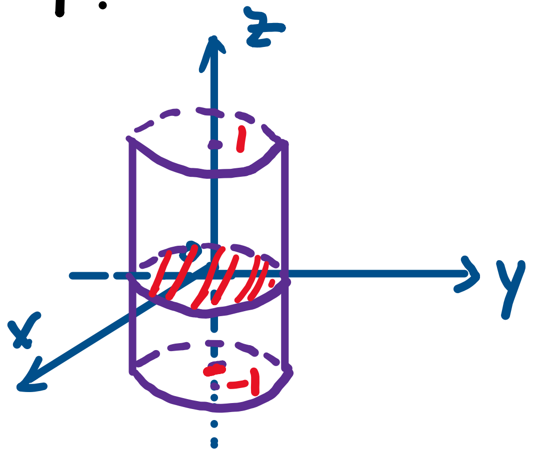
投影：$x^2+y^2\le 1$

$$\Omega=\{(x,y)\in D_{xy},\ -1\le z\le 1\}=\{0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 1,\ -1\le z\le 1\}$$



3. 利用柱面坐标求三重积分

例. 求 $\iiint\limits_{\Omega} x^2+y^2+z^2\,dxdydz$，其中 Ω 为圆柱体：$x^2+y^2\le 1$，$-1\le z\le 1$.

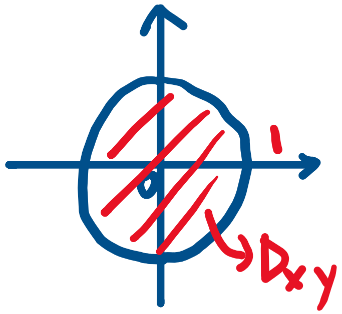


解：1°. 先画 Ω 的草图如右：

2°. 令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=z$，

投影：$x^2+y^2\le 1$

$\Omega=\{(x,y)\in D_{xy},\ -1\le z\le 1\}=\{0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 1,\ -1\le z\le 1\}$



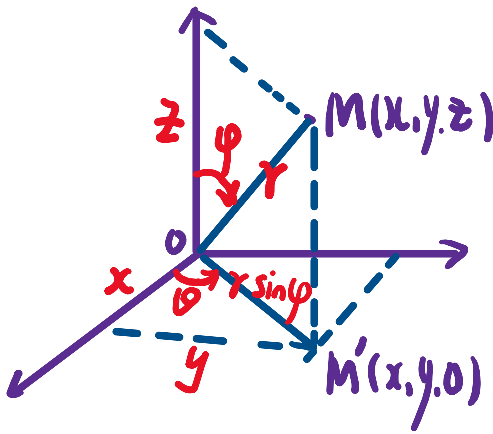
3°. $\iiint\limits_{\Omega} x^2+y^2+z^2\,dxdydz \xlongequal[dxdydz=r\,drd\theta dz]{x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta} \iiint\limits_{\Omega}(r^2+z^2)\cdot r\,drd\theta dz$

$\xlongequal{\text{三次积分}} \int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^1 r\,dr\cdot\int_{-1}^1 (r^2+z^2)\,dz \rightarrow r^2\cdot z\Big|_{-1}^{1}+\frac{1}{3}z^3\Big|_{-1}^{1}=2r^2+\frac{2}{3}$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\cdot\left(2r^2+\frac{2}{3}\right)dr=2\pi\cdot\left[\frac{1}{2}r^4+\frac{1}{3}r^2\right]_0^1=\frac{5}{3}\pi$

4. 利用球坐标计算三重积分.

例. 求 $\iiint\limits_{\Omega} x\cdot y\cdot z\,dxdydz$，其中$\Omega$为由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的区域.



[分析]：当积分区域与球有关时 —— 用球坐标：

第1°步：先画出Ω的草图；

第2°步：换元（把直角坐标换成球坐标），令 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$，

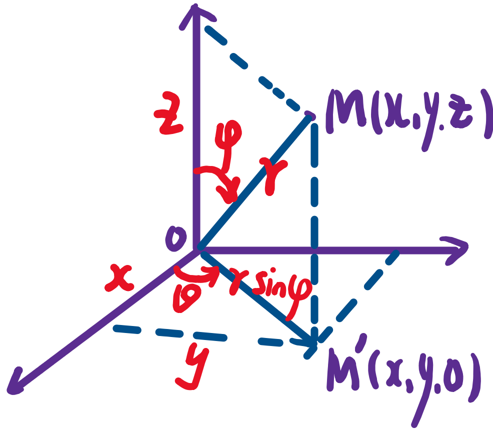
此时，体积元 $dxdydz = r^2\sin\varphi\cdot dr\,d\varphi\,d\theta$，并把$\Omega$表示出来；

第3°步：用三次积分公式.

4. 利用球坐标计算三重积分.

例. 求 $\iiint_{\Omega} x\cdot y\cdot z\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 为由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的区域.

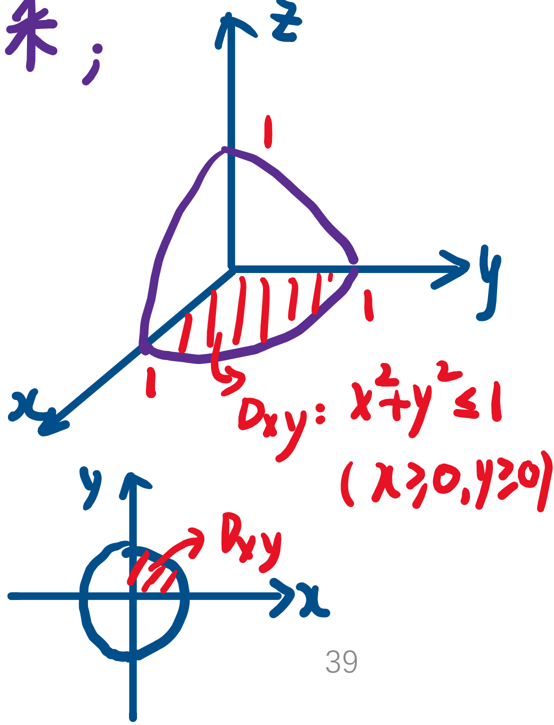
[分析]：第1°步：先画出 Ω 的草图； 第2°步：换元：令 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$，



此时，体积元 $dx\,dy\,dz = r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$，并把 Ω 表示出来；

第3°步：用三次积分公式.

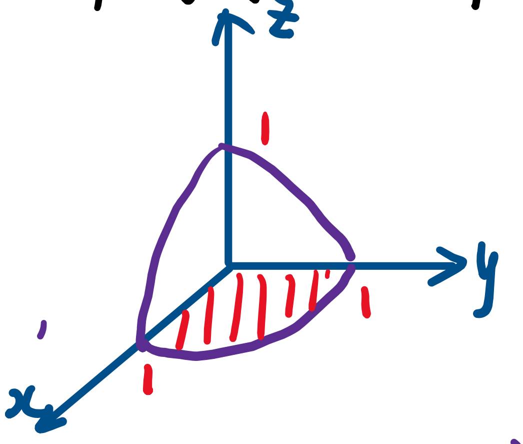
解：1° 先画 Ω 的草图如右.　　2°. 令 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$



则 $\Omega = \left\{ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le 1 \right\}$

4. 利用球坐标计算三重积分.

例. 求 $\iiint\limits_{\Omega} x\cdot y\cdot z\,dxdydz$，其中 Ω 为由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的区域.



[分析]：第1°步：先画出 Ω 的草图； 第2°步：换元：令 $\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$，

此时，体积元 $dxdydz=r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$，并把 Ω 表示出来；第3°步：用三次积分公式

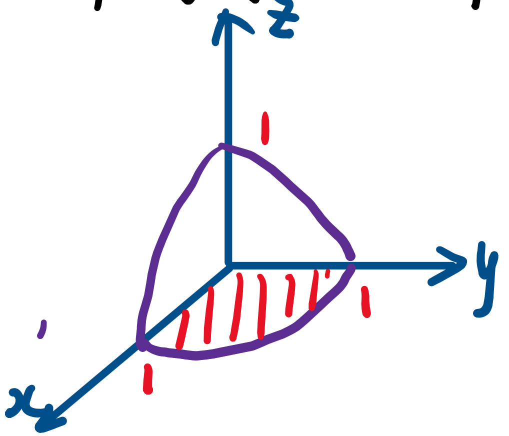
解：1° 先画 Ω 的草图如右. 2°. 令 $\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$，$dxdydz=r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$

则 $\Omega=\left\{0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le1\right\}$

3°. $\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dxdydz=\iiint\limits_{\Omega} r\sin\varphi\cos\theta\cdot r\sin\varphi\sin\theta\cdot r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$

4. 利用球坐标计算三重积分.

例. 求 $\iiint\limits_{\Omega} x\cdot y\cdot z\,dxdydz$，其中 Ω 为由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的区域.



[分析]：第1°步：先画出 Ω 的草图；第2°步：换元：令 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$，

解：1° 先画 Ω 的草图如右. 2°. 令 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$，$dxdydz = r^2\sin\varphi\,drd\varphi d\theta$

则 $\Omega = \left\{0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le 1\right\}$

3°. $\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} r\sin\varphi\cos\theta\cdot r\sin\varphi\sin\theta\cdot r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,drd\varphi d\theta$

$\underline{\underline{三次积分}}$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot\cos\theta\,d\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cdot\cos\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^1 r^5dr = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{48}$

第五讲　曲线积分与曲面积分（一）

(3种题型)

1. 对弧长曲线积分(第一类曲线积分)的计算

例. 设平面曲线 L 为下半圆周: $x^2+y^2=1$ $(y<0)$, 求 $\int_L x^2+y^2\,ds$

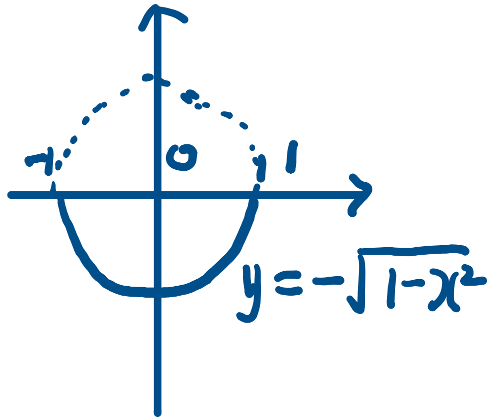
[分析]: 第一类曲线积分 $\int_L f(x,y)\,ds$ 的计算步骤: 第1°步: 画积分路径 L 的图;

第2°步: ① 若 L 的方程为直角坐标方程: $y=y(x)$, $a\le x\le b$, 则 $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$

② 若 L 的方程为参数方程: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, $\alpha\le t\le\beta$, 则 $ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$

第3步: 化为定积分计算 (注意: 若被积函数 $f(x,y)$ 含有 L 的方程, 可直接代入)

解: 法1: 1° 曲线 L 的草图如右:



2° $\int_L x^2+y^2\,ds$ 的被积函数含有 L 方程: $x^2+y^2=1$

$\Rightarrow \int_L x^2+y^2\,ds \overset{先代}{\underset{后算}{=}} \int_L 1\,ds \xlongequal{几何意义}$ 曲线 L 弧长 $= l_{半圆}$

$= \pi\cdot$半径 $=\pi$

1. 对弧长曲线积分(第一类曲线积分)的计算

例. 设平面曲线 L 为下半圆周: $x^2+y^2=1$ $(y<0)$, 求 $\int_L x^2+y^2\,ds$

[分析]: 第一类曲线积分 $\int_L f(x,y)\,ds$ 的计算步骤: 第1步: 画积分路径 L 的图;

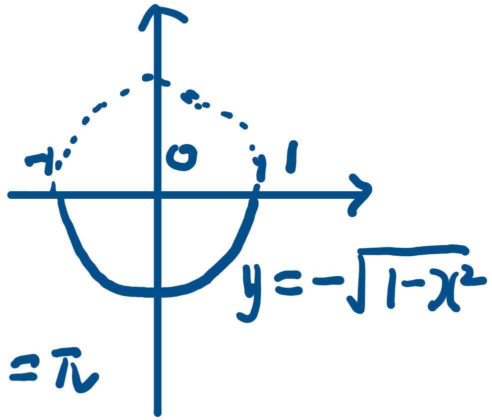
第2步: ① 若 L 的方程为直角坐标方程: $y=y(x)$, $a\le x\le b$, 则 $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$

② 若 L 的方程为参数方程: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, $\alpha\le t\le\beta$, 则 $ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$

第3步: 化为定积分计算 (注意: 若被积函数 $f(x,y)$ 含有 L 的方程, 可直接代入)

解: 法2: 下半圆周 L 方程: $y=-\sqrt{1-x^2}$, $-1\le x\le 1$

$\Rightarrow ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\cdot dx=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$



$\therefore$ 原式 $=\int_L 1\,ds=\int_{-1}^{1}1\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$

1. 对弧长曲线积分(第一类曲线积分)的计算

例. 设平面曲线 L 为下半圆周: $x^2+y^2=1\ (y<0)$, 求 $\int_L x^2+y^2\,ds$

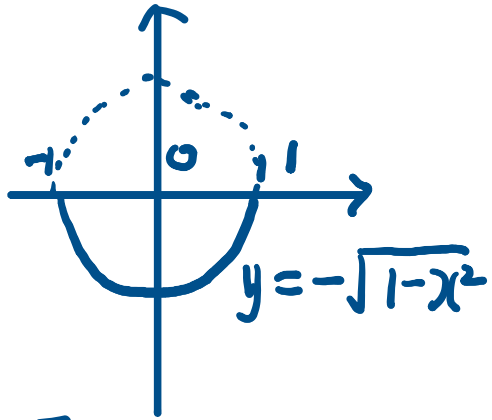
[分析]: 第一类曲线积分 $\int_L f(x,y)\,ds$ 的计算步骤: 第1步: 画积分路径L的图;

第2步: ① 若 L 的方程为直角坐标方程: $y=y(x)$, $a\le x\le b$, 则 $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$

② 若 L 的方程为参数方程: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, $\alpha\le t\le\beta$, 则 $ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$

第3步: 化为定积分计算 (注意: 若被积函数 $f(x,y)$ 含有 L 的方程, 可直接代入)

解: 法3 下半圆周的参数方程: $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$, $\pi\le t\le 2\pi$



$\Rightarrow ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$

$=\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t}\,dt=1\cdot dt$

$\therefore \int_L x^2+y^2\,ds \overset{先代}{\underset{后算}{=}} \int_L 1\,ds$

$=\int_\pi^{2\pi} 1\cdot 1\cdot dt=\pi$

2. 对坐标的曲线积分（第2类曲线积分）的计算

例. 求 $\int_L xy\,dx$，其中 L 为抛物线 $y=x^2$ 上从点 $A(-1,1)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧.

[分析]：第2类曲线积分分为：$\int_L P(x,y)\,dx$；$\int_L Q(x,y)\,dy$；$\int_L P\,dx+Q\,dy$ 的步骤：

第1步：画出积分路径 L 的图；

第2步：① 若 L 方程为直角坐标方程：$y=y(x)$，则：

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_a^b P(x,y(x))\,dx+Q(x,y(x))\cdot y'(x)\cdot dx$$

$$=\int_a^b [P+Q\cdot y'(x)]\,dx$$ （其中 a，b 分别对应 L 起点和终点）

② 若 L 方程为参数方程：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$，则.

（其中 α，β 分别对应 L 起点和终点）

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_\alpha^\beta P(x(t),y(t))\cdot x'(t)\,dt+Q(x(t),y(t))\cdot y'(t)\,dt$$

2. 对坐标的曲线积分（第2类曲线积分）的计算

例. 求 $\int_L xy\,dx$，其中 L 为抛物线 $y=x^2$ 上从点 $A(-1,1)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧

第1步：画出积分路径 L 的图； 第2步：① 若 L 方程为直角坐标方程：$y=y(x)$，则：

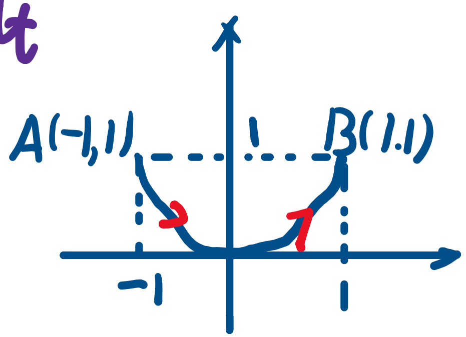
$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b P(x,y(x))\,dx+Q(x,y(x))\cdot y'(x)\cdot dx=\int_a^b[P+Q\cdot y'(x)]\,dx$$

② 若 L 方程为参数方程：$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$，则

（其中 α，β 分别对应 L 起点和终点）

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta P(x(t),y(t))\cdot x'(t)\,dt+Q(x(t),y(t))\cdot y'(t)\,dt$$

解：1° 积分路径 L 草图如右：



2° $\int_L xy\,dx \xlongequal{代入 y=x^2} \int_{-1}^{1} x\cdot x^2\,dx=\int_{-1}^{1}x^3\,dx=0$

2. 对坐标的曲线积分（第2类曲线积分）的计算

例. 求 $\int_L xy\,dx$，其中 L 为抛物线 $y=x^2$ 上从点 A(-1,1) 到 B(1,1) 的一段弧

第1步：画出积分路径 L 的图； 第2步：① 若 L 方程为直角坐标方程：$y=y(x)$，则：

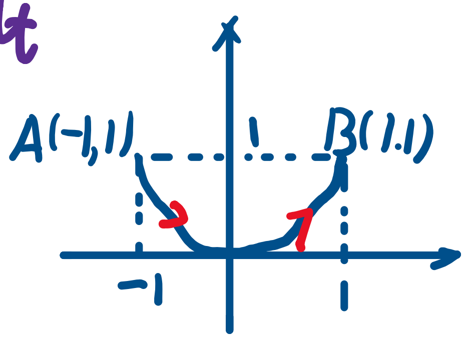
$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b P(x,y(x))\,dx+Q(x,y(x))\cdot y'(x)\cdot dx=\int_a^b[P+Q\cdot y'(x)]\,dx$$

② 若 L 方程为参数方程：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，则

（其中 α,β 分别对应 L 起点和终点）

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta P(x(t),y(t))\cdot x'(t)\,dt+Q(x(t),y(t))\cdot y'(t)\,dt$$

解：1° 积分路径 L 草图如右：



$\Rightarrow$（改题）：$\int_L xy\,dx+xy\,dy \xlongequal{代y=x^2} \int_{-1}^{1} x\cdot x^2dx+x\cdot x^2\,\underbrace{dx^2}_{2xdx}=\int_{-1}^{1}x^3+2x^4\,dx=\frac{4}{5}$

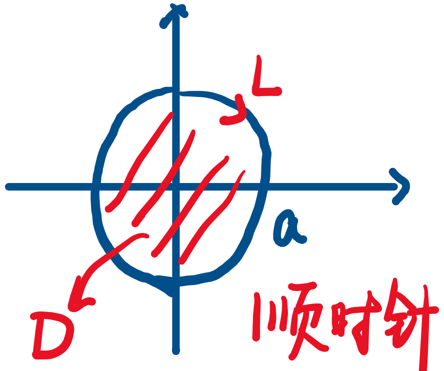
3. 利用格林公式求第二类曲线积分

例. 计算 $\oint_L -x^2y\,dx + y^2x\,dy$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$，方向为顺时针.

[分析]：当积分曲线为封闭曲线时——可用格林公式 一般"逆时针"

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \pm\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$ （L正向时取正号，L负向取负号）

解：1° L草图如右：L封闭，则用格林公式：



顺时针取负号

2° $\oint_L \underbrace{-x^2y}_{P(x,y)}\,dx + \underbrace{y^2x}_{Q(x,y)}\,dy \overset{格林}{=} -\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$

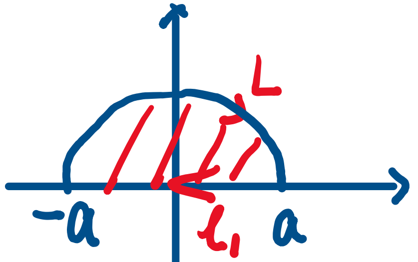
$$= -\iint_D y^2+x^2\,dxdy \xlongequal[\substack{x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ dxdy=r\,drd\theta}]{极坐标} -\iint_D r^2\cdot r\,drd\theta = -\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3\,dr$$

$$= -\frac{\pi}{2}a^4$$

3. 利用格林公式求第二类曲线积分

例.(改题) 计算 $\int_L -x^2y\,dx+y^2x\,dy$，其中 L 是上半圆周 $x^2+y^2=a^2$，方向为顺时针.

解: 1° L草图如右：当 L 不封闭时，可加线 l_1，再用格林



顺时针取负号

2° 原式 $=\int_L -x^2y\,dx+y^2x\,dy=\oint_{L+l_1}-x^2y\,dx+y^2x\,dy-\int_{l_1}-x^2y\,dx+y^2x\,dy$

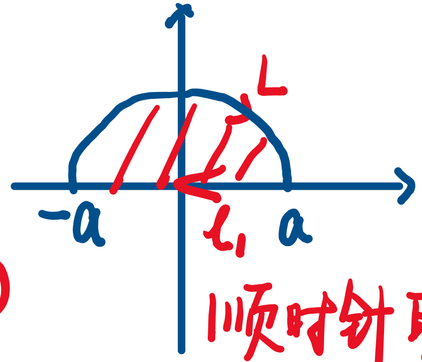
3° 其中, ① $\oint_{L+l_1}\underbrace{-x^2y}_{P}\,dx+\underbrace{y^2x}_{Q}\,dy\overset{格林}{=}-\iint_{D_{半}}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$

$$=-\iint_{D_{半}}y^2+x^2\,dxdy\overset{极坐标}{=}-\iint_{D_{半}}r^2\cdot r\,drd\theta=-\int_0^{\pi}d\theta\int_0^a r^3\,dr=-\frac{\pi}{4}a^4$$

3. 利用格林公式求第二类曲线积分

例.（改题）计算 $\int_L -x^2y\,dx+y^2x\,dy$，其中 L 是上半圆周 $x^2+y^2=a^2$，方向为顺时针.

解：1° L 草图如右：当 L 不封闭时，可加线 l_1，再用格林



顺时针取负号

2° 原式 $=\int_L -x^2y\,dx+y^2x\,dy=\underbrace{\oint_{L+l_1}-x^2y\,dx+y^2x\,dy}_{①}-\underbrace{\int_{l_1}-x^2y\,dx+y^2x\,dy}_{②}$

3° ① $\oint_{L+l_1}\underbrace{-x^2y}_{P}\,dx+\underbrace{y^2x}_{Q}\,dy\overset{格林}{=\!=}-\iint_{D_半}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

$=-\iint_{D_半}y^2+x^2\,dxdy\overset{极坐标}{=\!=\!=}-\iint_{D_半}r^2\cdot r\,drd\theta=-\int_0^{\pi}d\theta\int_0^a r^3\,dr=-\frac{\pi}{4}a^4$

② $\int_{l_1}-x^2y\,dx+y^2x\,dy\ \underset{dy=0,\ y=0}{\overset{x轴上直线}{=\!=\!=\!=}}\int_a^{-a}-x^2\cdot 0\,dx+0^2\cdot x\,\underset{}{\overset{=0}{dy}}=0$

4° 原式 $=①-②=-\frac{\pi}{4}a^4-0=-\frac{\pi}{4}a^4$

第六讲　曲线积分与曲面积分（二）

（3种题型）

4. 对面积的曲面积分（第1类曲面积分）的计算

例. 求 $\iint\limits_{\Sigma} x^2+y^2\,dS$，其中 Σ 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的整个边界曲面.

[分析] 第1类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS$ 的计算方法 —— 投影法（"一投二代三算"）

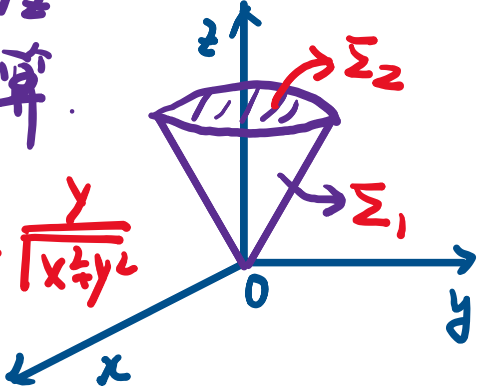
第1°步：把曲面 Σ 投影到恰当的坐标面：

① 当 Σ 方程为：$z=z(x,y)$，把 Σ 投影到 xoy 面，且 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$

② 当 Σ 方程为：$x=x(y,z)$，把 Σ 投影到 yoz 面，且 $dS=\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,dy\,dz$

③ 当 Σ 方程为：$y=y(x,z)$，把 Σ 投影到 xoz 面，且 $dS=\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dx\,dz$

第2°步：把 Σ 的方程代入被积函数；第3°步：化为二重积分计算.



解：1°. Σ 的草图如右，则 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，其中：

Σ_1 方程：$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy$

$z_x'=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$z_y'=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

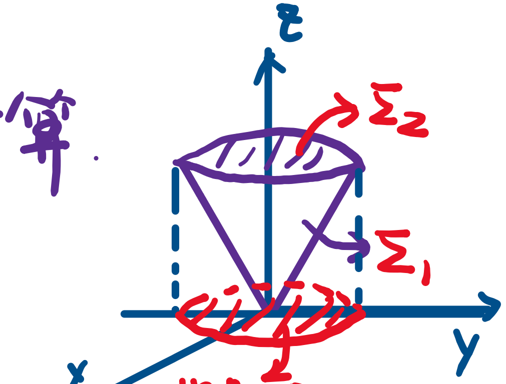
4. 对面积的曲面积分（第1类曲面积分）的计算

例. 求 $\iint\limits_{\Sigma} x^2+y^2\,dS$，其中 Σ 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的整个边界曲面.

[分析] 第1类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS$ 的计算方法 —— 投影法（"一投二代三算"）

第1步：把曲面 Σ 投影到恰当的坐标面；

第2步：把 Σ 的方程代入被积函数；第3步：化为二重积分计算.



解：1°. Σ 的草图如右，则 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$ 其中：

$z_x'=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Σ_1 方程：$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy$

Σ_2 方程：$z=1 \Rightarrow dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=1\cdot dxdy$

2° $\iint\limits_{\Sigma} x^2+y^2\,dS=\iint\limits_{\Sigma_1} x^2+y^2\,dS+\iint\limits_{\Sigma_2} x^2+y^2\,dS=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{2}\,dxdy+\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot 1\,dxdy$

Σ：$\Sigma_1+\Sigma_2$

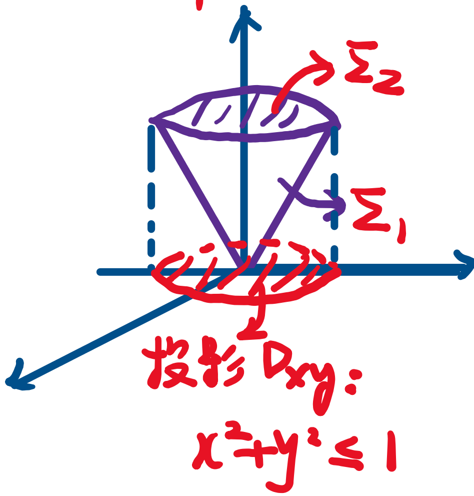
D_{xy}：Σ_1 的投影

D_{xy}：Σ_2 的投影

4. 对面积的曲面积分（第1类曲面积分）的计算

例. 求 $\iint\limits_{\Sigma} x^2+y^2\,dS$，其中 Σ 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的整个边界曲面.

[分析] 第1类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS$ 的计算方法 —— 投影法（"一投 二代 三算"）



解: 1°. Σ 的草图如右，则 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$ 其中:

$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Σ_1 方程: $z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy$

Σ_2 方程: $z=1 \Rightarrow dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=1\cdot dxdy$

2° $\iint\limits_{\Sigma} x^2+y^2\,dS=\iint\limits_{\Sigma_1} x^2+y^2\,dS+\iint\limits_{\Sigma_2} x^2+y^2\,dS=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{2}\,dxdy+\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot 1\,dxdy$

极坐标

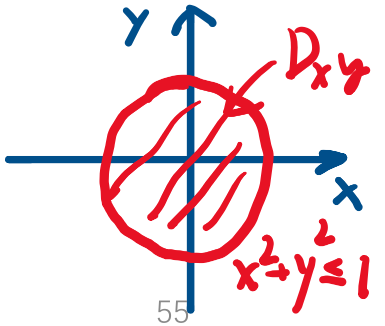
$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

$dxdy=r\,dr\,d\theta$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot\sqrt{2}\,r\,dr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot r\,dr$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\pi$



5. 对坐标的曲面积分(第2类曲面积分)的计算.

例. 求 $\iint\limits_{\Sigma}(x+z)\cdot\cos z\cdot dxdy$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $z=0$ 与 $z=1$ 之间部分的下侧.

[分析]: 第2类曲面积分分为: $\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\,dydz$; $\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\,dzdx$; $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\,dxdy$

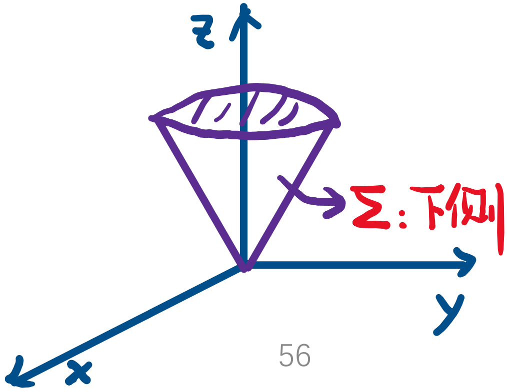
① 对 $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\,dxdy=\pm\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))\,dxdy$ (投影法: Σ上侧时取正，下侧时取负)

D_{xy}: 曲面Σ在 xoy 面的投影

② 对 $\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\,dydz=\pm\iint\limits_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)\,dydz$ (Σ前侧时取正，后侧时取负)

③ 对 $\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\,dzdx=\pm\iint\limits_{D_{xz}}Q(x,y(x,z),z)\,dxdz$ (Σ右侧时取正，左侧时取负)

解: Σ草图如右: 用公式①: Σ: $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 1$, 下侧



$$\iint\limits_{\Sigma:\text{下侧}}(x+z)\cdot\cos z\,dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

5. 对坐标的曲面积分(第2类曲面积分)的计算.

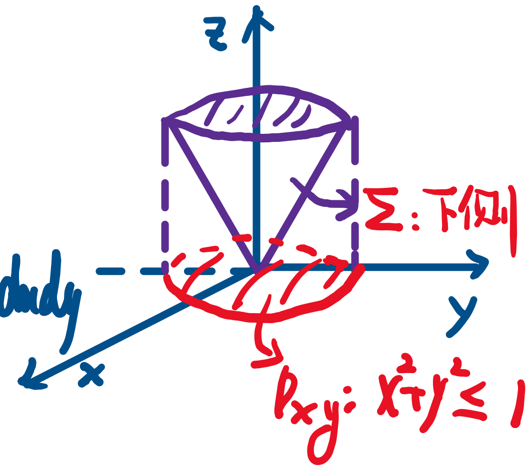
例. 求 $\iint\limits_{\Sigma}(x+z)\cdot\cos z\cdot dxdy$，其中Σ为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $z=0$ 与 $z=1$ 之间部分的下侧.

[分析]: 第2类曲面积分分为: $\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\,dydz$; $\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\,dzdx$; $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\,dxdy$

① 对 $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\,dxdy=\pm\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))\,dxdy$ (投影法: Σ上侧时取正, 下侧时取负)

D_{xy}: 曲面Σ在xoy面的投影

解: Σ草图如右: 用公式①: Σ: $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 1$, 下侧

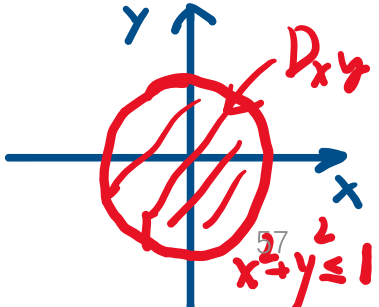


$$\iint\limits_{\Sigma:\text{下侧}}(x+z)\cdot\cos z\,dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}:\text{投影}}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\underbrace{-\iint\limits_{D_{xy}}x\cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy}_{\text{奇}\,0}-\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

极坐标
$x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$
$dxdy=r\,drd\theta$

$$0-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{r^2}\cos r\cdot r\,dr$$

$$=-2\pi\cdot\left[r^2\sin r+2r\cos r-2\sin r\right]_0^1=2\pi\sin 1-4\pi\cos 1$$



6. 利用高斯公式求第2类曲面积分

例. 求 $\oiint\limits_{\Sigma} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 所围区域边界的外侧

[分析]：当积分曲面 Σ 封闭时 —— 多用高斯公式：

$$\oiint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \pm\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

(当 Σ 为外侧时，取正；内侧时取负)

解：Σ 草图如右，为外侧；因 Σ 封闭，用高斯公式：

$$\oiint\limits_{\Sigma:\text{外侧}} \overset{P}{x}\,dydz + \overset{Q}{y}\,dzdx + \overset{R}{z}\,dxdy \overset{\text{高斯}}{=} +\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz$$

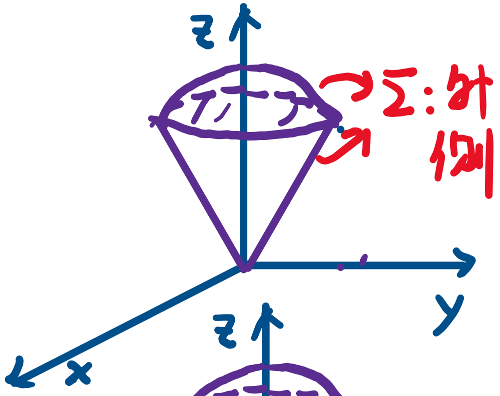
$$= \iiint\limits_{\Omega} 3\,dxdydz \overset{\text{球坐标}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^R 3\cdot r^2\sin\varphi\,dr$$

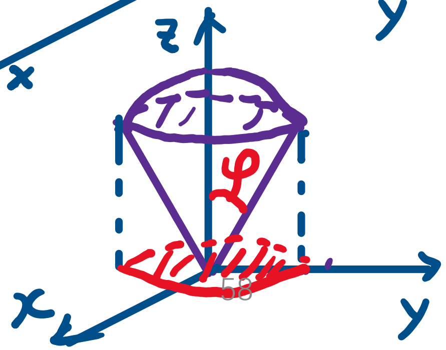
$x=r\sin\varphi\cos\theta$

$y=r\sin\varphi\sin\theta$

$z=r\cos\varphi$

$dxdydz = \boxed{r^2\sin\varphi}\,drd\varphi d\theta$





6. 利用高斯公式求第2类曲面积分

例. 求 $\oiint\limits_{\Sigma} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 所围区域边界的外侧

[分析]：当积分曲面 Σ 封闭时 —— 多用高斯公式：

$$\oiint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \pm\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

(当 Σ 为外侧时，取正；内侧时取负)

解：Σ 草图如右，为外侧，因 Σ 封闭，用高斯公式：

$$\oiint\limits_{\Sigma:\text{外侧}} \overset{P}{x}\,dydz + \overset{Q}{y}\,dzdx + \overset{R}{z}\,dxdy = +\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} 3\,dxdydz \xlongequal{\text{球坐标}} \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{R}3\cdot r^2\sin\varphi\,dr = (2-\sqrt{2})\pi R^3$$

$x=r\sin\varphi\cos\theta$

$y=r\sin\varphi\sin\theta$

$z=r\cos\varphi$

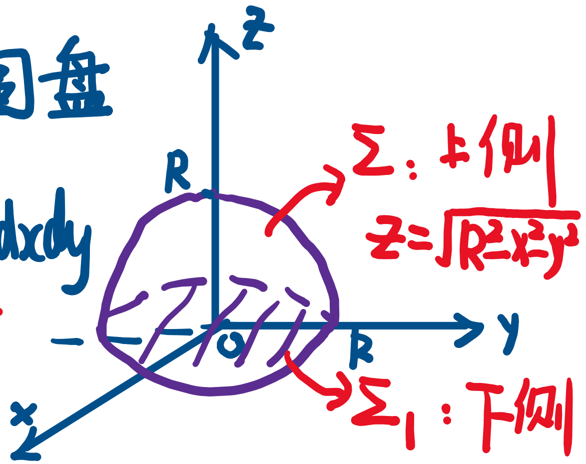
$dxdydz=\boxed{r^2\sin\varphi}\,drd\varphi d\theta$

6. 利用高斯公式求第2类曲面积分

改题：求 $\iint\limits_{\Sigma} x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

[分析]：当积分区域不封闭时 —— 可加面后，再用高斯公式.

解：1° 积分区域 Σ 的草图如右：加面 Σ_1：xoy面上的圆盘



$\Sigma_1: x^2+y^2\le R^2$

2° $\iint\limits_{\Sigma} x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy=\underbrace{\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy}_{①}-\underbrace{\iint\limits_{\Sigma_1} x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy}_{②}$

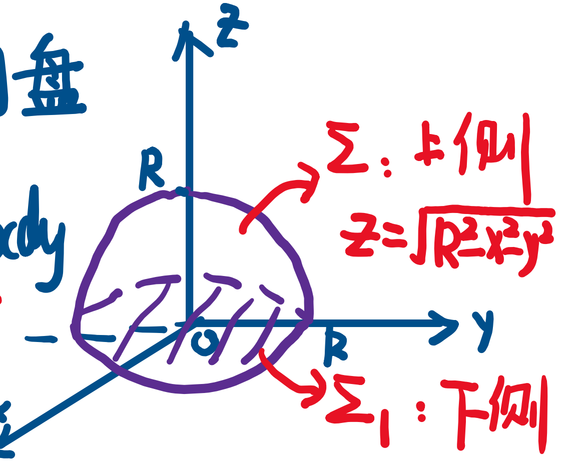
其中：① $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy \xlongequal{\text{高斯}} +\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$

$=\iiint\limits_{\Omega_{\text{半球}}} 3\,dxdydz \xlongequal[\text{意义}]{\text{几何}} 3\cdot V_{\text{半球}}=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=2\pi R^3$

6. 利用高斯公式求第2类曲面积分

改题：求 $\iint\limits_{\Sigma} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$，其中 Σ 为**上**半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧。

解：1° 积分区域 Σ 的草图如右：加面 Σ_1：xoy面上的圆盘



Σ_1：$\begin{cases} x^2+y^2\le R^2 \\ xoy面上 \end{cases}$

2° $$\iint\limits_{\Sigma} x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy = \underbrace{\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy}_{①} - \underbrace{\iint\limits_{\Sigma_1} x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy}_{②}$$

其中：① $$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy \xlongequal{高斯} + \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz$$

$$= \iiint\limits_{\Omega\,半球} 3\,dxdydz \xlongequal[意义]{几何} 3\cdot V_{半球} = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi R^3$$

② $$\iint\limits_{\Sigma_1} x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy \xlongequal[z=0,\ dz=0]{xoy面上圆盘} 0$$

3°. 原式 $=$ ① $-$ ② $= 2\pi R^3$

第七讲　无穷级数

（4种题型）

1. 判别正项级数的敛散性

例. 判别下列正项级数的敛散性：(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$；(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$

[分析]：正项级数的敛散性常用方法：① 比值法；② 根值法

① 对正项级数：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$

② 对正项级数：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$

$\Rightarrow \begin{cases} l<1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 收敛} \\ l>1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 发散} \\ l=1 \Leftrightarrow \text{①②方法失效} \end{cases}$

③ 常见经典结论：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2-3n}=1$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$

解：(1) 对 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$，记 $u_n=\frac{2n+1}{2^n}$

法1°：比值法：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$

而 $l=\frac{1}{2}<1 \Rightarrow$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$ 收敛

框框老师课堂

1. 判别正项级数的敛散性

例. 判别下列正项级数的敛散性：(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$ ；(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$

[分析]：正项级数的敛散性常用方法：① 比值法；② 根值法

① 对正项级数：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$

② 对正项级数：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$

$\Rightarrow$

$l<1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

$l>1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

$l=1 \Leftrightarrow$ ① ② 方法失效

③ 常见经典结论：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$；$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2-3n}=1$；$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$

解：(1) 对 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$，记 $u_n=\frac{2n+1}{2^n}$

法2°：根值法：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n+1}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n+1}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}<1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$ 收敛

1. 判别正项级数的敛散性

例. 判别下列正项级数的敛散性：(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$ ；(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$

[分析]：正项级数的敛散性常用方法：① 比值法；② 根值法

① 对正项级数：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$

② 对正项级数：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$

$\Rightarrow \begin{cases} l<1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 收敛} \\ l>1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 发散} \\ l=1 \Leftrightarrow \text{①②方法失效} \end{cases}$

③ 常见经典结论：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$；$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2-3n}=1$；$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$

解：(2) 对 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$，记 $u_n=\frac{n^3}{n!}$

法1°：比值法：$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3}=0$

而 $l=0<1$ $\Rightarrow$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$ 收敛

1. 判别正项级数的敛散性

例. 判别下列正项级数的敛散性：(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$ ；(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$

[分析]： 正项级数的敛散性常用方法：① 比值法 ； ② 根值法

① 对正项级数：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$

② 对正项级数：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$

$\Rightarrow\begin{cases} l<1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 收敛} \\ l>1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 发散} \\ l=1 \Leftrightarrow \text{①②方法失效} \end{cases}$

③ 常见经典结论：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ ；$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ ；$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2-3n}=1$ ；$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$

解：(2) 对 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$，记 $u_n=\frac{n^3}{n!}$

法2°：根值法：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{1}{\infty}=0$

而 $l=0<1$ $\Rightarrow$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$ 收敛

2. 交错级数收敛性的判别法.

例. 判别下列交错级数的敛散性：(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sin\frac{1}{n}$ ；(2) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n-\ln n}$

[分析]：交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 的审敛法 —— 莱布尼兹判别法：

若 ① $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ 且 ② 数列 $\{u_n\}$ 递减 $\Rightarrow$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛

解：(1) 对 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$，记 $u_n=\sin\frac{1}{n}$，则：

① $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}=\sin 0=0$

② 数列 $\{u_n\}=\{\sin\frac{1}{n}\}$ 的单调性：令 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，$x\geqslant 1$

$\Rightarrow f'(x)=\underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{>0}\cdot\underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{<0}<0 \Rightarrow f(x)\downarrow \Rightarrow \{u_n\}\downarrow$

由莱布尼兹法知：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sin\frac{1}{n}$ 收敛

2. 交错级数收敛性的判别法.

例. 判别下列交错级数的敛散性：(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sin\frac{1}{n}$ ；(2) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n-\ln n}$

[分析]：交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 的审敛法——莱布尼茨判别法：

若① $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ 且 ② 数列 $\{u_n\}$ 递减 $\Rightarrow$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛

解：(2) 对 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n-\ln n}$，记 $u_n=\frac{1}{n-\ln n}$，则：

① $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=0$ ；

② 数列 $\{u_n\}=\{\frac{1}{n-\ln n}\}$ 的单调性，令 $f(x)=\frac{1}{x-\ln x}$，$x\geq 2$

$\Rightarrow f'(x)=\underbrace{-\frac{1}{(x-\ln x)^2}}_{<0}\cdot\underbrace{(1-\frac{1}{x})}_{>0}<0 \Rightarrow f(x)\downarrow \Rightarrow \{u_n\}\downarrow$

由莱布尼茨法知：$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n-\ln n}$ 收敛

3. 求幂级数的和函数

例. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ 的和函数 $S(x)$.

[分析]：(1).求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 的步骤：

第1°步：先求 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域：① $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$；② 看 $x=\pm R$ 处 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 敛散性.

第2°步：再设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，同时求导（或积分）把 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 化为常见幂级数.

第3°步：最后求积分（或求导）得和函数 $S(x)$.

(2). 常见幂级数：① $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$（等比级数 $=\frac{\text{首项}}{1-\text{公比}}$）；② $\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$

③ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=\frac{1}{1+x}$ ； ④ $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$

解：1° 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$，$a_n=(n+1)$ $\Rightarrow$ $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right|=1$，收敛半径 $R=1$

且 $x=\pm1$ 处，$\sum(n+1)x^n$ 发散 $\Rightarrow$ 收敛域：$(-1,1)$

3. 求幂级数的和函数

例. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ 的和函数 $S(x)$.

第2°步：再设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，同时求导（或积分）把 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 化为常见幂级数.

第3°步：最后求积分（或求导）得和函数 $S(x)$.

(2). 常见幂级数：① $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$（等比级数 $=\frac{\text{首项}}{1-\text{公比}}$）；② $\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$

③ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=\frac{1}{1+x}$ ； ④ $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$

解：1°对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$，$a_n=(n+1)\Rightarrow R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right|=1$，收敛半径 $R=1$

且 $x=\pm1$ 处，$\sum(n+1)x^n$ 发散 $\Rightarrow$ 收敛域：$(-1,1)$

2° 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$，两边积分：

$$\Rightarrow\int_0^x S(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\int_0^x x^n dx=\sum_{n=1}^{\infty}\cancel{(n+1)}\frac{x^{n+1}}{\cancel{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x}$$

$x^2+x^3+\dots+x^n+\dots$

3. 求幂级数的和函数

例. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ 的和函数 $S(x)$.

(2). 常见幂级数: ① $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$ (等比级数 $=\frac{\text{首项}}{1-\text{公比}}$); ② $\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$

③ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}$; ④ $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$

解: 1° 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$, $a_n=(n+1)$ $\Rightarrow R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right|=1$, 收敛半径 $R=1$

且 $x=\pm1$ 处, $\sum(n+1)x^n$ 发散 ⇒ 收敛域: $(-1,1)$

2° 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$, 两边积分:

$x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$

$$\Rightarrow\int_0^x S(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\int_0^x x^n\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\cancel{(n+1)}\frac{x^{n+1}}{\cancel{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x}$$

3°. 对 $\int_0^x S(x)dx=\frac{x^2}{1-x}$ 两边求导: $S(x)=\frac{2x(1-x)-x^2\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$, $x\in(-1,1)$

4. 求函数的幂级数展开式.

例. 把函数 $f(x)=\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 展开成 x 的幂级数.

[分析]:(1). 把函数 $f(x)$ 展开成级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的步骤:

第1°步:求 $f'(x)$ 或 $\int_0^x f(x)dx$ 把 $f(x)$ 化为常见函数,如 $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{1+x}$, ……;

第2°步:再积分或求导得 $f(x)$ 的幂级数.

(2). 常见幂级数:① $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$ (等比级数 $=\frac{首项}{1-公比}$);② $\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$

③ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=\frac{1}{1+x}$; ④ $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$

解:1° 由 $f(x)=\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\xrightarrow{求导}f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{1+x^2}\overset{③}{=}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}$

4. 求函数的幂级数展开式.

例. 把函数 $f(x)=\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 展开成x的幂级数.

第2°步: 再积分或求导得 f(x) 的幂级数.

(2). 常见幂级数: ① $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$ (等比级数 $=\frac{首项}{1-公比}$); ② $\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$

③ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}$; ④ $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$

解: 1° 由 $f(x)=\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\xRightarrow{求导}f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{1+x^2}\overset{③}{=}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}$

2° 对 $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}$ 两边积分:

$f(0)=\arctan\frac{1+0}{1-0}=\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^x f'(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\int_0^x x^{2n}dx\Rightarrow f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

$f(x)\big|_0^x=f(x)-f(0)$

$\Rightarrow f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ 为所求幂级数

第八讲 微分方程（三种题型）

1. 一阶微分方程的求解（可分离变量方程；齐次方程；一阶线性方程）

例. 求下列方程通解：(1) $y\,dx+(x^2-4x)\,dy=0$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}$

[分析]：(1) 可分离变量方程：$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y) \xRightarrow{\text{分离}x\text{与}y} \frac{dy}{g(y)}=f(x)\,dx$ 两边积分

(2) 齐次方程：$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right) \xRightarrow{\text{换元}}$ 令 $\frac{y}{x}=u \Rightarrow y=xu$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ 代入求解

解：(1) 由 $y\,dx+x(x-4)\,dy=0$ 变形：$\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x(x-4)}$

$\xRightarrow{\text{分离}x\text{与}y} -\frac{1}{y}dy=\frac{1}{x(x-4)}dx \xRightarrow{\text{两边积分}} -\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{1}{x(x-4)}dx$

裂项 $\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-4}-\frac{1}{x}\,dx$

$\Rightarrow -\ln y=\frac{1}{4}[\ln(x-4)-\ln x]+C$. $C \to \frac{1}{4}\ln C$ $\Rightarrow -4\ln y=\ln\left[C\cdot\frac{x-4}{x}\right]$

$\Rightarrow y^{-4}=C\cdot\frac{x-4}{x} \Rightarrow (x-4)y^4=\frac{1}{C}\cdot x \triangleq C\cdot x$ 为通解.

1. 一阶微分方程的求解（可分离变量方程；齐次方程；一阶线性方程）

例. 求下列方程通解：(1) $y\,dx+(x^2-4x)dy=0$　(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}$

[分析]：(1) 可分离变量方程：$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y) \xrightarrow{\text{分离}x\text{与}y} \frac{dy}{g(y)}=f(x)\,dx$ 两边积分

(2) 齐次方程：$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x}) \xrightarrow{\text{换元}}$ 令 $\frac{y}{x}=u \Rightarrow y=xu$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ 代入求解

解：(2) 方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}$ 变形 $\xrightarrow[\text{同除以}x^2]{\text{分子分母}} \frac{dy}{dx}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{y/x}$

令 $\frac{y}{x}=u \Rightarrow y=x\cdot u \Rightarrow \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ 代入原方程：

$\Rightarrow u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{u}=\frac{1}{u}+u \Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}$

$\xrightarrow{\text{分离}u\text{与}x} u\,du=\frac{1}{x}dx \xrightarrow{\text{积分}} \frac{1}{2}u^2=\ln x+C \xrightarrow[\text{回代}]{u=\frac{y}{x}} \frac{y^2}{2x^2}=\ln x+C$

例. 求 $xy'+y=x^2+3x+2$ 的通解.

[分析]：一阶线性方程：$y'+p(x)y=q(x)$ 的解法（公式法）

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}\cdot\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$$

解释：方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 两边同乘以因子：$e^{\int p(x)dx}$ 得：

$$\Rightarrow \underbrace{e^{\int p(x)dx}}_{u}\cdot\underbrace{y'}_{v'}+\underbrace{e^{\int p(x)dx}\cdot p(x)}_{u'}\cdot\underbrace{y}_{v}=e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)$$

$$\Rightarrow \left[e^{\int p(x)dx}\cdot y\right]'=q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\overset{\text{积分}}{\Longrightarrow} e^{\int p(x)dx}\cdot y=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$$

$$\therefore\ y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$$

例. 求 $xy' + y = x^2+3x+2$ 的通解.

[分析]：一阶线性方程：$y' + p(x)y = q(x)$ 的解法（公式法）

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C\right]$$

解：原方程化为标准一阶线性方程：$y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{x+3+\frac{2}{x}}_{q(x)}$

由公式法：通解 $y(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx} \left[\int (x+3+\frac{2}{x}) e^{\int \frac{1}{x}dx} dx + C\right]$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-\ln x} \left[\int (x+3+\frac{2}{x}) \cdot e^{\ln x} dx + C\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[\int x^2+3x+2\, dx + C\right] = \frac{x^2}{3} + \frac{3x}{2} + 2 + \frac{C}{x}$$

2. 二阶常系数齐次线性方程

例. 求下列方程通解：(1) $y''-3y'+2y=0$. (2) $4y''-4y'+y=0$. (3) $y''+2y'+10y=0$

【分析】：二阶常系数齐次线性方程：$y''+py'+qy=0$ —— 特征方程法

第1°步：写出特征方程 $r^2+pr+q=0$；第2°步：当 $\Delta>0$ 时，$r_1\neq r_2$，$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

当 $\Delta=0$，$r_1=r_2$，$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$；当 $\Delta<0$ 时，$r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

解：(1) $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程：$r^2-3r+2=0 \Rightarrow r_1=1, r_2=2$. 则

通解：$y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$

(2) $4y''-4y'+y=0$ 的特征方程：$4r^2-4r+1=0 \overset{\Delta=0}{\Rightarrow} (2r-1)^2=0 \Rightarrow r_1=r_2=\frac{1}{2}$

通解 $y=(C_1+C_2x)e^{\frac{1}{2}x}$

2. 二阶常系数齐次线性方程

例. 求下列方程通解：(1) $y''-3y'+2y=0$.(2) $4y''-4y'+y=0$.(3) $y''+2y'+10y=0$

[分析]：二阶常系数齐次线性方程：$y''+py'+qy=0$ —— 特征方程法

第1步：写出特征方程 $r^2+pr+q=0$；第2步：当 $\Delta>0$ 时，$r_1\neq r_2$，$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

当 $\Delta=0$，$r_1=r_2$，$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$. 第3步：当 $\Delta<0$ 时，$r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，$y=e^{\alpha x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

解：(1) $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程：$r^2-3r+2=0\Rightarrow r_1=1,r_2=2$. 则

通解：$y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$

(3) $y''+2y'+10y=0$ 的特征方程：$r^2+2r+10=0 \xRightarrow{\Delta<0} (r+1)^2=-9=(\pm3i)^2$

$\therefore r=-1\pm3i \Rightarrow$ 通解：$y=e^{-x}[C_1\cos3x+C_2\sin3x]$

3. 二阶常系数非齐次线性微分方程

例. 求下列方程通解：(1) $y''+y'-6y=e^{x}\cdot(3x+2)$

(2) $y''+2y'+2y=e^{-x}\cdot\sin x$

[分析]：二阶常系数非齐次线性方程：$y''+py'+qy=f(x) \Rightarrow$ 通解 $y=\bar{y}+y^{*}$

齐通　非齐特

① 当右端函数 $f(x)=e^{\lambda x}\cdot P_n(x) \xrightarrow{\text{指数·多项式}} y^{*}=\begin{cases} x^{0}\cdot e^{\lambda x}\cdot Q_n(x)，当\lambda不是特征根 \\ x^{1}\cdot e^{\lambda x}\cdot Q_n(x)，当\lambda是单根 \\ x^{2}\cdot e^{\lambda x}\cdot Q_n(x)，当\lambda是重根 \end{cases}$

② 当右端函数 $f(x)=e^{\lambda x}\cdot\sin\beta x$ 或 $e^{\lambda x}\cdot\cos\beta x$

$\xrightarrow{\text{指数·三角}} y^{*}=\begin{cases} x^{0}e^{\lambda x}[A\cos\beta x+B\sin\beta x]，当\lambda\pm\beta i不是特征根 \\ x^{1}e^{\lambda x}[A\cos\beta x+B\sin\beta x]，当\lambda\pm\beta i是特征根 \end{cases}$

3. 二阶常系数非齐次线性微分方程

例. 求下列方程通解：(1) $y''+y'-6y=e^{x}\cdot(3x+2)$

(2) $y''+2y'+2y=e^{-x}\cdot\sin x$

[分析]：二阶常系数非齐次线性方程：$y''+py'+qy=f(x) \Rightarrow$ 通解 $y=\underset{\text{齐通}}{\tilde{y}}+\underset{\text{非齐特}}{y^*}$

① 当右端函数 $f(x)=e^{\lambda x}\cdot P_n(x) \xrightarrow{\text{指数·多项式}} y^*=\begin{cases} x^0\cdot e^{\lambda x}\cdot Q_n(x), & \text{当}\lambda\text{不是特征根} \\ x^1\cdot e^{\lambda x}\cdot Q_n(x), & \text{当}\lambda\text{是单根} \\ x^2\cdot e^{\lambda x}\cdot Q_n(x), & \text{当}\lambda\text{是重根} \end{cases}$

② 当右端函数 $f(x)=e^{\lambda x}\cdot\sin\beta x$ 或 $e^{\lambda x}\cdot\cos\beta x \xrightarrow{\text{指数·三角}} y^*=\begin{cases} x^0 e^{\lambda x}[A\cos\beta x+B\sin\beta x] \\ x^1 e^{\lambda x}[A\cos\beta x+B\sin\beta x] \end{cases}$

解：(1) 1°. 先求齐通：$r^2+r-6=0 \Rightarrow r_1=-3,\ r_2=2 \Rightarrow$ 齐通：$\tilde{y}=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$

2°. 再求非齐特：由 $f(x)=e^{x}\cdot(3x+2) \Rightarrow \lambda=1$ 不是特征根，则 $y^*=x^0e^{x}\cdot[Ax+B]$

3. 二阶常系数非齐次线性微分方程

例. 求下列方程通解: (1) $y''+y'-6y=e^{x}\cdot(3x+2)$

(2) $y''+2y'+2y=e^{-x}\cdot\sin x$

[分析]: 二阶常系数非齐次线性方程: $y''+py'+qy=f(x) \Rightarrow$ 通解 $y=\underbrace{\tilde{y}}_{\text{齐通}}+\underbrace{y^*}_{\text{非齐特}}$

② 当右端函数 $f(x)=e^{\lambda x}\cdot\sin\beta x$ 或 $e^{\lambda x}\cdot\cos\beta x \xRightarrow{\text{拾}\lambda\cdot\text{角}} y^*=\begin{cases} x^{0}e^{\lambda x}[A\cos\beta x+B\sin\beta x] \\ x^{1}e^{\lambda x}[A\cos\beta x+B\sin\beta x] \end{cases}$

解: (1) 1°. 先求齐通. $r^2+r-6=0 \Rightarrow r_1=-3,\ r_2=2 \Rightarrow$ 齐通: $\tilde{y}=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$

2°. 再求非齐特: 由 $f(x)=e^{x}\cdot(3x+2) \Longrightarrow \lambda=1$ 不是特征根, 则 $y^*=x^{0}e^{x}\cdot[Ax+B]$

把 $y^*=e^{x}(Ax+B)$ 代入原方程: $(y^*)'=e^{x}(Ax+A+B)$, $(y^*)''=e^{x}(Ax+2A+B)$

$\Rightarrow (y^*)''+(y^*)'-6y^*=-4Axe^{x}+(3A-4B)e^{x}=e^{x}(3x+2) \Rightarrow \begin{cases}-4A=3\\ 3A-4B=2\end{cases}$

3. 二阶常系数非齐次线性微分方程

例. 求下列方程通解：(1) $y''+y'-6y=e^{x}\cdot(3x+2)$

(2) $y''+2y'+2y=e^{-x}\cdot\sin x$

[分析]：二阶常系数非齐次线性方程：$y''+py'+qy=f(x)\Rightarrow$ 通解 $y=\tilde{y}+y^*$

齐通　非齐特

解：(1) 1°. 先求齐通：$r^2+r-6=0\Rightarrow r_1=-3,\ r_2=2\Rightarrow$ 齐通：$\tilde{y}=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$

2°. 再求非齐特：由 $f(x)=e^{x}\cdot(3x+2)\Longrightarrow\lambda=1$ 不是特征根，则 $y^*=x^0e^{x}\cdot[Ax+B]$

把 $y^*=e^{x}(Ax+B)$ 代入原方程：$(y^*)'=e^{x}(Ax+A+B)$，$(y^*)''=e^{x}(Ax+2A+B)$

$\Rightarrow(y^*)''+(y^*)'-6y^*=-4Axe^{x}+(3A-4B)e^{x}=e^{x}(3x+2)\Rightarrow\begin{cases}-4A=3\\3A-4B=2\end{cases}$

$\therefore A=-\frac{3}{4}$，$B=-\frac{17}{16}\Rightarrow y^*=e^{x}(-\frac{3}{4}x-\frac{17}{16})$　故非齐通 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}+y^*$

3. 二阶常系数非齐次线性微分方程

例. 求下列方程通解：(1) $y''+y'-6y=e^{x}\cdot(3x+2)$

(2) $y''+2y'+2y=e^{-x}\cdot\sin x$

[分析]：二阶常系数非齐次线性方程：$y''+py'+qy=f(x)\Rightarrow$ 通解 $y=\underset{\text{齐通}}{\hat{y}}+\underset{\text{非齐特}}{y^*}$

② 当右端函数 $f(x)=e^{\lambda x}\cdot\sin\beta x$ 或 $e^{\lambda x}\cdot\cos\beta x$

$$\xRightarrow{\text{撒网}} y^*=\begin{cases} x^0 e^{\lambda x}[A\cos\beta x+B\sin\beta x], & \text{当 } \lambda\pm\beta i \text{ 不是特征根} \\ x^1 e^{\lambda x}[A\cos\beta x+B\sin\beta x], & \text{当 } \lambda\pm\beta i \text{ 是特征根} \end{cases}$$

解：(2) 1° 先齐通 $r^2+2r+2=0\xRightarrow{\Delta<0}(r+1)^2=-1=(\pm i)^2\Rightarrow r_{1,2}=-1\pm i\Rightarrow\hat{y}=e^{-x}[C_1\cos x+C_2\sin x]$

2° 非齐特：由 $f(x)=e^{-x}\cdot\sin x\Rightarrow\lambda\pm\beta i=-1\pm i$ 是特征根 $\Rightarrow y^*=x^1e^{-x}[A\cos x+B\sin x]$

$\Rightarrow y^*=e^{-x}[Ax\cos x+Bx\sin x]$ 把 $(y^*)'$，$(y^*)''$，y^* 代入原方程得 $A=-\frac{1}{2}$，$B=0$

3. 二阶常系数非齐次线性微分方程

例. 求下列方程通解：(1) $y''+y'-6y=e^{x}\cdot(3x+2)$

(2) $y''+2y'+2y=e^{-x}\cdot\sin x$

[分析]：二阶常系数非齐次线性方程：$y''+py'+qy=f(x)\Rightarrow$ 通解 $y=\underbrace{\hat{y}}_{\text{齐通}}+\underbrace{y^*}_{\text{非齐特}}$

解：(2) 1° 先齐通 $r^2+2r+2=0\xrightarrow{\Delta<0}(r+1)^2=-1=(\pm i)^2\Rightarrow r_{1,2}=-1\pm i\Rightarrow\hat{y}=e^{-x}[C_1\cos x+C_2\sin x]$

2°. 非齐特：由 $f(x)=e^{-x}\cdot\sin x\Rightarrow\lambda\pm\beta i=-1\pm i$ 是特征根 $\Rightarrow y^*=x^1e^{-x}[A\cos x+B\sin x]$

$\Rightarrow y^*=e^{-x}[Ax\cos x+Bx\sin x]$ 把 $(y^*)',(y^*)'',y^*$ 代入原方程得 $A=-\frac{1}{2},B=0$

$\therefore y^*=-\frac{1}{2}x\cos x\cdot e^{-x}\Rightarrow$ 非齐通：$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+y^*$

A，B 详细过程如下：

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cdot \sin x$$

而 $y^* = e^{-x}[Ax\cos x + Bx\sin x] \Rightarrow y^{*\prime} = e^{-x}\cdot\{[(-A+B)x+A]\cos x + [(-A-B)x+B]\sin x\}$

$\Rightarrow y^{*\prime\prime} = e^{-x}\cdot\{[-2Bx-2A+2B]\cos x + (2Ax-2A-2B)\sin x\}$

$\Rightarrow y^{*\prime\prime} + 2y^{*\prime} + 2y^* = e^{-x}\cdot\{2B\cos x - 2A\sin x\}$

$\therefore \begin{cases} 2B = 0 \\ -2A = 1 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{2},\ B = 0$

微分算子法求特解.

第九讲　向量代数与解析几何
（三种题型）

1. 向量的运算

例. 若向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足：$|\vec{a}|=6$，$|\vec{b}|=3$，$(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=\frac{\pi}{6}$，$\vec{c}\perp\vec{a}$，$\vec{c}\perp\vec{b}$，$|\vec{c}|=3$，求：

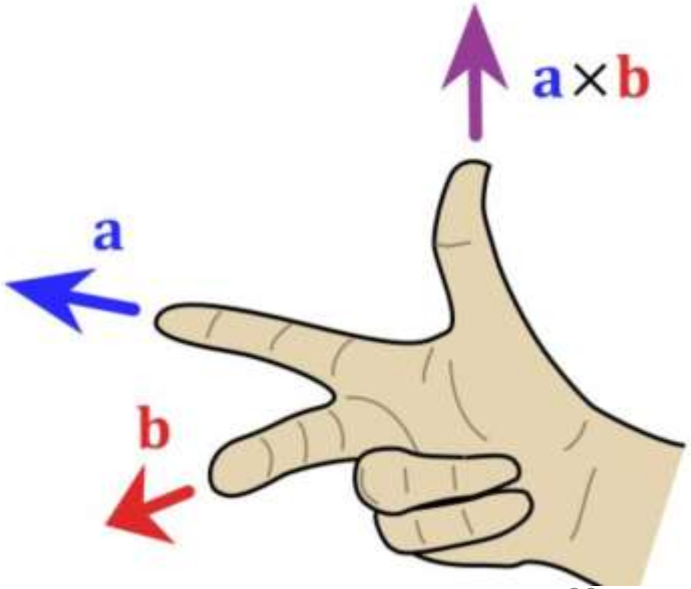
(1) $|\vec{a}\times\vec{b}|$　　(2) $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ 混合积

[分析]：① 数量积：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$ 表示一个数，没有方向；$\vec{a}$ 的模：$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

② 向量积：$\vec{a}\times\vec{b}$ 表示一个向量，其方向既垂直于 $\vec{a}$，也垂直于 $\vec{b}$；其大小为：$|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\sin\theta$

③ 小结论：设 $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则：1° (

2°. $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\vec{j}+$



4°. $\vec{a}\perp\vec{b}\xLeftrightarrow{\theta=\frac{\pi}{2}}\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0$　　6°.

5°. $\vec{a}\parallel\vec{b}\xLeftrightarrow{\theta=0}\vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$.

1. 向量的运算

例. 若向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足：$|\vec{a}|=6$，$|\vec{b}|=3$，$(\vec{a}\hat{,}\vec{b})=\frac{\pi}{6}$，$\vec{c}\perp\vec{a}$，$\vec{c}\perp\vec{b}$，$|\vec{c}|=3$，求：

(1) $|\vec{a}\times\vec{b}|$　　(2) $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ 混和积

③ 小结论：设 $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则：1° $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$；

2°. $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}$　　3°. $\vec{a}\times\vec{a}=0$.

4°. $\vec{a}\perp\vec{b}\overset{\theta=\frac{\pi}{2}}{\Longleftrightarrow}\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0$　　6°. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

5°. $\vec{a}\parallel\vec{b}\overset{\theta=0}{\Longleftrightarrow}\vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$.

解：(1) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta=6\times3\times\sin\frac{\pi}{6}=9$

1. 向量的运算

例. 若向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足：$|\vec{a}|=6$，$|\vec{b}|=3$，$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{6}$，$\vec{c}\perp\vec{a}$，$\vec{c}\perp\vec{b}$，$|\vec{c}|=3$，求：

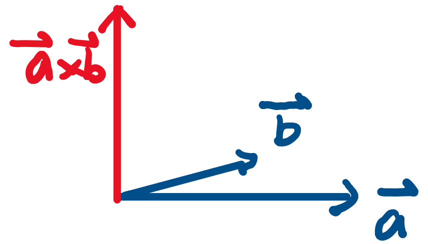
(1) $|\vec{a}\times\vec{b}|$ (2) $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$：混和积

③ 小结论：设 $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则：1° $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$；

2° $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\vec{k}$ 3° $\vec{a}\times\vec{a}=0$.

4° $\vec{a}\perp\vec{b}\overset{\theta=\frac{\pi}{2}}{\Longleftrightarrow}\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0$ 6° $\vec{a}\times\vec{b}=-b\times a$

5° $\vec{a}\parallel\vec{b}\overset{\theta=0}{\Longleftrightarrow}\vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$.



解：(2) 混和积：$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\overset{9}{\cancel{|\vec{a}\times\vec{b}|}}\cdot\overset{3}{\cancel{|\vec{c}|}}\cdot\overset{\pm1}{\cancel{\cos\theta}}$

由 $\vec{c}\perp\vec{a}$，$\vec{c}\perp\vec{b}$ $\Rightarrow\vec{c}\parallel(\vec{a}\times\vec{b})\Rightarrow\theta=0$ 或 $\pi\Rightarrow\cos\theta=\pm1\Rightarrow[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\pm27$

例. 设 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, 且 $\vec{a}\perp\vec{b}$, 求 $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|$

③ 小结论：设 $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, 则：1° $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$;

2° $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}$ 3° $\vec{a}\times\vec{a}=0$.

4° $\vec{a}\perp\vec{b}\overset{\theta=\frac{\pi}{2}}{\Longleftrightarrow}\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0$ 6° $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

5° $\vec{a}\parallel\vec{b}\overset{\theta=0}{\Longleftrightarrow}\vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$.

解：先求：$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\underbrace{\cancel{\vec{a}\times\vec{a}}}_{0}-\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}-\underbrace{\cancel{\vec{b}\times\vec{b}}}_{0}=-2(\vec{a}\times\vec{b})$

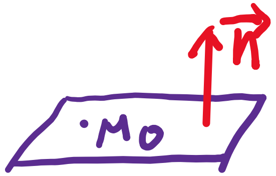
再得：原式 $=|-2(\vec{a}\times\vec{b})|=2|\vec{a}\times\vec{b}|=2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\underbrace{\sin\theta}_{1}$ (因 $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$)

$=2\times3\times4=24$

2. 平面方程的求解.

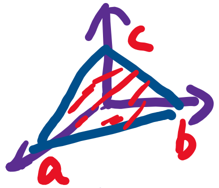
例. 设一平面经过原点和点 $A(6,-3,2)$，且与平面 $\pi_1: 4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面方程.

[分析]: 1° 点法式方程:



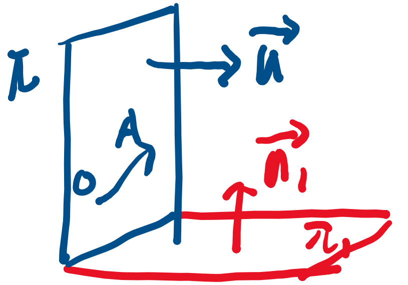
$M_0(x_0,y_0,z_0)$，$\vec{n}=\{A,B,C\} \Rightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

2°. 一般式方程: $Ax+By+Cz+D=0$ 其法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$



3°. 截距式方程: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. 其: a.b.c 表示平面在 x, y, z 轴上截距.

解:



$4x-y+2z=8$

$\vec{n_1}=\{4,-1,2\}$

设平面为 π，过 $O(0,0,0)$，$A(6,-3,2) \Rightarrow \vec{OA}=\{6,-3,2\}$

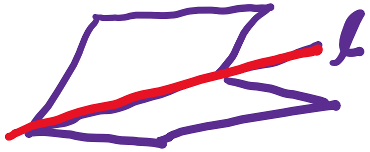
平面 π 的法向量 $\vec{n}$，由题意: $\vec{n}\perp\vec{OA}$ 且 $\vec{n}\perp\vec{n_1}$

$$\Rightarrow \vec{n}=\vec{OA}\times\vec{n_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & -3 & 2\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=-4\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}=\{-4,-4,6\}$$

过 $O(0,0,0)$ $\xRightarrow{\text{点法式}}$ π: $-4(x-0)-4(y-0)+6(z-0)=0 \Rightarrow 2x+2y-3z=0$

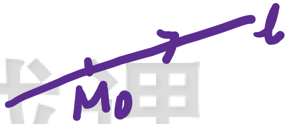
3. 空间直线的求解

例. 设直线 l 与直线 l_1: $\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z}{1}$ 和 l_2: $\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{1}$ 都相交，且与直线 l_3: $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{1}$ 平行，求 l 的方程.



[分析]: 1° 一般式方程: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$　方向向量 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$

2° 对称式方程: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，过点 M_0



方向 $\vec{s}=\{m,n,p\}$

3° 参数式方程: $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$，$t\in R$. $M_0(x_0,y_0,z_0)$. 方向 $\vec{s}=\{m,n,p\}$

4° 两点式方程: $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$

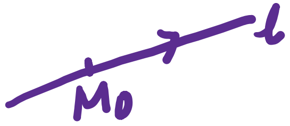
$\Rightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

解 ① 由 $l\parallel l_3$，而 $\vec{s_3}=\{3,2,1\}$ $\Rightarrow$ l 的方向向量 $\vec{s}=\{3,2,1\}$

② 再找 l 上一个点即可. 这个点 M 最好找 l 与 l_1 或 l 与 l_2 的交点:

3. 空间直线的求解

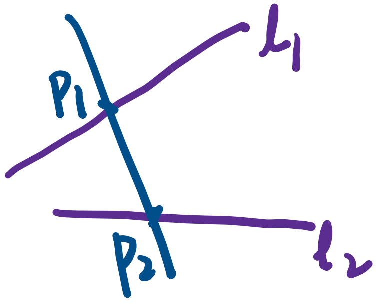
例. 设直线 l 与直线 $l_1: \frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z}{1}$ 和 $l_2: \frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{1}$ 都相交，且与直线 $l_3: \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{1}$ 平行，求 l 的方程

2°. 对称式方程: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，过点 M_0  方向 $\vec{s}=\{m,n,p\}$

3°. 参数式方程: $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$，$t\in R$. $M_0(x_0,y_0,z_0)$. 方向 $\vec{s}=\{m,n,p\}$

解 ① 由 $l \parallel l_3$，而 $\vec{s_3}=\{3,2,1\}$ $\Rightarrow$ l 的方向向量 $\vec{s}=\{3,2,1\}$

② 再找 l 上一个点即可. 这个点M最好找 l 与 l_1 或 l 与 l_2 的交点:

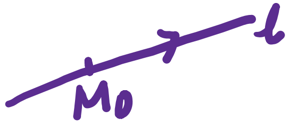


参数方程: $l_1: \begin{cases} x=-3+2t \\ y=5+t \\ z=0+t \end{cases}$，$l_2: \begin{cases} x=3+t \\ y=-1+4t \\ z=0+t \end{cases}$ 设交点 $P_1(-3+2t_1, 5+t_1, t_1)$

$P_2(3+t_2, -1+4t_2, t_2)$

3. 空间直线的求解

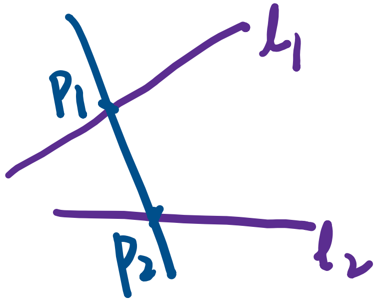
例. 设直线 l 与直线 $l_1: \frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z}{1}$ 和 $l_2: \frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{1}$ 都相交，且与直线 $l_3: \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{1}$ 平行，求 l 的方程

2°. 对称式方程: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，过点 M_0 

方向 $\vec{s}=\{m,n,p\}$

解: ① 由 $l \parallel l_3$，而 $\vec{s_3}=\{3,2,1\}$ $\Rightarrow$ l 的方向向量 $\vec{s}=\{3,2,1\}$

② 再找 l 上一个点即可. 这个点 M 最好找 l 与 l_1 或 l 与 l_2 的交点:



参数方程: $l_1: \begin{cases} x=-3+2t \\ y=5+t \\ z=0+t \end{cases}$, $l_2: \begin{cases} x=3+t \\ y=-1+4t \\ z=0+t \end{cases}$ 设交点 $P_1(-3+2t_1, 5+t_1, t_1)$

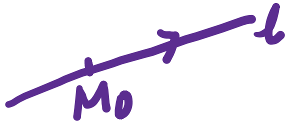
$P_2(3+t_2, -1+4t_2, t_2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \parallel \vec{s} \Rightarrow \frac{(3+t_2)-(-3+2t_1)}{3}=\frac{(-1+4t_2)-(5+t_1)}{2}=\frac{t_2-t_1}{1}$

3. 空间直线的求解

例. 设直线 l 与直线 $l_1: \frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z}{1}$ 和 $l_2: \frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{1}$ 都相交，且与直线 $l_3: \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{1}$ 平行，求 l 的方程

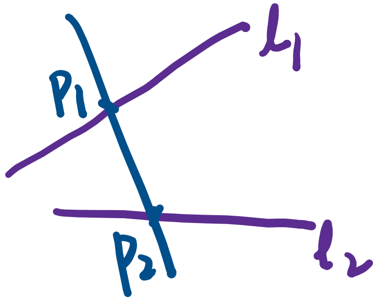
2°. 对称式方程: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，过点 M_0



方向 $\vec{s}=\{m,n,p\}$

解: ① 由 $l \parallel l_3$，而 $\vec{s_3}=\{3,2,1\}$ ⇒ l 的方向向量 $\vec{s}=\{3,2,1\}$

② 再找 l 上一个点即可. 这个点M最好找 l 与 l_1 或 l 与 l_2 的交点：



$$\frac{(3+t_2)-(-3+2t_1)}{3}=\frac{(-1+4t_2)-(5+t_1)}{2}=\frac{t_2-t_1}{1}$$

设交点 $P_1(-3+2t_1, 5+t_1, t_1)$

$P_2(3+t_2, -1+4t_2, t_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1-2t_2=-6 \\ t_1+2t_2=6 \end{cases}$$ 得: $t_1=0, t_2=3$

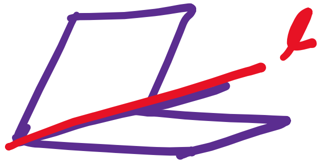
$\therefore P_1(-3,5,0)$ ⇒ l 方程: $\frac{x+3}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{1}$

4. 直线与平面的综合题

例. 设直线 $l_1:\begin{cases}x-3y+z=0\\2x-4y+z+1=0\end{cases}$，$l_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$，

求过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程.

[分析]：直线一般方程：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$



方向 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$

解：① l_1 上有一定点：$M_0(0,1,3)$

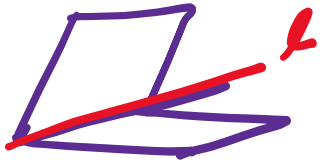
② l_1 的方向向量：$\{1,-3,1\}\times\{2,-4,1\}=\{1,1,2\}\triangleq\vec{s_1}$

4. 直线与平面的综合题

例. 设直线 $l_1:\begin{cases} x-3y+z=0 \\ 2x-4y+z+1=0 \end{cases}$, $l_2: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$,

求过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程.

[分析]: 直线一般方程: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$



方向 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$

解: ① l_1 上有一定点: $M_0(0,1,3)$

② l_1 的方向向量: $\{1,-3,1\}\times\{2,-4,1\}=\{1,1,2\}\triangleq\vec{s_1}$

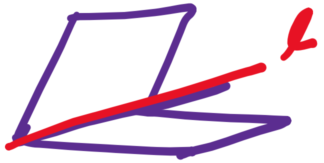
l_2 的方向向量: $\{1,3,4\}\triangleq\vec{s_2}$

4. 直线与平面的综合题

例. 设直线 $l_1: \begin{cases} x-3y+z=0 \\ 2x-4y+z+1=0 \end{cases}$，$l_2: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$，

求过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程.

[分析]：直线一般方程：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

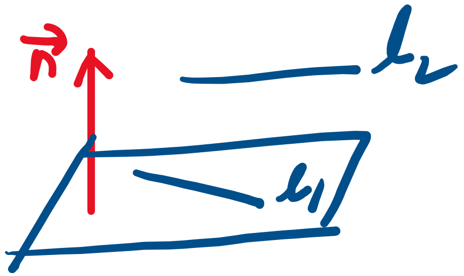


方向 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$

解：① l_1 上有一定点：$M_0(0,1,3)$

② l_1 的方向向量：$\{1,-3,1\}\times\{2,-4,1\}=\{1,1,2\}\triangleq\vec{s_1}$

l_2 的方向向量：$\{1,3,4\}\triangleq\vec{s_2}$



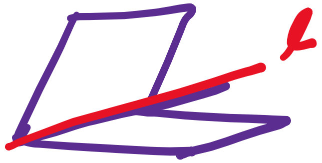
$\Rightarrow$ 平面 π 的法向量 $\vec{n}\perp\vec{s_1}$ 且 $\vec{n}\perp\vec{s_2}$

4. 直线与平面的综合题

例. 设直线 l_1: $\begin{cases} x-3y+z=0 \\ 2x-4y+z+1=0 \end{cases}$，$l_2$: $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$，

求过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程.

[分析]: 直线一般方程: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

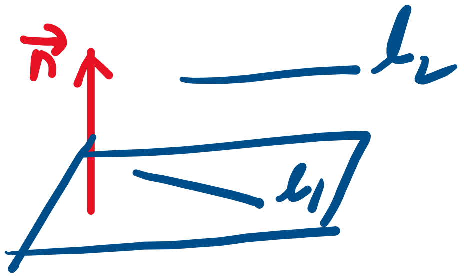


指 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$

解: ① l_1 上有一定点: $M_0(0,1,3)$

② l_1 的方向向量: $\{1,-3,1\}\times\{2,-4,1\}=\{1,1,2\}\triangleq\vec{s_1}$

l_2 的方向向量: $\{1,3,4\}\triangleq\vec{s_2}$



$\Rightarrow$ 平面 π 的法向量 $\vec{n}\perp\vec{s_1}$ 且 $\vec{n}\perp\vec{s_2}$

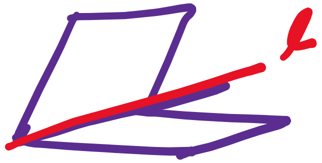
$\therefore \vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\{1,1,2\}\times\{1,3,4\}=\{-2,-2,2\}$

4. 直线与平面的综合题

例. 设直线 $l_1:\begin{cases} x-3y+z=0 \\ 2x-4y+z+1=0 \end{cases}$，$l_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$，

求过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程.

[分析]：直线一般方程：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$



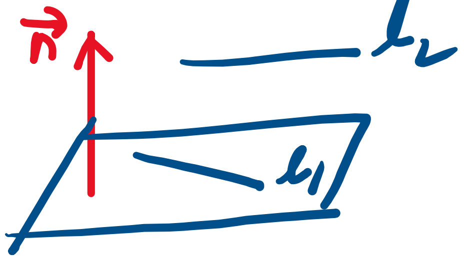
方向 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$

$\to x+y-z+2=0$

解：① l_1 上有一定点：$M_0(0,1,3)$　　故平面：$-2(x-0)-2(y-1)+2(z-3)=0$

② l_1 的方向向量：$\{1,-3,1\}\times\{2,-4,1\}=\{1,1,2\}\triangleq\vec{s_1}$

l_2 的方向向量：$\{1,3,4\}\triangleq\vec{s_2}$



点法式

$\Rightarrow$ 平面π的法向量 $\vec{n}\perp\vec{s_1}$ 且 $\vec{n}\perp\vec{s_2}$

$\therefore \vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\{1,1,2\}\times\{1,3,4\}=\{-2,-2,2\}$

祝同学们考试成功，学业有成！

框框老师.