

- 复数 $(\frac{2}{i} - \frac{2+2i}{1-i}i)$ 的三角表达式为 _____
- 已知 $z^2 + 8 = 0$, 则 $z =$ _____
- 已知 $e^z = -1 - i$, 则 $z =$ _____
- $\oint_{|z|=1} \cos(z^2 + 1) dz =$ _____
- $\int_0^i z dz =$ _____ 本资源免费共享 收集网站 nuaa.store
- 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+i}} z^n$ 的收敛半径为 _____
- 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$ 的收敛半径为 _____
- $\text{Res}\left[\frac{1}{2021i - z}, 2021i\right] =$ _____
- $\text{Res}\left[\frac{z - \sin z}{z^6}, 0\right] =$ _____
- 函数 $f(z) = \frac{\sin z^3 + i}{z^3(z^2 + 9)}$ 的奇点为 _____

本题分数	10
得分	

二、函数 $f(z) = 6xy + 5 + 3x^2yi - 3i$ 在何处可导? 何处解析? 并在可导点处求出该函数的导数。

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

本题分数	15
得分	

三、证明 $u(x, y) = x(1-x) + y^2$ 为调和函数, 并求出解析函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 使满足 $f(i) = 1 + i$ 。

本题分数	30
得分	

四、计算以下积分。

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

1.
$$\oint_{|z-1|=1} \frac{\cos z}{(z-1)^3} dz$$

2.
$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z(z+2)} dz$$

3.
$$\oint_c \frac{e^z}{z(z-1)(z-2)} dz, \text{ 其中 } c: |z|=3$$

本题分数	15
得分	

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

①将 $f(z) = \frac{1}{z^2 + 4z + 3}$ 在 $0 < |z + 1| < 2$ 内展成洛朗级数;

②将 $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内展成洛朗级数。

1. $2\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$

2. $2\sqrt{2}i, -2\sqrt{2}i$

3. $\frac{1}{2} \ln 2 + i\left(2k\pi - \frac{3}{4}\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

4. 0

5. $-\frac{1}{2}$

6. 1

7. $\frac{1}{e}$

8. -1

9. $-\frac{1}{120}$

10. $z=0, z=3i, z=-3i, z=\infty$

二、

$$\therefore u(x, y) = 6xy + 5, \quad v(x, y) = 3x^2y - 3$$

$$\therefore u_x = 6y, \quad u_y = 6x$$

$$v_x = 6xy, \quad v_y = 3x^2$$

$$C-R \text{ 方程组} = \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6y = 3x^2 \\ 6x = -6xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

\therefore 仅在 $z = 0$ 成立 C-R 条件

仅在 $z = 0$ 处可导, 处处不解析

$$f'(0) = (6y + 6xyi) \Big|_{(0,0)} = 0$$

≡

$$u(x, y) = x - x^2 + y^2$$

$$\therefore u_x = 1 - 2x, \quad u_{xx} = -2$$

$$u_y = 2y, \quad u_{yy} = 2$$

$$\therefore u_{xx} + u_{yy} = -2 + 2 = 0$$

$\therefore u(x, y) = x(1-x) + y^2$ 是调和函数

本资源免费共享 收集网站 nuua.store

$$\therefore f'(z) = u_x - i u_y$$

$$\therefore f'(z) = 1 - 2x - 2yi = 1 - 2z$$

$$\therefore f(z) = \int 1 - 2z \, dz = -z^2 + z + C$$

$$\therefore f(i) = 1 + i$$

$$\therefore C = 0, \quad f(z) = -z^2 + z$$

四

1. $z=1$ 在 $|z-1|=1$ 内部

$\cos z$ 在 $|z-1|=1$ 内部解析

由高阶导数公式

$$\text{原式} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^2 \cos z}{dz^2}$$

$$= \pi i \lim_{z \rightarrow 1} -\cos z$$

$$= -\pi i \cos 1$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z(z+2)} dz = 2\pi i \cdot \frac{e^z}{z+2} \Big|_{z=0}$$

$$= 2\pi i$$

四

$$3. \text{ 令 } f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)(z-2)}$$

$z=0, z=1, z=2$ 是一阶极点

且在 $|z|=3$ 内部

$$\text{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Res}[f(z), 1] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z}{z(z-2)} = -e$$

$$\text{Res}[f(z), 2] = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{e^z}{z(z-1)} = \frac{e^2}{2}$$

由留数定理可知

$$\text{原式} = 2\pi i \left(\frac{1}{2} - e + \frac{e^2}{2} \right)$$

$$= \pi i (1 - 2e + e^2)$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 4z + 3}$$

$$0 < |z+1| < 2$$

$$= \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

$$= \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{z+3}$$

$$= \frac{1}{2(z+1)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z+1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2(z+1)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z+1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z+1}{2}\right)^{n-1}$$

五. ② $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0 < |z| < +\infty$

内是处处解析的, 已知有

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < +\infty$$

而 $\frac{1}{z}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 解析

故 $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{z})^n}{n!}, \quad 0 < |z| < +\infty$

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}, \quad 0 < |z| < +\infty$$

$$\therefore f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2-n}}{n!}, \quad 0 < |z| < +\infty$$