# 《概率论与数理统计》速成课



——框框老师

# 第一讲　随机事件及其概率（一）（2种题型）

# 1. 利用"四大公式"求事件概率.

例. (1) 设 $P(A)=0.5$, $P(A\cup B)=0.8$, 且 $A,B$ 互不相容, 求 $P(B)$

(2) 设 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$, $P(AC)=\frac{1}{8}$, $P(AB)=P(BC)=0$, 求 $A,B,C$ 至少发生一个的概

[分析] ① "四大公式": 加法公式, 减法公式, 乘法公式, 条件公式.

② 关于加法公式: 1° $A\cup B$ 的含义: "$A,B$ 至少发生一个". (问: $A\cup B\cup C$ 呢?)

2° $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$; (口决: "加奇减偶")

3° $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$



解: (1) 由 $A,B$ 互不相容, 则 $AB=\varnothing$, 又 $P(A\cup B)=0.8 \Rightarrow \overset{0.5}{\cancel{P(A)}}+P(B)-\overset{0}{\cancel{P(AB)}}=0.8$

$\therefore P(B)=0.8-P(A)=0.8-0.5=0.3$

(2) $P($"$A,B,C$ 至少发生一个"$)=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0=\frac{5}{8}$

例. 设 $P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，求 $P(\overline{AB})$

[分析]：① 减法公式：$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

② 对立事件：$P(\overline{A})=1-P(A)$

解：① 由 $P(A-B)=0.3 \Rightarrow P(A)-P(AB)=0.3$

$\Rightarrow P(AB)=P(A)-0.3=0.7-0.3=0.4$

② $P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6$

例. 设 $P(B)=0.4$，$P(A\cup B)=0.5$，求 $P(A|\bar{B})$

[分析]：① 条件概率公式：$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$；② $P(A\cdot\bar{B})=P(A)-P(AB)$

解：1° 由 $P(B)=0.4$，$P(A\cup B)=0.5$，则：

$$P(A)+P(B)-P(AB)=0.5 \Rightarrow P(A)-P(AB)=0.5-P(B)=0.5-0.4=0.1$$

2° $P(A|\bar{B})=\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$

$$=\frac{0.1}{1-0.4}=1/6$$

例. 设 $A,B$ 相互独立，$P(B)=0.4$，$P(A\cup B)=0.5$，求 $P(\overline{B}|A)$

[分析]：① $A$ 与 $B$ 独立 $\Leftrightarrow$ $A$ 与 $B$ 互不影响 $\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$

$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

② $A$ 与 $B$ 独立 $\Leftrightarrow$ $B$ 是否发生不受 $A$ 的影响 $\Leftrightarrow$ $\overline{B}$ 与 $A$，$\overline{B}$ 与 $\overline{A}$，$B$ 与 $\overline{A}$ 独立

$\Leftrightarrow P(\overline{B}|A)=P(\overline{B})$ （"有爸无爸，对独立无影响"）



解：法1°：由 $A,B$ 独立 $\Rightarrow P(AB)=P(A)\overset{0.4}{P(B)}=0.4P(A)$

而 $P(A\cup B)=0.5 \Rightarrow P(A)+P(B)-P(AB)=0.5 \Rightarrow P(A)+0.4-0.4P(A)=0.5 \Rightarrow P(A)=\frac{1}{6}$

$$P(\overline{B}|A)=\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)-0.4P(A)}{P(A)}=0.6$$

例. 设 A, B 相互独立，$P(B)=0.4$，$P(A\cup B)=0.5$，求 $P(\overline{B}|A)$

[分析]：① A 与 B 独立 $\Leftrightarrow$ A 与 B 互不影响 $\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$

$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

② A 与 B 独立 $\Leftrightarrow$ B 是否发生不受 A 的影响 $\Leftrightarrow \overline{B}$ 与 A，$\overline{B}$ 与 $\overline{A}$，B 与 $\overline{A}$ 独立

$\Leftrightarrow P(\overline{B}|A)=P(\overline{B})$ （"有爸无爸，对独立无影响"）



解：法2°：由 A, B 独立 $\Rightarrow \overline{B}$ 与 A 独立

$\Rightarrow P(\overline{B}|A)=P(\overline{B})=1-P(B)=1-0.4=0.6$

## 2. 古典概型求概率.

例. 袋中有5只白球，6只黑球，从中取出2球，求：(1) 取到1白1黑的概率；(2) 至少取到1只黑球的概率.

[分析]：① 古典概型中：事件A发生的概率公式：$P(A)=\dfrac{A\text{中可能的点数}}{\Omega\text{中可能的点数}}$

② 排列：$A_{11}^{2}$ 表示从11个不同元素中任取2个排成1列的排法：$A_{11}^{2}=11\times10$

组合：$C_{11}^{2}$ 表示从11个不同元素中任取2个不计顺序的取法：$C_{11}^{2}=\dfrac{11\times10}{2!}$



解：(1) 法1：设 A = "取到1黑1白球"，$\Omega$ = "从11球中任取2球"

$$P(A)=\frac{A\text{中可能点数}}{\Omega\text{中可能点数}}\ \frac{\text{一次取2球}}{\text{不计顺序}}\ \frac{C_5^1\cdot C_6^1}{C_{11}^2}=\frac{5\times6}{\frac{11\times10}{2!}}=\frac{6}{11}$$

(分步相乘，分类相加)

## 2. 古典概型求概率.

例. 袋中有5只白球，6只黑球，从中取出2球，求：(1) 取到1白1黑的概率；(2) 至少取到1只黑球的概率.

[分析]：① 古典概型中：事件A发生的概率公式：$P(A)=\frac{A\text{中可能的点数}}{\Omega\text{中可能的点数}}$

② 排列：$A_{11}^2$ 表示从11个不同元素中任取2个排成1列的排法：$A_{11}^2=11\times10$

组合：$C_{11}^2$ 表示从11个不同元素中任取2个不计顺序的取法：$C_{11}^2=\frac{11\times10}{2!}$



解：(1) 法2：设 A＝"取到1黑1白球"　$\Omega$＝"从11球中任取2球"

$$P(A)=\frac{A\text{中可能点数}}{\Omega\text{中可能点数}}\ \frac{\text{一次取1球}}{\text{共取2次}}\ \frac{\text{“先白后黑”}+\text{“先黑后白”}}{A_{11}^2}=\frac{A_5^1\cdot A_6^1+A_6^1\cdot A_5^1}{A_{11}^2}=\frac{5\times6+6\times5}{11\times10}$$

$$=\frac{6}{11}$$

(分步相乘，分类相加)

## 2. 古典概型求概率.

例. 袋中有5只白球,6只黑球,从中取出2球,求:(1)取到1白1黑的概率;(2)至少取到1只黑球的概率.

[分析]: ① 古典概型中:事件A发生的概率公式: $P(A)=\dfrac{A中可能的点数}{\Omega中可能的点数}$

② 排列: $A_{11}^2$ 表示从11个不同元素中任取2个排成1列的排法: $A_{11}^2=11\times10$

组合: $C_{11}^2$ 表示从11个不同元素中任取2个不计顺序的取法: $C_{11}^2=\dfrac{11\times10}{2!}$



解: (2) 设 B="至少取到1只黑球", $\overline{B}$="2只球均为白球"

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{\overline{B}中点数}{\Omega中点数}\frac{不计}{顺序}1-\frac{C_5^2}{C_{11}^2}=1-\frac{\frac{5\times4}{2!}}{\frac{11\times10}{2!}}=1-\frac{2}{11}$$

$$=\frac{9}{11}$$

# 第二讲　随机事件及其概率（二）（2种题型）

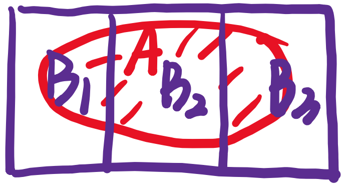
## 3. 全概率公式与贝叶斯公式.

例. 甲袋中有5只红球，4只白球；乙袋中有4只红球，5只白球. 先从甲中任取1只球放入乙中，再从乙中取1只球，求：(1) 从乙中取到的球是白球的概率；(2) 若已知从乙中取到1白球，问从甲中取到的球是白球的概率.

[分析]: ① 应用题中，若试验分两个阶段完成，则用全概率公式或贝叶斯公式；



② 全概率公式: $P(A) = P(AB_1 \cup AB_2 \cup AB_3) = P(AB_1) + P(AB_2) + P(AB_3)$




$$= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

其中 $\left\{\begin{array}{l} B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega \\ B_1, B_2, B_3 \text{ 两两互斥} \end{array}\right\} \Rightarrow B_1, B_2, B_3$ 为 $\Omega$ 的一个完备事件组.

## 3. 全概率公式与贝叶斯公式.

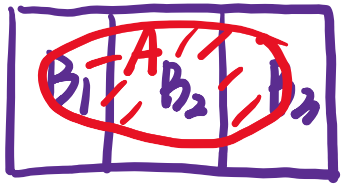
例. 甲袋中有5只红球，4只白球；乙袋中有4只红球，5只白球. 先从甲中任取1只球放入乙中，再从乙中取1只球，求：(1) 从乙中取到的球是白球的概率；(2) 若已知从乙中取到1白球，问从甲中取到的球是白球的概率.

[分析]：① 应用题中，若试验分两个阶段完成，则用全概率公式或贝叶斯公式；



② 全概率公式：$P(A)=P(AB_1\cup AB_2\cup AB_3)=P(AB_1)+P(AB_2)+P(AB_3)$

$=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$

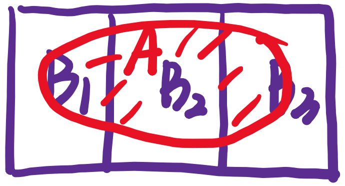



③ 贝叶斯公式：$P(B_1|A)=\dfrac{P(AB_1)}{P(A)}=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{\text{全概公式}}$

例. 甲袋中有5只红球，4只白球；乙袋中有4只红球，5只白球. 先从甲中任取1只球放入乙中，再从乙中取1只球，求：(1) 从乙中取到的球是白球的概率；(2) 若已知从乙中取到1白球，问从甲中取到的球是白球的概率.

[分析]：① 应用题中，若试验分两个阶段完成，则用全概率公式或贝叶斯公式；

② 全概率公式：$P(A)=P(AB_1\cup AB_2\cup AB_3)=P(AB_1)+P(AB_2)+P(AB_3)$




$$=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$$

③ 贝叶斯公式：$P(B_1|A)=\dfrac{P(AB_1)}{P(A)}=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{\text{全概公式}}$

④：步骤
- 第1°步：把第一阶段所有可能结果看成完备组 $B_1,B_2,B_3$；
- 第2°步：把第2阶段的某个可能结果看成 A；第3°步：用全概或贝叶斯公式

例. 甲袋中有5只红球，4只白球；乙袋中有4只红球，5只白球. 先从甲中任取1只球放入乙中，再从乙中取1只球，求：(1) 从乙中取到的球是白球的概率；(2) 若已知从乙中取到1白球，问从甲中取到的球是白球的概率.

③ 全概率公式：$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$

④：步骤 第1步：把第一阶段所有可能结果看成完备组 $B_1, B_2, B_3$；
第2步：把第二阶段的某个可能结果看成 A；第3步：用全概或贝叶斯公式



解 (1) $\boxed{5红4白}_{甲} \xrightarrow{取1球} \boxed{4红5白}_{乙} \xrightarrow{取1球}$ 第1阶段：甲→乙：$\begin{cases} B_1=从甲中取到红球 \\ B_2=从甲中取到白球 \end{cases}$

第2阶段：从乙中取1球：A="从乙中取到白球"

由全概率公式：$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{5}{9}\times\frac{5}{10}+\frac{4}{9}\times\frac{6}{10}=\frac{49}{90}$

## 3. 全概率公式与贝叶斯公式.

例1. 甲袋中有5只红球，4只白球；乙袋中有4只红球，5只白球. 先从甲中任取1只球放入乙中，再从乙中取1只球，求：(1) 从乙中取到的球是白球的概率；(2) 若已知从乙中取到1白球，问从甲中取到的球是白球的概率.

③ 贝叶斯公式：$P(B_1|A)=\dfrac{P(AB_1)}{P(A)}=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{\text{全概公式}}$



解. (1) $\boxed{5红4白}_{甲} \xrightarrow{取1球} \boxed{4红5白}_{乙} \xrightarrow{取1球}$

第1阶段：甲 → 乙：$\begin{cases} B_1=\text{从甲中取到红球} \\ B_2=\text{从甲中取到白球} \end{cases}$

第2阶段：从乙中取1球：A ="从乙中取到白球"

由全概率公式：$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{5}{9}\times\frac{5}{10}+\frac{4}{9}\times\frac{6}{10}=\frac{49}{90}$

(2) 由题意：$P(B_2|A)\underset{贝叶斯}{=}\dfrac{P(B_2A)}{P(A)}=\dfrac{P(B_2)P(A|B_2)}{49/90}=\dfrac{4/9\times 6/10}{49/90}=\dfrac{24}{49}$

## 3. 全概率公式与贝叶斯公式.

例. 已知男性中有 5%是色盲，女性中有 0.25%是色盲，今从男女人数相等的人群中随机挑选一人，恰好是色盲，问此人是男性的概率.

分析: 第1步: 把第一阶段所有可能结果看成完备组 $B_1, B_2, B_3$；
第2步: 把第2阶段的某个可能结果看成 A； 第3步: 用全概或贝叶斯公式



解: 第一阶段: 从人群中选人: $B_1$ = "选到男性", $B_2$ = "选到女性"

第二阶段: 判断此人是否色盲: A = "发现此人是色盲

① $P(A) \overset{\text{全概}}{=} P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) = \frac{1}{2} \times 5\% + \frac{1}{2} \times 0.25\% = \frac{21}{800}$

② $P(B_1|A) \overset{\text{贝叶斯}}{=} \frac{P(B_1A)}{P(A)} = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{21/800} = \frac{\frac{1}{2} \times 5\%}{21/800} = \frac{20}{21}$

## 4. 伯努利概型求概率.

例. 某人打靶的命中率为0.8，现独立射击5次，问5次中命中2次概率？

[分析]：当出现"独立"，"n重试验"，"每次试验只有A与$\bar{A}$两种结果"，则用伯努利概型：$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，其中 $p=P(A)$，$1-p=P(\bar{A})$

解：5次独立重复射击，$p=0.8$，则：

$P\{\text{"5次试验中命中2次"}\}=P_5(2)=C_5^2 p^2(1-p)^3$

$=C_5^2\cdot 0.8^2\cdot 0.2^3$

# 第三讲　一维随机变量及其分布（一）(3种题型)

# 1. 离散型随机变量(R.V.)求分布律.

例. 将一枚骰子掷两次，以 X 表示两次中得到的小的点数，求X的分布律(概率分布)

[分析] 离散型随机变量R.V.的分布律求法："先求取值，再求概率"

解: 法1. X = "两次骰子中较小的点数"，X 可能取值：1, 2, 3, 4, 5, 6



⇒ 分布律:

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_6$ |

掷两次总情况:

| ① \ ② | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| 2 | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| 3 | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| 4 | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| 5 | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| 6 | (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |

其中 $p_1 = \dfrac{\text{"X=1"情况数}}{\text{总情况数}} = \dfrac{11}{36}$，$p_2 = \dfrac{9}{36}$，$p_3 = \dfrac{7}{36}$

$p_4 = \dfrac{5}{36}$，$p_5 = \dfrac{3}{36}$，$p_6 = \dfrac{1}{36}$

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\frac{11}{36}$ | $\frac{9}{36}$ | $\frac{7}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

# 1. 离散型随机变量(R.V.)求分布律.

例. 将一枚骰子掷两次，以 X 表示两次中得到的小的点数，求 X 的分布律(概率分布)

[分析] 离散型随机变量 R.V. 的分布律求法："先求取值，再求概率"

解: 法2: X = "两次骰子中较小的点数"， X 可能取值: 1, 2, 3, 4, 5, 6



⇒ 分布律:

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ |

其中 $P_1 = \dfrac{\text{"X=1"情况数}}{\text{总情况数}} = \dfrac{\text{"先1后大"} + \text{"先大后1"} + \text{"先1后1"}}{A_6^1 \cdot A_6^1} = \dfrac{11}{36}$

$A_1^1 A_5^1$ 　 $A_5^1 A_1^1$ 　 $A_1^1 \cdot A_1^1$

$P_2 = \dfrac{A_1^1 \cdot A_4^1 + A_4^1 A_1^1 + A_1^1 A_1^1}{A_6^1 \cdot A_6^1} = \dfrac{9}{36}$ ， 同理可得:

$P_3 = \dfrac{7}{36}$ ， $P_4 = \dfrac{5}{36}$ ， $P_5 = \dfrac{3}{36}$ ， $P_6 = \dfrac{1}{36}$ ， 故:

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\frac{11}{36}$ | $\frac{9}{36}$ | $\frac{7}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

2. 利用常见离散型分布求概率.

例. 在四次独立射击试验中，每次命中目标的概率为 $p$，若已知至少命中1次的概率为 $\frac{80}{81}$，求 $p$.

[分析]. 当出现："独立"，"n次试验"，"每次试验只有两种结果"，则用二项分布 $B(n,p)$，分布律：$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,\cdots,n$

解：设 $X=$"4次射击中命中目标次数"，则 $X\sim B(4,p)$

由题意：$P\{\text{"至少命中1次"}\}=\frac{80}{81} \overset{\text{对立}}{\Rightarrow} P\{\text{"4次均未中"}\}=1-\frac{80}{81}=\frac{1}{81}$

$\Rightarrow P\{X=0\}=C_4^0 p^0(1-p)^{4-0}=\frac{1}{81} \Rightarrow (1-p)^4=\frac{1}{81}=(\frac{1}{3})^4 \Rightarrow 1-p=\frac{1}{3} \Rightarrow p=\frac{2}{3}$

## 3. 连续型R.V. 相关计算

例. 设R.V. $X$ 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \ln x, & 1\le x<e\\ 1, & x\ge e\end{cases}$，(1) 求 $X$ 的概率密度 $f(x)$.

(2) 求 $P\{X<2\}$，$P\{0<X\le 3\}$

[分析]：(1) 已知分布函数 $F(x)$ 求 $f(x)$ —— 用 $F'(x)=f(x)$

(2) 连续型R.V. $X$ 的区间概率：$P\{a<X\le b\} \overset{①}{=} \int_a^b f(x)dx \overset{②}{=} F(b)-F(a)$

$P\{X=a\}=0$，$P\{X\le a\}=F(a)=\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$



解：(1) 由 $f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{1}{x}, & 1\le x<e\\ 0, & x\ge e\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 1\le x<e\\ 0, & (x<1\text{或}x\ge e)=\text{其它}\end{cases}$

(2) $P\{X<2\}=P\{X\le 2\}=F(2)=\ln 2$

## 3. 连续型R.V. 相关计算

例. 设 R.V. X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \ln x, & 1\le x<e\\ 1, & x\ge e\end{cases}$，(1) 求 X 的概率密度 $f(x)$.

(2) 求 $P\{X<2\}$ $P\{0<X\le 3\}$

(2) 连续型R.V. X 的区间概率: $P\{a<X\le b\} \overset{①}{=} \int_a^b f(x)dx \overset{②}{=} F(b)-F(a)$

$P\{X=a\}=0$，$P\{X\le a\}=F(a)=\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$



解: (1) 由 $f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{1}{x}, & 1\le x<e\\ 0, & x\ge e\end{cases} = \begin{cases}\frac{1}{x}, & 1\le x<e\\ 0, & (x<1 或 x\ge e)=其它\end{cases}$

(2) ① $P\{X<2\}=P\{X\le 2\}=F(2)=\ln 2$　② 法1: $P\{0<X\le 3\}=F(3)-F(0)=1-0=1$

法2: $P\{0<X\le 3\}=\int_0^3 f(x)\,dx=\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e \frac{1}{x}\,dx=\ln x\Big|_1^e=1$

例. 设X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} ke^{-2x}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$，(1) 求k.

(2). 求分布函数 $F(x)$.

[分析]: (1) 已知 $f(x)$，反求参数 —— 用规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$

(2) 已知 $f(x)$，求 $F(x)$ $\xrightarrow[\text{积分}]{\text{不定}}$ ① $F(x)=f(x)$的积分；② $F(x)$规范性 $F(+\infty)=1$, $F(-\infty)=0$



解: (1) 由规范性：$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty} ke^{-2x}\,dx$

$ke^{-2x}$

$$\therefore\quad 1=\int_{0}^{+\infty} ke^{-2x}\,dx=k\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-2x}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{k}{2}$$

$$\therefore\quad k=2.$$

例. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 2e^{-2x}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$，(1) 求 k.

框框老师课堂

(2). 求分布函数 F(x).

[分析]: (1) 已知 f(x)，反求参数 —— 用规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$

$F(+\infty)=1$
$F(-\infty)=0$

(2) 已知 f(x)，求 F(x) $\xrightarrow[\text{积分}]{\text{不定}}$ ① F(x) = f(x)的积分；② F(x)规范性



解: (2) 由 $F'(x)=f(x)=\begin{cases} 2e^{-2x}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$，显然：$F(x)=\begin{cases} -e^{-2x}+C_1, & x\geq 0 \\ C_2, & x<0 \end{cases}$

而 $\begin{cases} F(-\infty)=0 \Rightarrow C_2=0 \\ F(+\infty)=1 \Rightarrow -e^{-2\cdot(+\infty)}+C_1=1 \Rightarrow C_1=1 \end{cases}$ $\Rightarrow F(x)=\begin{cases} 1-e^{-2x}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$

例. 若 $X \sim f(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，求 $F(x)$

【分析】：已知 $f(x)$，求 $F(x)$ $\xrightarrow{不定积分}$ ① $F(x)=\int f(x)\,dx$ ② $\begin{cases} 分段点处：连续 \\ F(-\infty)=0 \\ F(+\infty)=1, \end{cases}$

解：①由 $f(x) = \begin{cases} 0, & x\leq 0 \\ 1, & 0<x<1 \\ 0, & x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow$ 显然 $F(x) = \begin{cases} C_1, & x\leq 0 \\ x+C_2, & 0<x<1 \\ C_3, & x\geq 1 \end{cases}$



② 由规范性：$F(-\infty)=0 \Rightarrow C_1=0$ ；$F(+\infty)=1 \Rightarrow C_3=1$

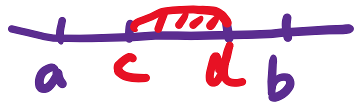
$\lim\limits_{x\to 0^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} F(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} C_1 = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+C_2) \Rightarrow C_2=0$

综上：$F(x) = \begin{cases} 0, & x\leq 0 \\ x, & 0<x<1 \\ 1, & x\geq 1 \end{cases}$

# 第四讲　一维随机变量及其分布（二）(3种题型)

# 4. 利用常见连续型分布的计算

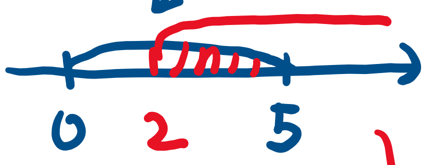
例. 设 $X \sim U(0,5)$，则关于 $t$ 的一元二次方程 $4t^2+4X\cdot t+X+2=0$ 有实根的概率为______.

[分析]：若 $X \sim U(a,b)$，则：① $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x\le b\\ 0, & 其他\end{cases}$；② ，则 $P\{c<X<d\}=\frac{d-c}{b-a}$



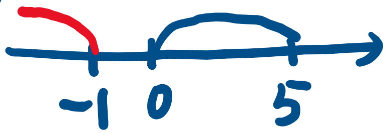
解：$P\{\text{“方程有实根”}\}=P\{\Delta\geqslant 0\}=P\{16X^2-16(X+2)\geqslant 0\}=P\{X\geqslant 2 \text{ 或 } X\leqslant -1\}$

$=P\{X\geqslant 2\}+P\{X\leqslant -1\} = \frac{5-2}{5-0}+0=\frac{3}{5}$





$\frac{5-2}{5-0}$

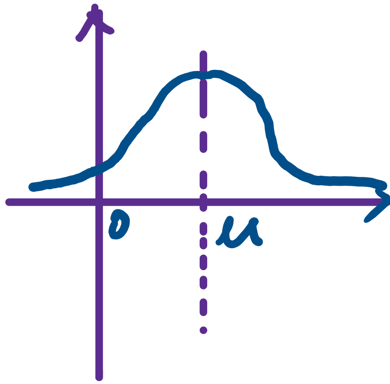




无交集：$\phi$

例. 若 $X\sim N(2,\sigma^2)$，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X<0\}=$____.

[分析]：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则：① $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ② 图形：

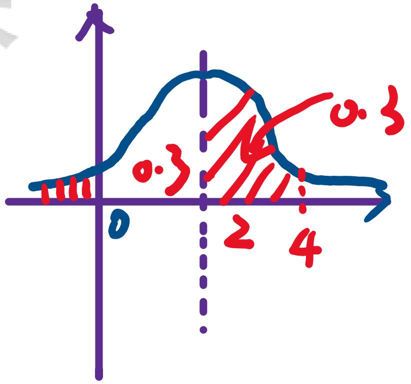



③ $P\{X\le\mu\}=P\{X\ge\mu\}=\frac{1}{2}$ ；④ 标准化：$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

⑤ $X\sim N(0,1)\Rightarrow\Phi(0)=\frac{1}{2}$，$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$，$P\{a<X\le b\}=\Phi(b)-\Phi(a)$



解：法1：图示法：$X\sim N(2,\sigma^2)\Rightarrow f(x)$ 的图形：

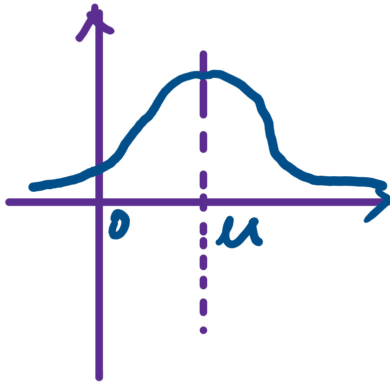



由 $P\{2<X<4\}=0.3\Rightarrow P\{0<X<2\}=0.3$

$\therefore P\{X<0\}=0.2$

例. 若 $X\sim N(2,\sigma^2)$，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X<0\}=$ ____ .

[分析]: 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则: ① $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ② 图形:




③ $P\{X\le\mu\}=P\{X\ge\mu\}=\frac{1}{2}$ ； ④ 标准化: $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

⑤ $X\sim N(0,1)\Rightarrow \Phi(0)=\frac{1}{2}$ ， $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ ， $P\{a<X\le b\}=\Phi(b)-\Phi(a)$



解: 法2 : 标准化:

由 $0.3=P\{2<X<4\}\overset{\text{标准化}}{=\!=\!=\!=}P\{\frac{2-2}{\sigma}<\frac{X-2}{\sigma}<\frac{4-2}{\sigma}\}=\Phi(\frac{2}{\sigma})-\underbrace{\cancel{\Phi(0)}}_{0.5}\Rightarrow\Phi(\frac{2}{\sigma})=0.8$

$P\{X<0\}\overset{\text{标准化}}{=\!=\!=\!=}P\{\frac{X-2}{\sigma}<\frac{0-2}{\sigma}\}=\Phi(-\frac{2}{\sigma})=1-\underbrace{\Phi(\frac{2}{\sigma})}_{\substack{\parallel\\0.8}}=0.2$

## 5. 离散型变量 X 的函数的分布.

例. 设 R.V. X 的分布律为:

| $X$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{11}{30}$ |

求 $Y=X^2$ 的分布律.

[分析]: 离散 R.V. X 函数的分布律: "先求取值, 再求概率"

解: ① $Y=X^2$ 的可能值为: $0, 1, 4, 9$

② $P\{Y=0\} \overset{\text{代入}}{\underset{Y=X^2}{=}} P\{X^2=0\} = P\{X=0\} = \frac{1}{5}$

$P\{Y=1\} = P\{X^2=1\} = P\{X=-1\} + P\{X=1\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{15} = \frac{7}{30}$

$P\{Y=4\} = P\{X^2=4\} = P\{X=-2\} + P\{X=2\} = \frac{1}{5} + 0 = \frac{1}{5}$

同理: $P\{Y=9\} = \frac{11}{30}$

综上:

| $Y$ | $0$ | $1$ | $4$ | $9$ |
|---|---|---|---|---|
| | $1/5$ | $7/30$ | $1/5$ | $11/30$ |

## 6. 连续型变量X的函数的分布

例. 设 R.V. X 在区间 (0,2) 上服从均匀分布，$Y=X^3$，求 (1) Y的分布函数 $F_Y(y)$.

(2) Y的密度函数 $f_Y(y)$.

[分析]：① 已知 X 的密度 $f_X(x)$，求 $Y=g(X)$ 的分布函数 $F_Y(y)$：

第1°步：先找自变量 y 的分段点（一般把 x 分段点代入 $y=g(x)$ 得 y 的分段点）

第2°步：依据以上分段点，分区间求 $F_Y(y)=P\{Y\le y\} \xlongequal{\text{代入}} P\{g(X)\le y\}=\int_{\text{区间}} f_X(x)dx$

② 已知 $F_Y(y) \xRightarrow{\text{求导}} f_Y(y)=F_Y'(y)$



解 (1) 由 $X\sim U(0,2) \Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$x$：0, 2 $\Rightarrow y=x^3$ 分段点：0, 8

① 当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^3\le y\}=P\{X\le \sqrt[3]{y}\}=\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{y}} f_X(x)\,dx=0$

# 6. 连续型变量X的函数的分布

例. 设R.V. $X$在区间$(0,2)$上服从均匀分布，$Y=X^3$，求(1) $Y$的分布函数$F_Y(y)$.

(2) $Y$的密度函数$f_Y(y)$.

第2°步：依据以上分段点，分区间求 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}\overset{代入}{=}P\{g(X)\le y\}=\int_{区间}f_X(x)dx$

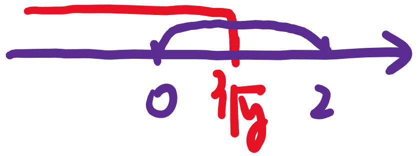
② 已知$F_Y(y)\xRightarrow{求导}f_Y(y)=F_Y'(y)$



解：(1) 由 $X\sim U(0,2)\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，$x$：0, 2 $\Rightarrow y=x^3$分段点：0, 8

① 当$y<0$时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^3\le y\}=P\{X\le\sqrt[3]{y}\}=\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{y}}f_X(x)dx=0$

② 当$0\le y<8$时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^3\le y\}=P\{X\le\sqrt[3]{y}\}=\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{y}}f_X(x)dx$




$=\int_0^{\sqrt[3]{y}}\frac{1}{2}dx=\frac{\sqrt[3]{y}}{2}$

# 6. 连续型变量X的函数的分布

例. 设R.V. X在区间(0,2)上服从均匀分布，$Y=X^3$，求 (1) Y的分布函数$F_Y(y)$.

(2) Y的密度函数$f_Y(y)$.

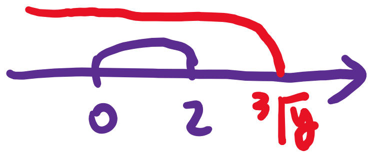
② 已知$F_Y(y) \xRightarrow{求导} f_Y(y) = F_Y'(y)$

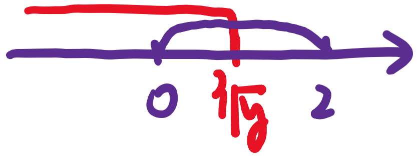
解: (1) 由 $X \sim U(0,2) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0<x<2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，$x: 0, 2 \Rightarrow y = x^3$ 分段点: 0, 8



① 当 $y<0$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^3 \le y\} = P\{X \le \sqrt[3]{y}\} = \int_{-\infty}^{\sqrt[3]{y}} f_X(x)\,dx = 0$

② 当 $0 \le y < 8$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^3 \le y\} = P\{X \le \sqrt[3]{y}\} = \int_{-\infty}^{\sqrt[3]{y}} f_X(x)\,dx$




$= \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx + \int_{0}^{\sqrt[3]{y}} f_X(x)\,dx = 0 + \int_{0}^{\sqrt[3]{y}} \frac{1}{2}\,dx = \frac{\sqrt[3]{y}}{2}$

③ 当 $y \ge 8$ 时，$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\sqrt[3]{y}} f_X(x)\,dx = \int_{0}^{2} \frac{1}{2}\,dx = 1$

例. 设 R.V. $X$ 在区间 $(0,2)$ 上服从均匀分布，$Y=X^3$，求 (1) $Y$ 的分布函数 $F_Y(y)$.

(2) $Y$ 的密度函数 $f_Y(y)$.　② 已知 $F_Y(y) \xRightarrow{求导} f_Y(y)=F_Y'(y)$

解：(1) 由 $X\sim U(0,2) \Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，$x: 0,2 \Rightarrow y=x^3$ 分段点: 0, 8

① 当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^3\le y\}=P\{X\le\sqrt[3]{y}\}=\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{y}} f_X(x)\,dx=0$

② 当 $0\le y<8$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^3\le y\}=P\{X\le\sqrt[3]{y}\}=\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{y}} f_X(x)\,dx$


$=\int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx+\int_{0}^{\sqrt[3]{y}} f_X(x)\,dx=0+\int_0^{\sqrt[3]{y}}\frac{1}{2}\,dx=\frac{\sqrt[3]{y}}{2}$

③ 当 $y\ge 8$ 时，$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{y}} f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx+\int_0^2 f_X(x)\,dx+\int_2^{+\infty} f_X(x)\,dx=\int_0^2\frac{1}{2}\,dx=1$

综上：$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \sqrt[3]{y}/2, & 0\le y<8\\ 1, & y\ge 8\end{cases}$　(2) $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6y^{2/3}}, & 0<y<8\\ 0, & 其他\end{cases}$

# 第五讲　二维随机变量及其分布（4种题型）

1. 二维离散型R.V.的分布（联合、边缘，条件分布，独立性）

例 将两封信随机地往编号为1，2，3，4的4个邮筒内投，X，Y分别表示第1，2个邮筒内信的数目，(1)写出(X，Y)的联合概率分布；(2)求X，Y的边缘分布律；(3)求X在Y=1条件下的条件分布律；(4)问X与Y独立吗？

[分析]：① 联合分布律求法："先求取值，再求概率" ② 边缘："行行相加，列列相加" ③ 条件分布律：用条件概率公式；④ 离散R.V.独立性：每行成比例。



解：(1) X="第1个邮筒内信数目"，Y="第2个邮筒内信数目"

则 X=0，1，2；Y=0，1，2. 如右表：

| X \ Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $P_{11}$ | $P_{12}$ | $P_{13}$ |
| 1 | $P_{21}$ | $P_{22}$ | $P_{23}$ |
| 2 | $P_{31}$ | $P_{32}$ | $P_{33}$ |

其中 $P_{11}=P\{X=0,Y=0\}=P\{$两封信均在3、4号筒$\}=\dfrac{2\times2}{4\times4}=\dfrac{4}{16}$

1. 二维离散型R.V.的分布（联合、边缘，条件分布，独立性）

例 将两封信随机地往编号为1,2,3,4的4个邮筒内投，X，Y分别表示第1,2个邮筒内信的数目，(1)写出(X,Y)的联合概率分布；(2)求X,Y的边缘分布律；(3)求X在Y=1条件下的条件分布律；(4)问X与Y独立吗？

[分析]：① 联合分布律求法："先求取值，再求概率" ② 边缘："行行相加，列列相加" ③ 条件分布律：用条件概率公式；④ 离散R.V.独立性：每行成比例.



解：其中 $p_{11}=P\{X=0,Y=0\}=P\{$两封信均在3、4号筒$\}=\frac{2\times2}{4\times4}=\frac{4}{16}$

$p_{12}=P\{X=0,Y=1\}=P\{$一封在2号，一封在3或4号$\}=\frac{C_2^1\cdot1\cdot2}{4\times4}=\frac{4}{16}$

$p_{13}=P\{X=0,Y=2\}=P\{$两封均在2号$\}=\frac{1}{4\times4}=\frac{1}{16}$

同理：$p_{21}=\frac{4}{16}$，$p_{22}=\frac{C_2^1\cdot1\cdot1}{4\times4}=\frac{2}{16}$，$p_{23}=0$，$p_{31}=\frac{1}{16}$，$p_{32}=0$

| X \ Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $p_{13}$ |
| 1 | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $p_{23}$ |
| 2 | $p_{31}$ | $p_{32}$ | $p_{33}$ |

1. 二维离散型R.V.的分布(联合、边缘，条件分布，独立性)

例 将两封信随机地往编号为1，2，3，4的4个邮筒内投，X，Y分别表示第1，2个邮筒内信的数目，(1)写出(X，Y)的联合概率分布；(2)求X，Y的边缘分布律；(3)求X在Y=1条件下的条件分布律；(4)问X与Y独立吗？

[分析]：① 联合分布律求法："先求取值，再求概率" ② 边缘："行行相加，列列相加" ③ 条件分布律：用条件概率公式；④ 离散R.V.独立性：每行成比例.



解：其中 $p_{11}=P\{X=0,Y=0\}=P\{$两封信均在3、4号筒$\}=\frac{2\times2}{4\times4}=\frac{4}{16}$

$p_{12}=P\{X=0,Y=1\}=P\{$一封在2号，一封在3或4号$\}=\frac{C_2^1\cdot1\cdot2}{4\times4}=\frac{4}{16}$

$p_{13}=P\{X=0,Y=2\}=P\{$两封均在2号$\}=\frac{1}{4\times4}=\frac{1}{16}$

同理：$p_{21}=\frac{4}{16}$，$p_{22}=\frac{C_2^1\cdot1\cdot1}{4\times4}=\frac{2}{16}$，$p_{23}=0$，$p_{31}=\frac{1}{16}$，$p_{32}=0$

| X \ Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/4 | 1/4 | 1/16 |
| 1 | 1/4 | 1/8 | 0 |
| 2 | 1/16 | 0 | 0 |

1. 二维离散型R.V.的分布（联合、边缘，条件分布，独立性）

例 将两封信随机地往编号为1，2，3，4的4个邮筒内投，X，Y分别表示第1，2个邮筒内信的数目，(1)写出(X，Y)的联合概率分布；(2)求X，Y的边缘分布律；(3)求X在Y=1条件下的条件分布律；(4)问X与Y独立吗？

[分析]：① 联合分布律求法："先求取值，再求概率" ② 边缘："行行相加，列列相加" ③ 条件分布律：用条件概率公式；④ 离散R.V.独立性：每行成比例.



解：(2)

| X \ Y | 0 | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1/4 | 1/4 | 1/16 | 9/16 |
| 1 | 1/4 | 1/8 | 0 | 3/8 |
| 2 | 1/16 | 0 | 0 | 1/16 |
| | 9/16 | 3/8 | 1/16 | |

① X的边缘分布律：

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| | 9/16 | 3/8 | 1/16 |

② Y的边缘分布律：

| Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| | 9/16 | 3/8 | 1/16 |

1. 二维离散型R.V.的分布（联合、边缘，条件分布，独立性）

例 将两封信随机地往编号为1, 2, 3, 4的4个邮筒内投，X，Y分别表示第1, 2个邮筒内信的数目，(1)写出(X, Y)的联合概率分布；(2) 求X, Y的边缘分布律；(3) 求X在Y=1条件下的条件分布律；(4) 问X与Y独立吗？

[分析]：① 联合分布律求法："先求取值，再求概率" ② 边缘："行行相加，列列相加" ③ 条件分布律：用条件概率公式；④ 离散R.V.独立性：每行成比例.



解：(2)

| X \ Y | 0 | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1/4 | 1/4 | 1/16 | 9/16 |
| 1 | 1/4 | 1/8 | 0 | 3/8 |
| 2 | 1/16 | 0 | 0 | 1/16 |
| | 9/16 | 3/8 | 1/16 | |

X 在 Y=1 条件下的条件分布律：

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X\mid Y=1)$ | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ |

其中 $P_1 = P(X=0\mid Y=1) = \dfrac{P(X=0, Y=1)}{P(Y=1)} = \dfrac{1/4}{3/8} = \dfrac{2}{3}$

$P_2 = P(X=1\mid Y=1) = \dfrac{1/8}{3/8} = \dfrac{1}{3}$ ，$P_3 = 0$

1. 二维离散型R.V.的分布（联合、边缘，条件分布，独立性）

例 将两封信随机地往编号为1, 2, 3, 4的4个邮筒内投，X，Y分别表示第1, 2个邮筒内信的数目，(1)写出(X, Y)的联合概率分布；(2) 求X, Y的边缘分布律；(3) 求X在Y=1条件下的条件分布律；(4) 问X与Y独立吗？

[分析]：① 联合分布律求法："先求取值，再求概率" ② 边缘："行行相加，列列相加" ③ 条件分布律：用条件概率公式；④ 离散R.V.独立性：每行成比例.



解：(3)

| X \ Y | 0 | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1/4 | 1/4 | 1/16 | 9/16 |
| 1 | 1/4 | 1/8 | 0 | 3/8 |
| 2 | 1/16 | 0 | 0 | 1/16 |
| | 9/16 | 3/8 | 1/16 | |

X在Y=1条件下的条件分布律：

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X\|Y=1)$ | 2/3 | 1/3 | 0 |

其中 $p_1=P(X=0|Y=1)=\dfrac{P(X=0,Y=1)}{P(Y=1)}=\dfrac{1/4}{3/8}=\dfrac{2}{3}$

$p_2=P(X=1|Y=1)=\dfrac{1/8}{3/8}=\dfrac{1}{3}$，$p_3=0$

1. 二维离散型R.V.的分布（联合、边缘，条件分布，独立性）

例 将两封信随机地往编号为1,2,3,4的4个邮筒内投，X，Y分别表示第1,2个邮筒内信的数目，(1)写出(X,Y)的联合概率分布；(2)求X,Y的边缘分布律；(3)求X在Y=1条件下的条件分布律；(4)问X与Y独立吗？

[分析]：① 联合分布律求法："先求取值，再求概率" ② 边缘："行行相加，列列相加"
③ 条件分布律：用条件概率公式；④ 离散R.V.独立性：每行成比例.



解：(4)

| X \ Y | 0 | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1/4 | 1/4 | 1/16 | 9/16 |
| 1 | 1/4 | 1/8 | 0 | 3/8 |
| 2 | 1/16 | 0 | 0 | 1/16 |
| | 9/16 | 3/8 | 1/16 | |

独立性：法1：秒杀：$\begin{pmatrix} \frac14 & \frac14 & \frac1{16} \\ \frac14 & \frac18 & 0 \\ \frac1{16} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 不成比例 $\Rightarrow$ X与Y不独立.

法2：因 $P(X=2,Y=2) \neq P(X=2)\cdot P(Y=2)$，则

## 2. 二维连续型R.V.相关计算（联合、边缘、条件密度，独立性）

**例.** 设$(X,Y)$的联合密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases} kx, & 0\le x\le y\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，(1) 求$k$；

(2) 求$P\{X+Y\le 1\}$；(3) 求边缘密度$f_X(x)$，$f_Y(y)$；(4) 求$f_{Y|X}(y|x)$；(5) $X$与$Y$独立吗？

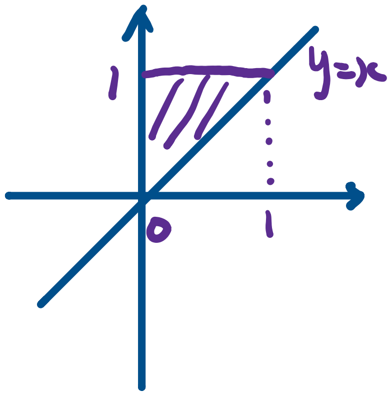
[分析]：① 已知$f(x,y)$，反求参数 —— 用规范性；② $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$

③ 边缘密度：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$；④ $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

⑤ 独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

解：(1) 由规范性：$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$

$$\Rightarrow 1=\iint\limits_D kx\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_x^1 kx\,dx=k\int_0^1 x(1-x)\,dx=\frac{1}{6}k$$




表示D $\xrightarrow{先x后y}$ $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ x\le y\le 1 \end{cases}$

$\therefore \frac{1}{6}k=1 \Rightarrow k=6$

## 2. 二维连续型R.V.相关计算（联合、边缘、条件密度，独立性）

**例.** 设$(X,Y)$的联合密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases} 6x, & 0\le x\le y\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，(1) 求$k$；

(2) 求$P\{X+Y\le 1\}$；(3) 求边缘密度$f_X(x)$，$f_Y(y)$；(4) 求$f_{Y|X}(y|x)$；(5) $X$与$Y$独立吗？

[分析]：① 已知$f(x,y)$，反求参数 —— 用规范性；② $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$

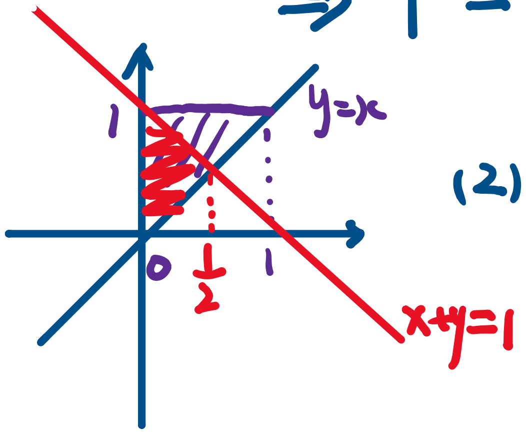
③ 边缘密度：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$；④ $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

⑤ 独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$



解：(1) 由规范性：$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$

$$\Rightarrow 1=\iint\limits_D kx\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_x^1 kx\,dx=k\int_0^1 x(1-x)\,dx=\frac{1}{6}k\Rightarrow k=6$$




(2) $$P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{(x+y\le 1)\cap D} 6x\,dx\,dy=\int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_x^{1-x} 6x\,dy=6\int_0^{\frac{1}{2}} x(1-2x)\,dx=\frac{1}{4}$$

2. 二维连续型 R.V. 相关计算（联合、边缘，条件密度，独立性）

例. 设 $(X,Y)$ 的联合密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，(1) 求 k；

(2) 求 $P\{X+Y\le 1\}$；(3) 求边缘密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；(4) 求 $f_{Y|X}(y|x)$；(5) X 与 Y 独立吗？

③ 边缘密度：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$；④ $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

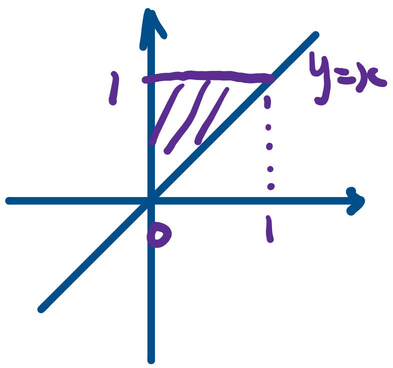
⑤ 独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

解.

(3). ① $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$　x: 自变量

$=\begin{cases}\int_x^1 6x\,dy, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$




② $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$　y: 自

$=\begin{cases}\int_0^y 6x\,dx, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$=\begin{cases}3y^2, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

2. 二维连续型 R.V. 相关计算（联合、边缘，条件密度，独立性）

例. 设 $(X,Y)$ 的联合密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，(1) 求 $k$；

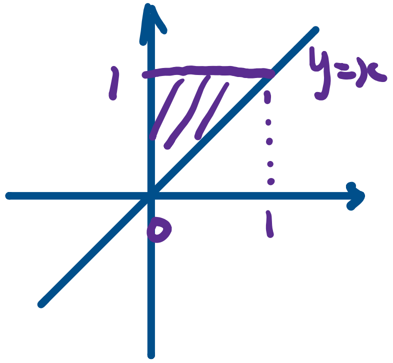
(2) 求 $P\{X+Y\le 1\}$；(3) 求边缘密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；(4) 求 $f_{Y|X}(y|x)$；(5) $X$ 与 $Y$ 独立吗？

④ $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$　　⑤ 独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$



解.

(3) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$




(4) 条件密度：1° 固定 $X=x$，当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=6x(1-x)\neq 0$

2° $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{f(x,y)}{6x(1-x)}=\begin{cases}\dfrac{6x}{6x(1-x)}\\ 0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1\\ 0, & 其他.\end{cases}$

2. 二维连续型 R.V. 相关计算（联合、边缘，条件密度，独立性）

例. 设 $(X,Y)$ 的联合密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases} 6x, & 0\le x\le y\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，(1) 求 k；

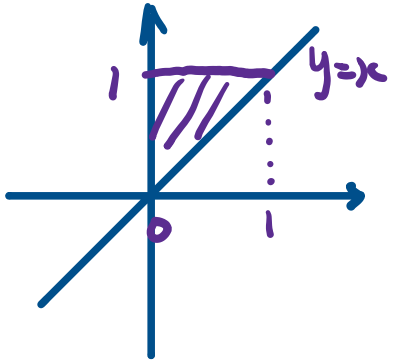
(2) 求 $P\{X+Y\le 1\}$；(3) 求边缘密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；(4) 求 $f_{Y|X}(y|x)$；(5) X与Y独立吗？

④ $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$　　⑤ 独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

解.



(3) $f_X(x)=\begin{cases} 6x(1-x), & 0<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$；　$f_Y(y)=\begin{cases} 3y^2, & 0<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$




(5) 由于 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，则 X与Y不独立.

3. 两个离散型R.V.函数的分布.

例. 设$(X,Y)$的概率分布为:

| $X \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/4 | 1/4 | 1/8 |
| 2 | 1/8 | 0 | 1/4 |

,求 $Z=X+Y$ 的分布律.

[分析]: 求函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布律: "先求取值,再求概率"

解: $Z=X+Y$ 的可能值: 2, 3, 4, 5



其中: $P(Z=2)=P(X+Y=2)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{4}$

$P(Z=3)=P(X+Y=3)=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

$P(Z=4)=P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=2)=\frac{1}{8}+0=\frac{1}{8}$

$P(Z=5)=\frac{1}{4}$ ,综上:

| $Z$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| | 1/4 | 3/8 | 1/8 | 1/4 |

# 4. 两个连续型R.V.函数的分布

例. 设(X,Y)的密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & 0<x<1,\ y>0\\ 0, & 其他.\end{cases}$，求 $Z=X-Y$ 的密度 $f_Z(z)$

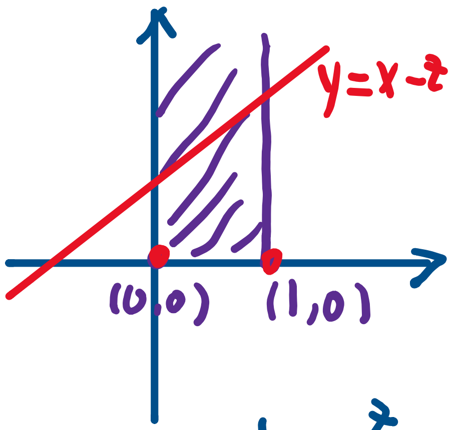
[分析]：已知(X,Y)的 $f(x,y)$，求函数 $Z=g(X,Y)$ 的 $f_Z(z)$ ——分布函数法.

第1°步：先找自变量 $z$ 的分段点（由 $f(x,y)$ 的非0区域的边角点 $(x_i,y_i)$ 代入 $z=g(x,y)$）



第2°步：分区间：$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\iint\limits_{区域} f(x,y)\,dx\,dy$；第3°步：求导：$f_Z(z)=F_Z'(z)$

解：1° $z$ 的分段点：$z=x-y=0,1$




2° 当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X-Y\le z\}$

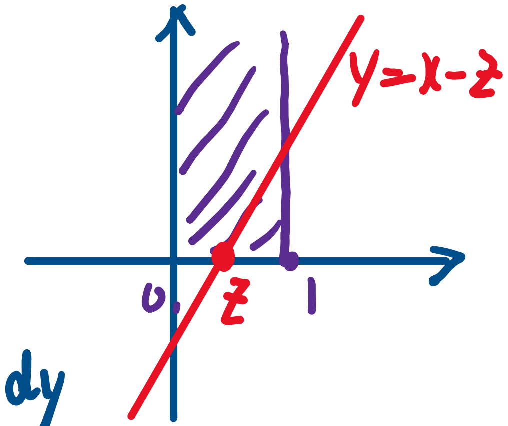
$$=\iint\limits_{(x-y\le z)\cap D}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{x-z}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\,dy=2(1-e^{-\frac{1}{2}})e^{\frac{z}{2}}$$

框框老师课堂

# 4. 两个连续型R.V.函数的分布

例. 设$(X,Y)$的密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & 0<x<1,\ y>0\\ 0, & 其他.\end{cases}$，求 $Z=X-Y$ 的密度 $f_Z(z)$

第2°步：分区间：$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\iint\limits_{区域} f(x,y)\,dx\,dy$；第3°步：求导：$f_Z(z)=F_Z'(z)$




解：1° $z$ 的分段点：$z=x-y=0,1$

2° ① 当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=2(1-e^{-\frac{1}{2}})e^{\frac{z}{2}}$

② 当 $0\le z<1$ 时，$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X-Y\le z\}=\iint\limits_{(x-y\le z)\cap D}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\,dx\,dy$

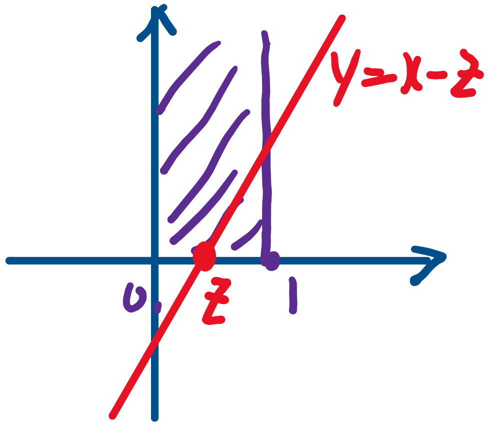
$=\iint\limits_{D}-\iint\limits_{\Delta}=1-\int_z^1 dx\int_0^{x-z}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy=z+2-2e^{\frac{z-1}{2}}$

③ 当 $z\ge1$ 时，$F_Z(z)=P\{X-Y\le z\}=1$

# 4. 两个连续型R.V.函数的分布

例. 设$(X,Y)$的密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & 0<x<1,\ y>0\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，求 $Z=X-Y$ 的密度 $f_Z(z)$

第2°步: 分区间: $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\iint\limits_{区域} f(x,y)\,dx\,dy$ ; 第3°步: 求导: $f_Z(z)=F_Z'(z)$




解: 1° $z$的分段点: $z=x-y=0,1$

2° ① 当 $z<0$ 时, $F_Z(z)=2(1-e^{-\frac{1}{2}})e^{\frac{z}{2}}$

② 当 $0\le z<1$ 时, $F_Z(z)=z+2-2e^{\frac{z-1}{2}}$

③ 当 $z\ge 1$ 时, $F_Z(z)=P\{X-Y\le z\}=1$



综上: $F_Z(z)=\begin{cases}2(1-e^{-\frac{1}{2}})e^{\frac{z}{2}}, & z<0\\ z+2-2e^{\frac{z-1}{2}}, & 0\le z<1\\ 1, & z\ge 1\end{cases}$

3°. $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}(1-e^{-\frac{1}{2}})e^{\frac{z}{2}}, & z<0\\ 1-e^{\frac{z-1}{2}}, & 0\le z<1\\ 0, & z\ge 1\end{cases}$

# 第六讲　随机变量的数字特征（4种题型）

# 1. 常见分布的数字特征(期望、方差)

例. 设 R.V. $X_1, X_2, X_3$ 相互独立，其中 $X_1 \sim U(0,6)$，$X_2 \sim N(0,4)$，$X_3 \sim P(3)$，

则 $D(X_1-2X_2+3X_3)=$ ______.

[分析]：① 若 X 与 Y 独立：$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$；② $D(cX)=c^2D(X)$

③ 常见 6 个分布的期望与方差：



| 分布名 | (0-1)分布 | $B(n,p)$ 二项分布 | $P(\lambda)$：泊松分布 | $U(a,b)$：均匀分布 | $e(\lambda)$：指数分布 | $N(\mu,\sigma^2)$ 正态分布 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E(X)$ | $p$ | $np$ | $\lambda$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\mu$ |
| $D(X)$ | $p\cdot(1-p)$ | $np(1-p)$ | $\lambda$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | $\sigma^2$ |

解：① $X_1 \sim U(0,6) \Rightarrow D(X_1)=\frac{(6-0)^2}{12}=3$；$X_2 \sim N(0,4) \Rightarrow D(X_2)=4$；$X_3 \sim P(3) \Rightarrow D(X_3)=3$

② $D(X_1-2X_2+3X_3) \xlongequal{独立} D(X_1)+D(-2X_2)+D(3X_3)=D(X_1)+4D(X_2)+9D(X_3)=46$

例. 设 $X$ 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数，每次命中目标的概率为 0.4，求 $E(X^2)$

[分析]：① 出现："n 重试验"，"独立"，"每次只有两种结果 $A$ 与 $\bar{A}$" $\xRightarrow[\text{分布}]{\text{二项}} B(n,p)$

② 由 $D(X)=E(X^2)-E^2(X) \Rightarrow E(X^2)=D(X)+E^2(X)$

解：由题意：$X \sim B(n,p)=B(10,0.4)$

$\therefore E(X)=np=10\times0.4=4$ ；$D(X)=np(1-p)=10\times0.4\times0.6=2.4$

则：$E(X^2)=D(X)+E^2(X)=2.4+4^2=18.4$

## 2. 离散型R.V.的协方差、相关系数.

例. 已知离散型变量 X、Y，XY 的分布律如下，求 (1) $Cov(X-Y,Y)$；(2) $\rho_{XY}$

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

| Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

| XY | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| | $\frac{7}{12}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{12}$ |

④ $Cov(X+Y,Z)=Cov(X,Z)+\underline{Cov(Y,Z)}$

[分析]：① $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$ ② $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$ ③ $Cov(Y,Y)=D(Y)$



解：(1) $Cov(X-Y,Y)=Cov(X,Y)-\underbrace{Cov(Y,Y)}_{D(Y)}=\underbrace{E(XY)}_{\frac{2}{3}}-\underbrace{E(X)E(Y)}_{\frac{2}{3}\times 1}-\underbrace{D(Y)}_{\frac{2}{3}}=-\frac{2}{3}$

其中：$E(XY)\xrightarrow[\text{再求和}]{\text{取值乘概率}}0\times\frac{7}{12}+1\times\frac{1}{3}+2\times 0+4\times\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$

$E(X)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

$E(Y)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}=1$，$E(Y^2)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}\Rightarrow D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{2}{3}$

## 2. 离散型R.V.的协方差、相关系数.

例. 已知离散型变量 X、Y，XY 的分布律如下，求 (1) $Cov(X-Y,Y)$；(2) $\rho_{XY}$

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

| Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

| XY | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| | $\frac{7}{12}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{12}$ |

[分析]：① $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$ ② $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$ ③ $Cov(Y,Y)=D(Y)$ ④ $Cov(X+Y,Z)=Cov(X,Z)+\underline{Cov(Y,Z)}$



解：(1) $Cov(X-Y,Y)=Cov(X,Y)-\underbrace{Cov(Y,Y)}_{D(Y)}=\underbrace{E(XY)}_{\frac{2}{3}}-\underbrace{E(X)E(Y)}_{\frac{2}{3}\times 1}-\underbrace{D(Y)}_{E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}}=-\frac{2}{3}$

(2) $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0 \Rightarrow$ X与Y不相关

3. 连续型R.V.的协方差、相关系数.

例. 设$(X,Y)$的密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{4}x^2y, & 0\le x\le 2, 0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，求$\rho_{XY}$.

【分析】：① $\rho_{XY}=\dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$，② $\rho_{XY}=0 \Leftrightarrow X$与$Y$不相关

解：① $E(XY) \xlongequal[再积分]{取值乘密度} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\cdot f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_D xy\cdot\frac{3}{4}x^2y\,dxdy$

$=\int_0^2 dx\int_0^1 \frac{3}{4}x^3y^2\,dy=1$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_D x\cdot\frac{3}{4}x^2y\,dxdy=\int_0^2 dx\int_0^1\frac{3}{4}x^3y\,dy=\frac{3}{2}$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\,f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_D y\cdot\frac{3}{4}x^2y\,dxdy=\int_0^2 dx\int_0^1\frac{3}{4}x^2y^2\,dy=\frac{2}{3}$

② $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0 \Rightarrow \rho_{XY}=\dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0 \Rightarrow X$与$Y$不相关

4. 切比雪夫不等式估计概率.

例. 已知 R.V. $X$ 的 $E(X)=100$, $D(X)=50$, 则 $P\{80<X<120\}\geq$ ____

[分析]: 切比雪夫不等式: $P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ ("大小不一")

等价切比雪夫不等式: $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ ("小大有一")



解: $P\{80<X<120\}=P\{-20<X-E(X)<20\}$

$\varepsilon=20$ $\qquad \frac{1}{8}$

$=P\{|X-E(X)|<20\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=1-\frac{50}{20^2}=\frac{7}{8}$

"小大有一"

# 第七讲　中心极限定理与数理统计概念（2种题型）

1. 利用中心极限定理求概率.

例. 根据以往经验，某种电子元件的寿命服从均值为100小时的指数分布，$e\left(\frac{1}{100}\right)$

现随机地取16只，设它们的寿命是独立的，求这16只元件的寿命总和

大于1920小时的概率.

[分析]：当出现"n个变量"，"独立"，"同分布"——中心极限定理

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，则 $\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right), D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right)$



解：设 $X_i$ = "第 $i$ 只元件的寿命"，则 $E(X_i) = 100$，$D(X_i) = 100^2$，$i = 1, 2, \cdots 16$

$\xRightarrow{\text{中心定理}} \sum_{i=1}^{16} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(E\left(\sum_{i=1}^{16} X_i\right), D\left(\sum_{i=1}^{16} X_i\right)\right) = N(16\times 100, 16\times 100^2) = N(1600, 16\times 100^2)$

$\Rightarrow P\{\sum X_i > 1920\} = 1 - P\{\sum X_i \leq 1920\} \xlongequal{\text{标准化}} 1 - P\left\{\frac{\sum X_i - 1600}{\sqrt{16\times 100^2}} \leq \frac{1920-1600}{\sqrt{16\times 100^2}}\right\}$

1. 利用中心极限定理求概率.

例. 根据以往经验，某种电子元件的寿命服从均值为100小时的指数分布，$e(\frac{1}{100})$ 现随机地取16只，设它们的寿命是独立的，求这16只元件的寿命总和大于1920小时的概率.

解：设 $X_i$ = "第 $i$ 只元件的寿命"，则 $E(X_i)=100$，$D(X_i)=100^2$，$i=1,2,\cdots 16$

$\xRightarrow{\text{中心定理}} \sum_{i=1}^{16} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(E\left(\sum_{i=1}^{16} X_i\right), D\left(\sum_{i=1}^{16} X_i\right)\right) = N(16\times 100,\ 16\times 100^2) = N(1600,\ 16\times 100^2)$

$\Rightarrow P\{\sum X_i > 1920\} = 1 - P\{\sum X_i \le 1920\} \xlongequal{\text{标准化}} 1 - P\left\{\frac{\sum X_i - 1600}{\sqrt{16\times 100^2}} \le \frac{1920-1600}{\sqrt{16\times 100^2}}\right\}$ $\to 0.8$

$= 1 - \Phi(0.8)$

$\xlongequal{\text{查表}} 1 - 0.7881 = 0.2119$

例. 一个复杂的系统由100个独立的部件组成，每个部件损坏的概率为0.1，求这100个部件中至少有85个正常的概率.

[分析]：当出现"n个变量"，"独立"，"同分布"——中心极限定理

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，则 $\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right), D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right)$



解：设 $X_i$ ="第 $i$ 个部件损坏与否"，则

| $X_i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| | 0.9 | 0.1 |

，$i=1,2,\cdots 100$

$\Rightarrow E(X_i)=p=0.1,\ D(X_i)=p\cdot(1-p)=0.1\times 0.9=0.09.$

$\overset{\text{中心}}{\underset{\text{定理}}{\Rightarrow}} \sum_{i=1}^{100} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right), D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right)\right)=N(100\times 0.1,\ 100\times 0.09)=N(10,9)$

例. 一个复杂的系统由100个独立的部件组成，每个部件损坏的概率为0.1，求这100个部件中至少有85个正常的概率.

解：设 $X_i$ =“第 $i$ 个部件损坏与否”，则

| $X_i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| | 0.9 | 0.1 |

，$i=1,2,\cdots,100$

$\Rightarrow E(X_i)=p=0.1$，$D(X_i)=p\cdot(1-p)=0.1\times0.9=0.09$.

$\overset{\text{中心定理}}{\Rightarrow}\sum_{i=1}^{100}X_i\overset{\text{近似}}{\sim}N\left(E\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\right),D\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\right)\right)=N(100\times0.1,100\times0.09)=N(10,9)$

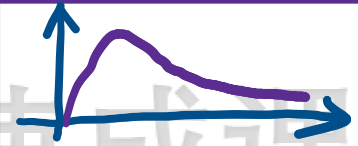
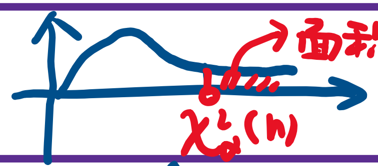
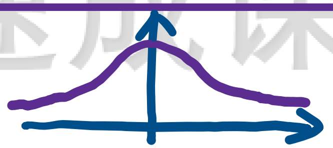
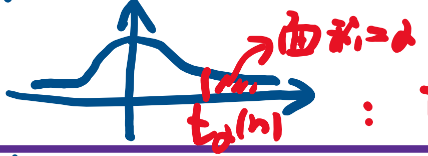
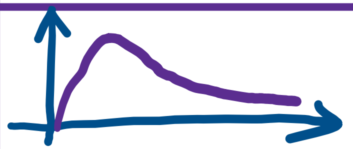
由题意：$P\{100\text{个部件中正常个数}\geq85\}\overset{\text{含义}}{=\!=}P\{100\text{个部件中损坏个数}<15\}$ （$\nearrow\sum_{i=1}^{100}X_i$）

$=P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i<15\right\}\overset{\text{标准化}}{=\!=}P\left\{\frac{\sum X_i-10}{\sqrt{9}}<\frac{15-10}{\sqrt{9}}\right\}=\Phi\left(\frac{5}{3}\right)=0.9529$

2. 数理统计中的"三大分布".（$\chi^2$分布，t分布，F分布）

例. 设 $X\sim t(n)$，证明：$X^2\sim F(1,n)$.

[分析]：关于"三大分布"：

| 分布名 | 分布的典型形式 | 密度图形 | 上α分位点 |
|---|---|---|---|
| $\chi^2$分布 | $X=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$，$X_i\sim N(0,1)$，独立，$X\sim\chi^2(n)$ |  |   : $\chi^2_\alpha(n)$ |
| t分布 | $X=\dfrac{X_1}{\sqrt{X_2/n}}$，其中$X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim\chi^2(n)$，独立，$X\sim t(n)$ |  |   : $t_\alpha(n)$ |
| F分布 | $X=\dfrac{X_1/n_1}{X_2/n_2}\sim F(n_1,n_2)$，其中：$X_1\sim\chi^2(n_1)$，$X_2\sim\chi^2(n_2)$，独立 |  |   : $F_\alpha(n_1,n_2)$ |



证明：由 $X\sim t(n)$ $\xRightarrow{\text{分解}}$ $X=\dfrac{X_1}{\sqrt{X_2/n}}$，其中 $X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim\chi^2(n)$，独立. 则

$$\Rightarrow X^2=\frac{X_1^2}{X_2/n}=\frac{X_1^2/1}{X_2/n}\sim F(1,n)$$，即 $X^2\sim F(1,n)$

例. 设总体 $X \sim N(0,1)$，从中抽取一个容量为4的样本 $X_1, X_2, X_3, X_4$，若 $Y = c(X_1+X_2)^2 + c(X_3+X_4)^2$，且 $Y$ 服从 $\chi^2$ 分布，求 $c$.

解：由题意：$X_i \sim N(0, 1)$　　$i=1, 2, 3, 4$

则：$X_1+X_2 \sim N(0, 2)$，　$X_3+X_4 \sim N(0, 2)$

$$\Rightarrow \frac{(X_1+X_2)-0}{\sqrt{2}} \sim N(0,1), \quad \frac{(X_3+X_4)-0}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$$

$$\therefore \left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{X_3+X_4}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}(X_1+X_2)^2 + \frac{1}{2}(X_3+X_4)^2 \sim \chi^2(2)$$

$$\therefore c = \frac{1}{2}$$

# 第八讲　参数估计
# （3种题型）

# 1. 未知参数的矩估计法与最大似然估计法

例. 设总体 $X \sim f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)\cdot x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，其中 $\theta>-1$ 且未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X$ 的简单样本，(1) 求 $\theta$ 的矩估计量；(2) $\theta$ 的最大似然估计量.

[分析]：(1) 矩估计法：第1°步：先求总体 $X$ 的一阶矩：$E(X)$；第2°步：令 $\bar{X}=E(X)$ 再解得 $\hat{\theta}$ 即为 $\theta$ 的矩估计量.

(思想：n较大时，总体矩=样本矩)



(思想：使得样本 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 发生的概率最大的 $\theta$ 值最恰当)

(2) 最大似然估计法：第1°步：写出样本似然函数：$L(x_1, x_2, \cdots, x_n;\theta)$ $\begin{cases}\text{离散型} & P\{X=x_1\}\cdot P\{X=x_2\}\cdots P\{X=x_n\}\\ \text{连续型} & f(x_1;\theta)\cdot f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)\end{cases}$

第2°步：取对数：$\ln L(\theta)$；第3°步：求驻点：$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}\overset{令}{=}0$ 得驻点 $\hat{\theta}$ 即为 $\theta$ 的最大似然估计.

# 1. 未知参数的矩估计法与最大似然估计法

例. 设总体 $X \sim f(x;\theta) = \begin{cases} (\theta+1)\cdot x^{\theta}, & 0<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，其中 $\theta > -1$ 且未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X$ 的简单样本，(1) 求 $\theta$ 的矩估计量；(2) $\theta$ 的最大似然估计量.

[分析]：(1) 矩估计法：第1步：先求总体X的一阶矩：$E(X)$；第2步：令 $\overline{X} = E(X)$ 再解得 $\hat{\theta}$ 即为 $\theta$ 的矩估计量.

(思想：n较大时，总体矩 = 样本矩)



解：(1) 矩估计：$1^{\circ}$ 先求 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot (\theta+1) x^{\theta}\,dx = (\theta+1)\int_0^1 x^{\theta+1}\,dx = \dfrac{\theta+1}{\theta+2}$

$2^{\circ}$ 令 $\overline{X} = E(X) \Rightarrow \overline{X} = \dfrac{\theta+1}{\theta+2}$ 得：$\hat{\theta} = \dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$ 即为矩估计量.

# 1. 未知参数的矩估计法与最大似然估计法

例. 设总体 $X\sim f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)\cdot x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，其中 $\theta>-1$ 且未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X$ 的简单样本，(1) 求 $\theta$ 的矩估计量；(2) $\theta$ 的最大似然估计量.

(思想：使得样本 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 发生的概率最大的 $\theta$ 值最恰当)

(2) 最大似然估计法：第1°步：写出样本似然函数：$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$ $\begin{cases}\underline{\underline{离散型}} & P\{X=x_1\}\cdot P\{X=x_2\}\cdots P\{X=x_n\}\\ \underline{\underline{连续型}} & f(x_1;\theta)\cdot f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)\end{cases}$

第2°步：取对数：$\ln L(\theta)$；第3°步：求驻点：$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}\overset{令}{=}0$ 得驻点 即为 $\theta$ 的最大似然估计.



解：(2). 1° 写样本似然函数：$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)\ \underline{\underline{\overset{密度连乘}{\quad}}}\ f(x_1;\theta)\cdot f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)=(\theta+1)x_1^{\theta}\cdots(\theta+1)x_n^{\theta}$

$=(\theta+1)^n\cdot(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta}$

2° 取对数：$\ln L(\theta)=n\ln(1+\theta)+\theta\cdot\underbrace{\ln(x_1\cdots x_n)}_{=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

1. 未知参数的矩估计法与最大似然估计法

例. 设总体 $X\sim f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)\cdot x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，其中 $\theta>-1$ 且未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单样本，(1) 求 $\theta$ 的矩估计量；(2) $\theta$ 的最大似然估计量.

第2°步：取对数：$\ln L(\theta)$；第3°步：求驻点：$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}\overset{令}{=}0$ 得驻点 $\hat{\theta}$ 即为 $\theta$ 的最大似然估计



解：(2). 1° 写样本似然函数：$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)\xlongequal{密度连乘}f(x_1;\theta)\cdot f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)=(\theta+1)x_1^{\theta}\cdots(\theta+1)x_n^{\theta}$

$=(\theta+1)^n\cdot(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta}$

2° 取对数：$\ln L(\theta)=n\ln(1+\theta)+\theta\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

3°. 求驻点：$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{1+\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\overset{令}{=}0$

解得：$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$ 最大似然估计值；$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$ 最大似然估计量.

2. 估计量的无偏性与有效性.

例. 设 $X_1, X_2$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,1)$ 的样本，$\mu$ 未知，问下面两个估计量 $\hat{\mu}_1=\frac{1}{3}X_1+\frac{2}{3}X_2$，$\hat{\mu}_2=\frac{X_1}{4}+\frac{3X_2}{4}$ 是否无偏？若无偏，哪一个更有效？

[分析]: (1) 无偏性：若 $E(\hat{\theta})=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 为 $\theta$ 的无偏估计.

(2) 有效性：若 $\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$ 均为 $\theta$ 的无偏估计，且 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效.



解: (1) $E(\hat{\mu}_1)=E\left(\frac{X_1}{3}+\frac{2}{3}X_2\right)=\frac{1}{3}E(X_1)+\frac{2}{3}E(X_2)=\frac{1}{3}\mu+\frac{2}{3}\mu=\mu \Rightarrow \hat{\mu}_1$ 为 $\mu$ 的无偏估计.

$E(\hat{\mu}_2)=E\left(\frac{X_1}{4}+\frac{3}{4}X_2\right)=\frac{1}{4}E(X_1)+\frac{3}{4}E(X_2)=\frac{1}{4}\mu+\frac{3}{4}\mu=\mu \Rightarrow \hat{\mu}_2$ 为 $\mu$ 的无偏估计.

(2) $D(\hat{\mu}_1)=D\left(\frac{X_1}{3}+\frac{2}{3}X_2\right)=D\left(\frac{X_1}{3}\right)+D\left(\frac{2}{3}X_2\right)=\frac{1}{9}D(X_1)+\frac{4}{9}D(X_2)=\frac{5}{9}$

$D(\hat{\mu}_2)=D\left(\frac{X_1}{4}+\frac{3}{4}X_2\right)=D\left(\frac{X_1}{4}\right)+D\left(\frac{3}{4}X_2\right)=\frac{1}{16}D(X_1)+\frac{9}{16}D(X_2)=\frac{10}{16}$

$\Rightarrow D(\hat{\mu}_1)<D(\hat{\mu}_2)$，则 $\hat{\mu}_1$ 比 $\hat{\mu}_2$ 有效.

3. 未知参数的区间估计.

例：某工厂生产一批产品，其直径 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现从中随机抽取 6 件产品，得 $\bar{x}=14.95$，$s=0.226$，若置信度为 $1-\alpha=95\%$，(1) 求 $\mu$ 的置信区间；(2) 求 $\sigma^2$ 的置信区间.

[分析]：关于 $\mu$ 与 $\sigma^2$ 的区间估计：① $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$；② $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$



(1) 求 $\mu$ 的区间估计：
① 若方差 $\sigma^2$ 已知，则 $1-\alpha$ 水平下的置信区间：$\left(\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$
② 若方差 $\sigma^2$ 未知，则 $1-\alpha$ 水平下的置信区间：$\left(\bar{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$

(2) 求 $\sigma^2$ 的区间估计：$\mu$ 未知时，$1-\alpha$ 水平下 $\sigma^2$ 的置信区间 $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

## 3. 未知参数的区间估计.

例：某工厂生产一批产品，其直径 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，现从中随机抽取 6 件产品，得 $\bar{x} = 14.95$，$s = 0.226$，若置信度为 $1-\alpha = 95\%$，(1) 求 $\mu$ 的置信区间；

(2) 求 $\sigma^2$ 的置信区间.

[分析]：关于 $\mu$ 与 $\sigma^2$ 的区间估计：① $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$；② $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$



(1) 求 $\mu$ 的区间估计：

① 若方差 $\sigma^2$ 已知，则 $1-\alpha$ 水平下的置信区间：$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

② 若方差 $\sigma^2$ 未知，则 $1-\alpha$ 水平下的置信区间：$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$

解：(1) $\sigma^2$ 未知，则 $\mu$ 置信区间：$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = \left(14.95 \pm \frac{0.226}{\sqrt{6}} t_{0.025}(5)\right)$ $\rightarrow 2.57$

$= (14.71, 15.87)$

3. 未知参数的区间估计.

例：某工厂生产一批产品，其直径 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，现从中随机抽取 6 件产品，得 $\bar{x} = 14.95$，$s = 0.226$，若置信度为 $1-\alpha = 95\%$，(1) 求 $\mu$ 的置信区间；(2) 求 $\sigma^2$ 的置信区间.

[分析]：关于 $\mu$ 与 $\sigma^2$ 的区间估计：



(2) 求 $\sigma^2$ 的区间估计：$\mu$ 未知时，$1-\alpha$ 水平下 $\sigma^2$ 的置信区间 $\left( \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right)$

解：(2) $\mu$ 未知，$\sigma^2$ 的置信区间：$\left( \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right) = \left( \frac{5 \times 0.226^2}{\chi^2_{0.025}(5)}, \frac{5 \times 0.226^2}{\chi^2_{0.975}(5)} \right)$

$= (0.019, 0.307)$

# 第九讲　假设检验
# （2种题型）

1. 正态总体下均值$\mu$的假设检验（U检验，T检验）

例. 某车间用一台机器包装食盐，在正常情况下，每袋食盐质量$X \sim N(500, 15^2)$，某日开工后，为了检验包装机器是否正常，抽取$n=9$袋盐，$\bar{x}=511.22g$，问机器是否正常呢？

[分析]：正态总体下均值$\mu$的检验：



第1步：提出假设：$H_0: \mu=\mu_0$，$H_1: \mu \neq \mu_0$；

第2步：选检验统计量
① 当$\sigma^2$已知，选 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ （U检验）
② 当$\sigma^2$未知，选 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ （T检验）

第3步：得拒绝域：① $W=(-\infty, -u_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty)$ ② $W=(-\infty, -t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)) \cup (t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), +\infty)$

第4步：作出检验：代入$\bar{x}$，$s$得统计量的值，若该值$\in W$，则拒绝$H_0$.

# 1. 正态总体下均值$\mu$的假设检验（U检验，T检验）

例. 某车间用一台机器包装食盐，在正常情况下，每袋食盐质量 $X \sim N(500, 15^2)$，某日开工后，为了检验包装机器是否正常，抽取 $n=9$ 袋盐，$\bar{x}=511.22g$，问机器是否正常呢？（$\alpha=5\%$）

解：1°. 提出假设：$H_0: \mu=\mu_0=500$（机器正常）； $H_1: \mu \neq \mu_0$



2°. 选统计量：$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

3°. 得拒绝域：$W=(-\infty, -\underbrace{u_{\frac{\alpha}{2}}}_{-1.96}) \cup (\underbrace{u_{\frac{\alpha}{2}}}_{1.96}, +\infty) = (-\infty, -1.96) \cup (1.96, +\infty)$

4° 作出判断：把样本均值 $\bar{x}=511.22$ 代入 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{511.22-500}{15/3} = 2.244 \in W$

$\Rightarrow$ 拒绝$H_0$，机器不正常.

## 2. 正态总体下方差 $\sigma^2$ 的检验（$\chi^2$ 检验）

例. 某厂生产的袋装饮料要求方差 $\sigma_0^2=0.0004$，抽取 $n=20$ 袋饮料，得 $S=0.03$，设袋装量服从正态分布，问：在 $\alpha=0.05$ 下，能否认为饮料达到要求.

解：1°. 提出假设：$H_0: \sigma^2=\sigma_0^2=0.0004$，$H_1: \sigma^2\neq\sigma_0^2$

2°. 选统计量：$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$　（$\chi^2$ 检验法）



3°. 得拒绝域：$W=(0,\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1))\cup(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty)$

$=(0,\chi^2_{0.975}(19))\cup(\chi^2_{0.025}(19),+\infty)=(0,8.907)\cup(32.852,+\infty)$

4°. 作出判断：代入样本标准差 $S=0.03$，得 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{19\times0.03^2}{0.0004}=42.75\in W$

则拒绝 $H_0$，没有达到要求.

祝同学们考试成功，学业有成！

框框老师.