南京航空航天大学

第1页（共6页）

2020～2021 学年 第1学期《高等数学[redacted](1)》期末考试试题

考试日期：2021 年3月20日　　试卷类型：A　　试卷代号：080036

班号　　学号[redacted]　　姓名[redacted]

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

本题分数	24
得　分	

一、填空（每空格 3 分）

1. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x=\int_0^{y-x}e^{t^2}dt$ 确定，则 $y'(0)=$________。

2. 曲线弧 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt$ 的全长为________。

3. 半球面 $z=2+\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}$ 所围成的闭曲面在 xoy 面上投影部分的面积为________。

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^4+i^4}=$________。

5. 已知三点 $A(1,1,1)$、$B(2,2,1)$、$C(2,1,2)$，则 ΔABC 底边 AC 上高为________。

6. 设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，求 $\int_0^1 xf''(2x)dx=$________。

7. 已知 $f(x)$ 有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right]=2$，则 $f(0)=$________，$f'(0)=$________。

本题分数	9
得　分	

二、选择题（每题 3 分）

1. 当 $n\to\infty$ 时，$e^2-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ 与 $\frac{a}{n}(a\neq 0)$ 是等价无穷小，则 $a=$（　）

A. 1　　B. 2　　C. e　　D. e^2

D. $f_+(0)\ldots$

3. 下列反常积分收敛的是（　　）

A. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}$

B. $\int_0^1\frac{dx}{\ln(1+x)}$

C. $\int_{-1}^1\frac{dx}{\sin x}$

D. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

本题分数	6
得　分	

三． 设 $F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)dt$， $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内可导，且 $f(0)=0$， $f'(0)=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^4}$.

本题分数	25
得　分	

四．计算题（每题5分）

1. $\int \arctan\sqrt{x}\,dx$

2. $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

3. $\int \frac{x+1}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx$

4. $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx$

解：$\int_0^2 x\sqrt{\ }$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin x+\cos x}$

本题分数	
得　分	

本题分数	8
得　分	

五．已知一直线通过椭球面$(x-2)^2+2(y-1)^2+3(z-3)^2=9$的中心，且与$L:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$垂直相交，求该直线的方程。

本题分数	8
得　分	

六．已知曲线 $y=ax^2+2x\left(a>0\right)$，若 $y=ax^2+2x\left(a>0\right)$ 与 $x=1$ 及 $y=0$ 所围图形面积为 2，求上述图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积 V。

解

本题分数	10
得　分	

七．求函数 $f\left(x\right)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}\left|\cos t\right|dt$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上的最小值与最大值。

本题分数	10
得　分	

八．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ $(a<b)$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xf(x)dx=0$.

证明：(1)存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^{\xi} f(t)dt=0$；

(2)至少存在不同的 $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$。

二. 1. $x=\int_1^{x+y} e^{t^2}dt$， $e^{(x+y)^2}\cdot(1+y')-1=0$. $y(0)=1$

$e(1+y')-1=0$, $y'(0)=\frac{1}{e}-1$

半球面以 $(0,2)$ 为球心，取上半球.

$x^2+y^2+(z-2)^2=4$ ， $z\geq 2$

$\begin{cases} z=2+\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$ $2+\sqrt{4-r^2}=\sqrt{3r^2}$

可得 $r^2=3$

即投影部分为：$x^2+y^2=3$

$S=3\pi$

5. $\frac{1}{2}AC\cdot AB\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot h$

$h=AB\cdot\sin A$

$AB=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$AC=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$BC=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\therefore\triangle ABC$ 为等边三角形

$\therefore h=$ 边长 $\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

6. 2

7. $-1, 2$

三. 1. D

3. A

三. 令 $x^2-t^2=u$.

$$F(x)=\int_{x^2}^{0}\sqrt{x^2-u}\cdot f(u)\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x^2-u}}\cdot du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\,du.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x^2)\cdot2x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{f(x^2)}{4x^2}=\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0}=\frac{1}{4}.$$

四 1. 令 $\sqrt{x}=t$.

原式 $=\int \arctan t \, dt^2$

$$= t^2 \cdot \arctan t - \int t^2 \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= t^2 \cdot \arctan t - t + \arctan t + C$$

$$= x\arctan\sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$$

2. 令 $\sqrt{e^x-1}=t$

$$x=\ln(1+t^2)$$

$$I=\int \frac{\ln(1+t^2)\cdot(1+t^2)}{t} \cdot \frac{2t}{1+t^2} dt$$

$$= 2\int \ln(1+t^2)\, dt$$

$$= 2\left[t\cdot\ln(1+t^2) - \int t \cdot \frac{2t}{1+t^2} dt\right] = 2t\ln(1+t^2) - 4t + 4\arctan t + C$$

$$= 2x\sqrt{e^x-1} - 4\sqrt{e^x-1} + 4\arctan\sqrt{e^x-1} + C$$

3、$I=\int\frac{x+1}{\sqrt{4-4(x-\frac{1}{2})^2}}dx$

$=\int\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{4-4(x-\frac{1}{2})^2}}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4-4(x-\frac{1}{2})^2}}dx$

$=-\frac{1}{4}\sqrt{4-4(x-\frac{1}{2})^2}+\frac{3}{4}\arcsin(x-\frac{1}{2})+C$

$=\frac{3}{4}\arcsin(x-\frac{1}{2})-\frac{\sqrt{3+4x-4x^2}}{4}+C$

4. $I=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$

令 $x=1+\sin t$，$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cdot\cos t\cdot\cos t\,dt$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$

$=2\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

5、令 $x=\frac{\pi}{2}-t$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt.$

$=\frac{1}{2}\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,dx}{\sin x+\cos x}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t\,dt}{\sin t+\cos t}\right)$

$=\frac{\pi}{4}$

五. L的方向向量为 (3, 2, −1)

$$\cancel{\begin{cases} \vec{l}\cdot(3,2,-1)=0 \\ 3x_0+2y_0-z_0=0 \\ \frac{x-2}{x_0}=\frac{y-1}{y_0}=\frac{z-3}{z_0} \end{cases}}$$

过中心与L垂直的平面方程为

$$\begin{cases} 3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0 \\ \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1} \end{cases}$$

交点: $x=2$, $y=3$, $z=-1$

由两点式 $\cancel{\frac{x-2}{3}}$ 过 $P(2,3,-1)$ $Q(2,1,3)$ $\vec{PQ}=(0,-2,4)$

$x=2$, $\frac{y-3}{1-3}=\frac{z+1}{3+1}$ $\quad \frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{4}$ $\quad \begin{cases} x=2 \\ 2y+z-5=0 \end{cases}$

八(1)

六、

由题意，$\int_0^1 ax^2+2x = 2$

$$\frac{a}{3}+1=2$$

$$a=3$$

$$V=2\pi\int_0^1 x\cdot(3x^2+2x)\,dx$$

$$=2\pi\cdot\left[\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=2\pi\times\frac{17}{12}$$

$$=\frac{17}{6}\pi$$

七. $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时,

$f(x)=\int_x^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt$

$=2-\sin x-\cos x$

$x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$ 时,

$f(x)=-\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt$.

$=\sin x-\cos x$

$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时, $f'(x)=\sin x-\cos x$

$x=\frac{\pi}{4}$ 为极~~大~~小值点.

$x\in(\frac{\pi}{2},\pi]$ 时, $f'(x)=\cos x+\sin x$

$x=\frac{3}{4}\pi$ 为极大值点.

$f(0)=1$

$f(\frac{\pi}{4})=2-\sqrt{2}$

$f(\frac{\pi}{2})=1$

$f(\frac{3\pi}{4})=\sqrt{2}$

$f(\pi)=1$

$\therefore$ 最小值为 $2-\sqrt{2}$

最大值为 $\sqrt{2}$.

八(1) 令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

$P(x)=\int_a^x F(t)dt$

$\because F(a)=0$

$F(b)=\int_a^b f(t)dt=0$

$\therefore F(a)=F(b)=0$

又 $\because \int_a^b x f(x)dx=\int_a^b x\,dF(x)$

4) $=xF(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)dx$

2

-3-5=0 $=bF(b)-aF(a)-[P(b)-P(a)]$

$= P(a) - P(b) = 0$

$\therefore P(a) = P(b)$

由罗尔定理，$\exists \xi \in (a,b)$.

$P'(\xi) = 0$

$F'(\xi) = 0$

即 $\int_a^{\xi} f(t)dt = 0$.

(2) $\because F(a) = F(b) = F(c) = 0$

$\therefore$ 由罗尔定理

$\exists\ \xi_1, \xi_2$ 使得 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$

即 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$