南京航空航天大学

二〇二一～二〇二二学年 第一学期《概率论与数理统计 II》考试试题

考试日期：2021年12月26日　　试卷类型：A　　试卷代号：080033

班号　　学号　　姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

本题分数	21
得　分	

一、填空题（每题 3 分）

1. $P(A)=0.7, P(\overline{A}\cup\overline{B})=0.6$，则 $P(A\text{-}B)=$ ________.

2. 某元件寿命(单位：h)的密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1000}{x^2}, x\le 1000\\ 0, x>1000\end{cases}$，装有 5 个这种独立工作元件的设备在使用前 1500h 内恰有两个元件需要更换的概率为________.

3. 设随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu,\mu,\sigma_1^2,\sigma_2^2,0)$，若 $E(|X-Y|)=2$，则 $D(|X-Y|)=$ ________.

4. 已知随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，Y 服从指数分布，X,Y 的相关系数为 0.5，若 $E(2X-Y+1)=1$，则 $D(2X-Y+1)=$ __________.

5. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是取自正态总体 $N(0,4)$ 的简单随机样本，设 $Y=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$，$\overline{X},S^2$ 分别为样本均值和样本方差，若 Y 服从方差为 4 的 χ^2 分布，则 $D(a\overline{X}-bS^2)=$ __________.

6. 设总体 X 的分布律为：$P\{X=0\}=\theta, P\{X=1\}=2\theta, P\{X=2\}=1\text{-}3\theta$，其中 θ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，对于假设检验问题，$H_0:\theta=1/4$，$H_1:\theta=1/6$，若拒绝域为 $C=\{X_1=0,X_2=1,X_3=2\}$，则该检验犯第二类错误的概率 $\beta=$ __________.

7. 设总体 X 服从 $[0,\theta]$ 上的均匀分布，X_1,X_2,X_3 为来自总体的简单随机样本，若 $\hat{\theta}=k\max\limits_{1\le i\le 3}\{X_i\}$ 为 θ 的无偏估计量，则 $k=$ ________.

本题分数	9
得　分	

二．选择题(每题 3 分)

1. 设 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1, P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，则下列结论中肯定正确的是(　　)

(A) A,B 互不相容 (B) A,B 相互独立 (C) A,B 互为对立事件 (D) A,B 不独立

2.设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，检验 $H_0: \mu=\mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$，则(　　)

(A)若在 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，则在 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0

(B)若在 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，则在 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0

(C)若在 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，则在 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0

(D)若在 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，则在 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0

3. 设 X 是随机变量，$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2>0$，则对任意常数 C 有(　　)

(A) $E[(X-C)^2]=E(X^2)-C^2$　　(B) $E[(X-C)^2]=E[(X-\mu)^2]$

(C) $E[(X-C)^2]<E[(X-\mu)^2]$　　(D) $E[(X-C)^2]\geq E[(X-\mu)^2]$

本题分数	30
得　分	

三．计算题(每题 6 分)

1.甲袋中有 4 只白球，3 只红球，乙袋中有 2 只白球，6 只红球。今从甲袋中任取一球放入乙袋中，再从乙袋中任取一球，发现是白球，求从甲袋中取出的球是白球的概率。

2.设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}kxy,0<x<1,0<y<1-x\\0,其它\end{cases}$，

求k的值及$Z=X+Y$的概率密度。

3.某人进行独立射击，命中目标的概率为$1/4$，如果击中目标一次就停止射击，以X表示所需的射击次数，求X的分布律及其方差$D(X)$。

4. 设X_1,X_2,X_3为来自总体$N(1,1)$的样本，$\overline{X}$为样本均值，随机变量Y服从期望为2的指数分布，Z服从区间(-5,5)上的均匀分布，且Y、Z相互独立，求$P\{\max(Y,Z)>D(\sum_{i=1}^{3}(X_i-\overline{X})^2)\}$。

5. 某单位设一台电话总机，共200架分机，每个分机是否使用外线相互独立，每时刻各分机有5%的概率要使用外线，问总机至少需要装多少条外线才能以不低于90%的概率保证每个分机要使用外线时可供使用？

本题分数	10
得　分	

四、设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}k(1-\dfrac{1}{x^2}),1\le x<2\\0,其他\end{cases};$$

(1)求 k 的值(2)求 X 的分布函数 $F(x)$;(2)求 $Y=F(X)$ 的概率密度。

本题分数	8
得　分	

五．某厂的电动马达消耗电流服从正态分布，要求正常负载条件下平均消耗电流不超过 0.8A，随机抽取 16 台，测得样本均值为 0.92A，样本标准差为 0.32A。

(1)问对于显著性水平$\alpha=0.05$,能否认为这批马达合格？

(2)求总体方差的置信水平为 0.95 的置信区间.（写出具体推导过程）

本题分数	8
得　分	

六．设总体X具有概率密度$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}},x>0\\0,x\le 0\end{cases}$，其中$\theta>0$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自$X$的样本，求$\theta$的矩估计量和最大似然估计量。

本题分数	14
得　分	

七．设随机变量(X,Y)服从区域$x^2 \le y \le x$上的均匀分布。(1)求联合概率密度$f(x,y)$；(2)求Y的边缘概率密度$f_Y(y)$；(3)求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$；(4)X,Y是否相互独立？为什么？(5)通过计算说明X,Y是否不相关？(6)求$P\{X+Y \le 1\}$。

二

1、B　　2、D　　3、D

一、

1、$\underline{0.3}$　　2、$\underline{\dfrac{80}{243}}$

一、

3、 $\sigma_1^2+\sigma_2^2-4$

4. $24-8\sqrt{2}$

5. 0.01957.

6. $\frac{31}{32}$

6题见下一页更正

7. $\frac{4}{5}$

6. $\beta = \{$接受 $H_0 \mid H_1$ 为真$\}$.

更正

$= 1 - P\{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2 \mid \theta = \frac{1}{6}\}$，样本 x_i 独立.

$= 1 - \theta \cdot 2\theta \cdot (1 - 3\theta)$

$= 1 - \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{35}{36}$

三、

1、A—"甲中抽白球放入乙"

B—"乙中抽到白球"

$$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})$$

$$=\frac{3}{9}\times\frac{4}{7}+\frac{2}{9}\times\frac{3}{7}$$

$$=\frac{18}{63}=\frac{2}{7}$$

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{\frac{2}{7}}=\frac{2}{3}$$

2. $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x} kxy\,dy.$

$=\int_0^z \frac{k}{2}x\, y^2\Big|_0^{z-x} dx$

$=\int_0^z \frac{k}{2}x(z-x)^2 dx$

$=\frac{k}{2}\int_0^z x^3-2zx^2+z^2x\,dx$

$=\frac{k}{2}(\frac{1}{4}z^4-\frac{2}{3}z^4+\frac{1}{2}z^4)$

$=\frac{k}{2}\times\frac{1}{12}z^4=\frac{k}{24}z^4$

$\because \int_0^1 dx\int_0^{1-x} kxy\,dy\,dx$

$=\int_0^1 \frac{k}{2}x(1-x)^2 dx$

$=\frac{k}{2}(\int_0^1 x^3-2x^2+x\,dx)$

$=\frac{k}{2}(\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2)=1$

$=\frac{k}{2}\times\frac{1}{12}=1$

$k=24$

$\therefore F_Z(z)=z^4 \quad 0<x+y<1$

$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}4z^3 & 0<z<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

3. $P(X=k) = \frac{3}{4}^{k-1} \cdot \frac{1}{4} \quad k = 1, 2, 3 \cdots$

$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{3}{4}^{k-1} \frac{1}{4} = 4.$

$\cancel{E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{3}{4}^{k-1} \frac{1}{4}} =$

$D(X) = var(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\frac{1}{4}}{(\frac{1}{4})^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}} = \frac{3}{4} \times 16 = 12$

4. $\sum_{i=1}^{3}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2(2)$

$D\left(\sum_{i=1}^{3}(X_i-\bar{X})^2\right)=4$

$\therefore P(\max(Y,Z)>4)$

$=1-P(\max(Y,Z)<4)$

$=1-P(Y<4)P(Z<4)$

$=1-\int_0^4 \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\,dx \cdot \frac{9}{10}$

$=1-\left(-e^{-\frac{1}{2}x}\right)\Big|_0^4 \times \frac{9}{10}$

$=1-\frac{9}{10}\times(1-e^{-2})=0.2218$

【解析】考到的是中心极限定理的知识

以 X 表示200架分机中在同一时刻使用外线的分机数，则 $X \sim B(200, 0.05)$

设所求外线条数为 N ，由题意 N 应满足$P\{X \le N\} = 0.9$

于是

$P\{(X\text{-}200*0.05)/\sqrt{200*0.05*0.95}<=(N\text{-}200*0.05)/\sqrt{200*0.05*0.95}\}=0.9$

即

$P((X\text{-}10)/\sqrt{9.5}<=(N\text{-}10)/\sqrt{9.5})=0.9$

由中心极限定理知

$(X\text{-}200*0.05)/\sqrt{200*0.05*0.95}=(X\text{-}10)/\sqrt{9.5}$ 近似服从$N(0,1)$

因此$\Phi((N\text{-}10)/\sqrt{9.5})=0.9$

查表得：$(N\text{-}10)/\sqrt{9.5}=1.29$

$N=13.945$

取整$N=14$

三5

四

(1) $\int_1^2 k(1-\frac{1}{x^2})dx$

$$= k + \frac{k}{x}\Big|_1^2 = k + \frac{k}{2} - k = 1 \Rightarrow k = 2$$

(2) ① $x < 1$ $F(x) = 0$

② $1 \le x < 2$ $F(x) = \int_1^x 2(1-\frac{1}{t^2})dt$

$$= 2(x-1) + 2\cdot(\frac{1}{x} - 1)$$

$$= 2x + \frac{2}{x} - 4$$

③ $x \ge 2$ $F(x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 2x + \frac{2}{x} - 4 & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

(3) $F(Y) = P(F(X) \le y) = P(X \le F^{-1}(y))$

$$= \int_1^{F^{-1}(y)} f(x)dx$$

$$f(y) = F'(Y) = f(F^{-1}(y))\left(\frac{1}{F(y)}\right)' = 1$$

$$f(y) = \begin{cases} 1 & 0 \le y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

五.(1) $H_0: \mu \le 0.8$

$H_1: \mu > 0.8$

检验统计量 $t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$

拒绝域 $W=\{\cancel{|t|>t_{0.025}(15)=2.1314}\}$.

$t > t_{0.05}(15)$

$\therefore\ t=\dfrac{0.92-0.8}{\frac{0.32}{\sqrt{16}}}=1.5$

$\cancel{|t|<t_{0.025}(15)}$

$t< t_{0.05}(15)$ ∴接受H_0，$\mu\le 0.8$，合格.

(2)

$\because\ \chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

$\therefore\ P(\chi^2_{0.025}(15)<\chi^2<\chi^2_{0.975}(15))=0.95$

$\therefore\ P\left(\chi^2_{0.025}(15)<\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{0.975}(15)\right)=0.95$

∴95%置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(15)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(15)}\right]=\left[\frac{15\times 0.32^2}{27.4884},\ \frac{15\times 0.32^2}{6.2621}\right]$$

$=[0.0559,\ 0.2452]$

T1(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\theta^2}{x^2} e^{-\frac{\theta}{x}} dx = E(X)$

$$= \int_0^{+\infty} \theta \, d e^{-\frac{\theta}{x}}$$

$$= \theta e^{-\frac{\theta}{x}} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \theta$$

$\therefore \hat{\theta} = \bar{X}$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^2}{x_i^3} e^{-\frac{\theta}{x_i}}$$

$$= \frac{\theta^{2n}}{\prod_{i=1}^{n} x_i^3} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{\theta}{x_i}}$$

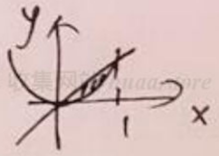
$$\ln L(\theta) = 2n \ln\theta - 3\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta}{x_i}$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = 0$$

$$\therefore \hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

6. (1). $S=\int_0^1 x-x^2\,dx$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$



$\therefore f(x,y)=\begin{cases}6 & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

(2). $\cancel{f_Y(y)=\int_{x^2}^{x}6\,dx}$

$f_X(x)=\int_{x^2}^{x}6\,dy$

$=\begin{cases}6(x-x^2) & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{y}^{\sqrt{y}}6\,dx$

$=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y) & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

(3). $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{6}{6(\sqrt{y}-y)}$

$=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{y}-y} & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

(4) $\because f_X(x)\cdot f_Y(y)\neq f(x,y)$

$\therefore$ X与Y不独立.

(5). $E(X) = \int_0^1 6x\,dx \int_{x^2}^{x} dy$

$= \int_0^1 6x(x-x^2)\,dx$

$= 6\int_0^1 x^2 - x^3\,dx$

$= \frac{1}{2}$

$E(XY) = \int_0^1 6x\,dx \int_{x^2}^{x} y\,dy$

$= \int_0^1 3x(x^2-x^4)\,dx$

$= \int_0^1 3x^3 - 3x^5\,dx$

$= \frac{1}{4}$

$E(Y) = \int_0^1 6\,dx \int_{x^2}^{x} y\,dy$

$= \int_0^1 3(x^2-x^4)\,dx$

$= 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$cov(X,Y) \neq 0$

$\Rightarrow \rho_{X,Y} \neq 0 \Rightarrow$ X与Y相关

(6) $P\{X+Y \le 1\}$

$= 1 - P\{X+Y > 1\}$

$= 1 - \int_{\frac{1}{2}}^{1} 6 dx \int_{x^2}^{x} dy$

$= 1 - \int_{\frac{1}{2}}^{1} 6x - 6x^2 dx$

$= 1 - 6\int_{\frac{1}{2}}^{1} x - x^2 dx$

$= 1 - 6 \times (\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{7}{8})$

$= \frac{1}{2}$