南京航空航天大学

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

二〇二二～二〇二三学年 第一学期《概率论与数理统计II》考试试题

考试日期：22年12月4日　　试卷类型：B　　试卷代号：080012

班号　　　　学号　　　　姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

本题分数	21
得　分	

一、填空题 （每题3分）

1. $P(A)=0.3, P(B)=0.6$，A,B 相互独立，则 $P(\bar{A}\cup B)=$ ________.

2. 顾客在银行窗口等待服务时间(分)服从期望为5的指数分布，若等待时间超过10分钟则离开。他一个月去银行5次，Y表示他未等到服务而离开的次数，则 $P(Y\geq 1)=$ ________.

3. 设随机变量 $(X,Y)\sim N(8,8,2,9,0)$，则 $D(|X-Y|)=$ ________.

4. 已知随机变量 X 服从泊松分布，Y 服从指数分布，X,Y 的相关系数为 0.25，$Z=X-2Y+2, E(Z)=-1, P(X>1)=1-2e^{-1}$，则 $D(Z)=$ ________.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 是取自正态总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，若 $Y=\dfrac{c(X_1+X_2)}{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)}$ 服从 t 分布，则 $c=$ ________.

6. 总体 X 的分布律：$P\{X=1\}=\theta^2, P\{X=2\}=2\theta(1-\theta), P\{X=3\}=(1-\theta)^2$，其中 θ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为来自 X 的样本，对于假设检验，$H_0:\theta=0.1$，$H_1:\theta=0.9$，拒绝域 $C=\{X_1=1,X_2=2,X_3=3\}$，则该检验犯第一类错误的概率 $\alpha=$ ________.

7. 设总体 X 密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, \theta<x<2\theta\\ 0, 其它\end{cases}$，$\theta$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自总体的简单随机样本，若 $k\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 为 θ^2 的无偏估计量，则 $k=$ ________.

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

本题分数	9
得　分	

二．选择题(每题 3 分)

1. 设 A,B 是两事件，若 $P(AB)=0$，则(　　)

(A) A,B 互不相容　　(B) AB 是不可能事件

(C) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$　　(D) AB 未必是不可能事件

2.设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，分布函数为 $F(x)$,则(　　)

(A) $0\le f(x)\le 1$　(B) $P(X=x)=f(x)$　(C) $P(X=x)=F(x)$　(D) $P(X=x)\le F(x)$

3. 设 $X\sim F(n,n)$，$p_1=P(X\ge 1)$，$p_2=P(X\le 1)$，则(　　)

(A) $p_1<p_2$　(B) $p_1=p_2$　(C) $p_1>p_2$　(D)无法比较 p_1,p_2 大小

本题分数	30
得　分	

三．计算题(每题 6 分)

1.将两信息分别编码为 A 和 B 传递出去，接收站收到时，A 被误收作 B 的概率为 0.02，而 B 被误收作 A 的概率为 0.01。信息 A 和 B 传递频繁程度为 2:1，若接收站收到的信息是 A，问原发出的信息是 A 的概率是多少？

本资源源免费共享 收集网站 nuaa.store

2.设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$f(x,y)=\begin{cases}e^{k-(x+y)},x>1,y>1\\0,其他\end{cases}$，求$k$的值及$Z=X+Y$的概率密度。

3.随机变量X概率密度为$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2,x>0\\0,其它\end{cases}$，对$X$独立重复观测，若观察值出现1次大于3则停止观测，记Y表示观测次数，求Y的分布律及其期望$E(Y)$(要求写出具体计算过程)。

4.某保险公司统计资料表明，在索赔户中被盗索赔户占20%。以X表示在随机抽查的100个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数，求被盗户数X不少于14户且不多余30户的概率(结果用Φ函数表示)。

5.设X_1,X_2,X_3为来自总体$N(0,3)$的样本，$\overline{X}$为样本均值，S^2是样本方差，记$T=\overline{X}^2-\dfrac{S^2}{3}$，设$Y$服从期望为1的指数分布，Z服从区间(-4,4)上的均匀分布，且Y、Z相互独立，求$P\{\min(Y,Z)<D(T)\}$。

本题分数	10
得　分	

四．设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}kx,0<x<\pi\\0,其他\end{cases}$；

(1)求k的值；(2)求X的分布函数$F(x)$;(2)求$Y=F(X)$的概率密度。

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

本题分数	8
得　分	

五．设某种材料的抗压强度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，随机抽取 10 件，测得其抗压强度的平均值为 457.5，样本标准差为 35.2176，若规定平均抗压强度不低于 455 是合格的，

(1)问对于显著性水平 $\alpha=0.05$,能否认为该材料是合格的？

(2)求总体方差的置信水平为 0.95 的置信区间.（写出具体推导过程）

本题分数	8
得　分	

六．设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}},x>0\\0,x\le 0\end{cases}$$

，$\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 X 的样本，求 θ 的矩估计量和最大似然估计量。

本题分数	14
得　分	

七. 设随机变量 (X,Y) 在抛物线 $y^2=2x$ 和直线 $y=x-4$ 所围的区域上服从均匀分布。(1)求联合概率密度 $f(x,y)$；(2)求 X 的边缘概率密度 $f_Y(y)$；(3)求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$；(4)X,Y是否相互独立？为什么？(5)通过计算说明X,Y是否不相关？(6)求 $P(X+Y>4)$。

附表：$z_{0.05}=1.645, z_{0.025}=1.96, t_{0.05}(10)=1.8125, t_{0.025}(10)=2.2281, t_{0.05}(9)=1.8331,$ $t_{0.025}(9)=2.2622,$ $\chi^2_{0.025}(10)=20.483, \chi^2_{0.975}(10)=3.247, \chi^2_{0.025}(9)=19.022,$ $\chi^2_{0.975}(9)=2.7$。

资源免费共享 收集网站

1. 0.88

2. $1-(1-e^{-2})^{5}$

3. $11-\frac{2^{2}}{\pi}$

4. 15

5. $\sqrt{\frac{3}{2}}$

6. 1.458×10^{-3}

7. $\frac{2}{5n}$

二. 1. D 2. D 3. D

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

三.1. 设发出信息为A是事件S，接收为A是事件T.

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

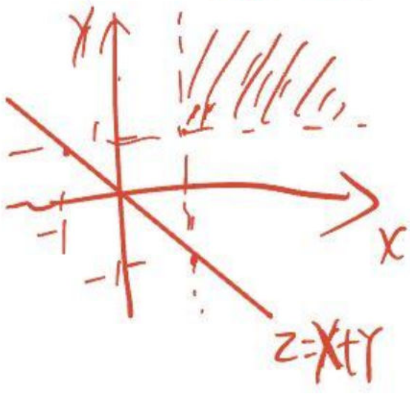
由题. $P(\bar{T}|S)=0.02$, $P(T|\bar{S})=0.01$.

$$P(S|T)=\frac{P(T|S)\,P(S)}{P(T|S)\cdot P(S)+P(T|\bar{S})\cdot P(\bar{S})}=\frac{0.08\times\frac{2}{3}}{0.08\times\frac{2}{3}+0.01\times\frac{1}{3}}$$

$$=0.94$$

2. $\int_{1}^{+\infty}\int_{1}^{+\infty}e^{k-(x+y)}\,dx\,dy=e^{k-2}=1$

$k=2$.



$f_X(x)=\int_{1}^{+\infty}e^{2-(x+y)}\,dy=e^{1-x}$

$f_Y(y)=e^{1-y}$.

$$f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{1-x}\cdot e^{1-(z-x)}\,dx.$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2-z}\,dx.$$

$$=e^{2-z}$$

3. $P\{X>3\}=\int_3^{+\infty} 2^{-x}\ln 2 = \frac{1}{8}$.

本资源免费共享收集网站 nuaa.store

$P\{Y=n\}=(1-p)^{n-1}\cdot p = \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)$.

几何分布求期望:

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} ip_i = \sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1}p = \frac{p}{q}\sum_{i=1}^{\infty} iq^i = \frac{p}{q}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} iq^i \quad ①$$

https://blog.csdn.net/u013688451

$$\text{令 } A = \sum_{i=1}^{n} iq^i = q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n \quad ②$$

$$qA = \sum_{i=1}^{n} iq^{i+1} = \quad q^2 + 2q^3 + \cdots + (n-1)q^n + nq^{n+1} \quad ③$$

https://blog.csdn.net/u013688451

$$A - qA = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n - nq^{n+1} = \frac{q(1-q^n)}{1-q} - nq^{n+1}$$

$$= \frac{q(1-q^n-nq^n+nq^{n+1})}{1-q}$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} iq^i = \frac{q(1-q^n-nq^n+nq^{n+1})}{(1-q)^2} \quad ④$$

$\therefore E(Y) = \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)} = 8$

4. 本资源 X服从$n=100$, $p=0.2$ 的二项分布

$$\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

$$14 \leq X \leq 30$$

$$= \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{X-20}{4} \quad \Rightarrow -1.5 \leq \frac{X-20}{4} \leq 2.5$$

$$\therefore P(14 \leq X \leq 30) = P\left(-1.5 \leq \frac{X-20}{4} \leq 2.5\right)$$

$$= \Phi(2.5) - \Phi(-1.5)$$

5. $\because \bar{X}$ 与 S^2 相独立 $\therefore \bar{X}^2$ 与 S^2 相独立.

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

$$D(T) = D\left(\bar{X}^2 - \frac{S^2}{3}\right)$$

$$= P(\bar{X}^2) + D\left(\frac{S^2}{3}\right)$$

$$= 2 + 1 = 3$$

$D(\bar{X}^2) = 2$

$\bar{X} \sim N(0,1)$

即 $\bar{X}^2 \sim \chi^2(1)$

$D(\chi^2) = 2n$

$\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 = \frac{2}{3} S^2 \sim \chi^2(2)$

$D\left(\frac{2}{3}S^2\right) = 4$

$D\left(\frac{S^2}{3}\right) = \frac{1}{4} D\left(\frac{2}{3}S^2\right) = 1$

即求：

$$P\{\min(Y,Z) < 3\}$$

$$= 1 - P\{\min(Y,Z) \geq 3\}$$

$$= 1 - P\{(Y \geq 3) \cap (Z \geq 3)\}$$

$$= 1 - P(Y \geq 3) \cdot P(Z \geq 3)$$

$$= 1 - \frac{1}{8e^3}$$

$$P(Y \geq 3) = \int_3^{\infty} e^{-x}\, dx = e^{-3}$$

$$P(Z \geq 3) = \frac{1}{8}$$

四.(1). $\int_0^{\pi} kx = \frac{k}{2}\pi^2 = 1$

$k = \frac{2}{\pi^2}$

(2). 当 $x<0$, $F(x)=0$

当 $0\le x<\pi$, $F(x)=\int_0^{x}\frac{2}{\pi^2}x\,dx=\frac{1}{\pi^2}x^2$

当 $x\geq\pi$, $F(x)=1$

(3). $F(Y)=P\{F(X)\le y\}=P\{\frac{1}{\pi^2}X^2\le y\}=P\{-\pi\sqrt{y}\le X\le\pi\sqrt{y}\}$

当 $y<0$, $F(Y)=0$

当 $y>1$, $F(Y)=1$.

当 $0<y<1$,

$=\frac{1}{\pi^2}x^2\Big|_0^{\pi\sqrt{y}}$

$=y$.

$\therefore f(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & 其他.\end{cases}$

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

五.(1). $H_0: \mu \leq 455$，$H_1: \mu > 455$

本资源免费共享 收集网站

$$T = \frac{\bar{X} - 455}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

$$= \frac{457.5 - 455}{35.2176/\sqrt{10}} = 0.224 < t_{0.05}(9) = 1.8331$$

T不在拒绝域中，∴接受H_0.

认为不合格。

(2) σ^2的置信区间 $\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$

$$= \left[\frac{9 \times 35.2176^2}{19.022}, \frac{9 \times 35.2176^2}{2.7}\right]$$

$$= [586.8213, 4134.2645]$$

六、

1.矩估计 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$ $\theta=\frac{2}{\pi}E^2(X)$

$=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx$

估计值：$\hat{\theta}=\frac{2}{\pi}\bar{X}^2=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2$

$=\sqrt{\frac{\pi\theta}{2}}$

2.最大似然估计

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\begin{cases}\frac{\prod_{i=1}^{n}x_i}{\theta^n}e^{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2} & x_1,x_2,\cdots x_n>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$\ln L(\theta)=\begin{cases}-n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 & x_1,x_2\cdots x_n>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-n\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$$

估计量：$\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

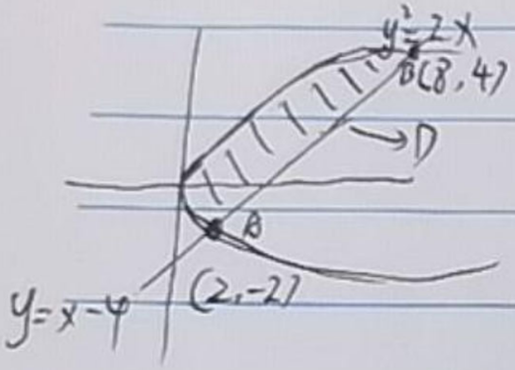
估计值：$\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

七.

$(x,y)\in D$

(1) $f(x,y)=\dfrac{1}{\iint\limits_D dxdy}=\dfrac{1}{\int_{-2}^{4}\left[y+4-\frac{y^2}{2}\right]dy}$

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store



$=\dfrac{1}{18}$

综上 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{18} & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$

(2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

$=\begin{cases}\dfrac{1}{18}\left(y+4-\dfrac{y^2}{2}\right) & y\in(-2,4)\\ 0 & 其它\end{cases}$

(3) $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{y+4-\frac{y^2}{2}} & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D \text{ 且 } y\in(-2,4)\end{cases}$

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

(4) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

$$= \begin{cases} \frac{\sqrt{2x}}{9} & x\in(0,2) \\ \frac{\sqrt{2x}-x+4}{18} & x\in(2,8) \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

显然不满足

$f_X(x)\cdot f_Y(y) = f(x,y)$

$\therefore$ X与Y不独立

(5)

$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$

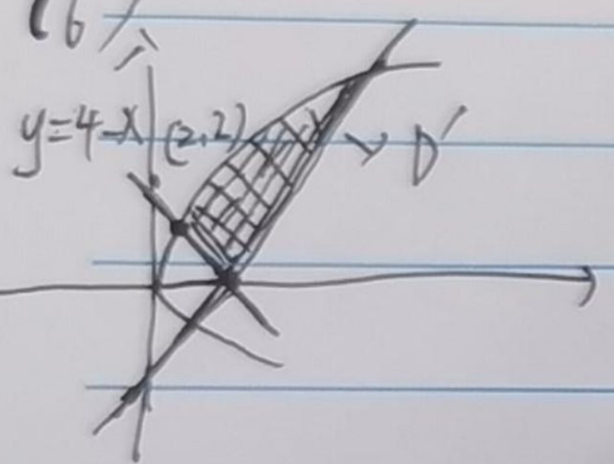
$Cov(X,Y) = E[(X-\bar{X})\cdot(Y-\bar{Y})]$

$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})(y-\bar{y}) f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{18}\int_{-2}^{4}(y-\bar{y})\,dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4}(x-\bar{x})\,dx$

$\bar{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f_Y(y)\,dy$

$= 1.8 \neq 0 \quad \therefore X,Y$ 不相关

(6)



$P(X+Y>4)$

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

$= \frac{1}{18} \iint\limits_{D'} dxdy$

$= \frac{1}{18} \left[\int_0^2 [y+4-(4-y)]dy + \int_2^4 [y+4-\frac{y^2}{2}]dy \right]$

$= \frac{13}{27}$