南 京 航 空 航 天 大 学

二〇一九 ～ 二〇二〇学年 第二学期 **《现代控制理论》考试试题**

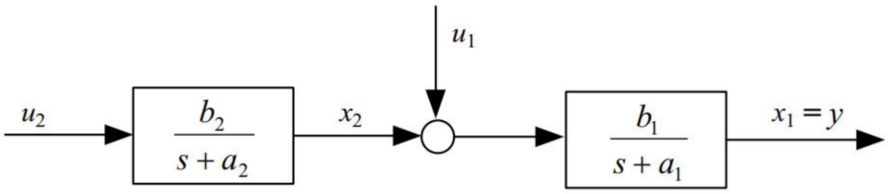
考试日期：2020 年 6 月 27 日 试卷类型：A 试卷代号：

班号 **学号** **姓名**

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	**总分**
得分										

本题分数	10 分
得 分	

一、已知系统的结构图如下图所示，输入为u_1和u_2，输出为y，试建立系统的状态空间表达式。



本题分数	15 分
得　　分	

二、已知线性定常系统的状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

系统的初始状态为$\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$，输入信号为单位阶跃信号，试求 $x(t)$。

本题分数	15 分
得　分	

三、 已知系统的状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}u$$，其中，b_1、b_2、c_1、c_2为实数

$$y=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

（1）写出对角标准型；

（2）分析欲使系统一个状态变量既能控又能观，另一个状态变量既不能控又不能观，b_1、b_2、c_1、c_2应该满足的条件。

本题分数	15 分
得　　分	

四、已知系统的状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

（1）判断系统是否能控，如果不能控请写出能控子系统的状态空间表达式；

（2）能否用状态反馈控制器，使得闭环极点配置为-1, 1, -1 和-1, -1, -1 ？说明理由。

本题分数	15 分
得　　分	

五、设系统状态方程为

$$\dot{x}_1 = 2x_2$$
$$\dot{x}_2 = -kx_1$$

其中， k 为非零的实数。

（1）采用李雅普诺夫第二稳定性判断方法分析系统的稳定性；

（2）有人说“李雅普诺夫第二稳定性判断方法是一种分析系统稳定性的万能方法，可适用于任何类型控制系统”，这种说法是否正确？为什么？

本题分数	15 分
得　　分	

六、已知某系统的对偶系统为

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

（1）对原系统设计状态反馈，使得加入反馈后的闭环系统的阻尼比为 0.707，且单位阶跃响应的峰值时间为 0.444 秒；

（2）若所设计状态反馈闭环系统的状态不可测，设计全维状态观测器，使得观测器极点均为-10；

（3）若希望进一步加快状态反馈系统的单位阶跃响应速度，是否可以通过改变状态观测器的极点位置来实现？为什么？

本题分数	15 分
得　　分	

七、某控制系统的状态方程为

$$\dot{x}(t) = 4u(t)$$

已知初始时刻状态 $x(0) = 2$，试设计最优控制律 $u^*(t)$ 和最优轨迹 $x^*(t)$，将状态 x 在终端时刻转移到 0，并使性能指标 $J = 4\int_0^1 (x^2 + u^2)dt$ 达到极小。

南 京 航 空 航 天 大 学

二〇一九 ～ 二〇二〇学年 第二学期

课程名称：《 现代控制理论 》 参考答案及评分标准

命题教师： 试卷类型：A 试卷代号：

一、【10分】

由结构图可得

$$X_2(s)=\frac{b_2}{s+a_2}U_2(s)$$

$$X_1(s)=\frac{b_1}{s+a_1}[U_1(s)-X_2(s)]$$ （**5**分）

$$\mathrm{Y(s)}=X_1(\mathrm{s})$$

拉氏反变换得：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-a_1x_1-b_1x_2+b_1u_1\\ \dot{x}_2&=-a_2x_2+b_2u_2\\ y&=x_1\end{aligned}$$ （**3**分）

进一步写成向量矩阵的形式，可得：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_1 & b_1\\ 0 & -a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1 & 0\\ 0 & b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

（**2**分）

二、【15分】

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow e^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}\cos 2t & -\frac{1}{2}\sin 2t\\ 2\sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}$$ （**5**分）

$u(t)=1(t)$，

$$x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t \Phi(\tau)Bu(t-\tau)d\tau=\begin{bmatrix}\cos 2t\\ 2\sin 2t\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\sin(2\tau)\\ \cos 2(\tau)\end{bmatrix}d\tau$$

（10 分）

$$=\begin{bmatrix}\cos 2t\\ 2\sin 2t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\cos 2t-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\sin 2t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{4}\cos 2t-\frac{1}{4}\\ \frac{5}{2}\sin 2t\end{bmatrix}$$

三、【15 分】

（1） $f(\lambda)=|\lambda I-A|=0,\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$ （2 分）

$$P=\begin{bmatrix}p_1 & p_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$ （4 分）

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2b_1+b_2\\ -b_1-b_2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}c_1-c_2 & c_1-2c_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}$$ （5 分）

(2) $\bar{x}_1$ 既能控又能观，$\bar{x}_2$ 既不能控又不能观，满足的条件为：

$$\begin{cases}c_1-2c_2=0 & c_1-c_2\neq 0\\ -b_2-b_1=0 & 2b_1+b_2\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=2c_2\neq 0\\ b_2=-b_1\neq 0\end{cases}$$

$\bar{x}_2$ 既能控又能观，$\bar{x}_1$ 既不能控又不能观，满足的条件为：

$$\begin{cases}c_1-c_2=0 & c_1-2c_2\neq 0\\ 2b_1+b_2=0 & -b_2-b_1\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=c_2\neq 0\\ b_2=-2b_1\neq 0\end{cases}$$ （4 分）

四、【15 分】

(1) 系统能控性矩阵为

$$Q_c=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 9\end{bmatrix}, rank\ Q_c=2$$

所以系统不能控 （3 分）

（2）

构造非奇异变换阵： $T^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}, T=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ （**3** 分）

则 $\overline{A}=TAT^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -3 & 2\\ 1 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \overline{B}=TB=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, \overline{C}=CT^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix}$ （**3** 分）

因此，按能控性进行结构分解后的系统状态空间表达式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_c\\ \dot{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -3 & 2\\ 1 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_c\\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

（**1** 分）

$$y=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_c\\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}$$

能控子系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}_c=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix}x_c+\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}x_{\bar{c}}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

（**2** 分）

$$y_c=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}x_c$$

（答案不唯一）

（3）根据系统的能控性分解可知其不可控部分的极点为 1，状态反馈对这部分的极点不起作用，所以不能通过状态反馈使得极点配置为-1,-1,-1，但可以配置为 -1,1，-1。（**3** 分）

五、【15 分】

（1）系统的平衡点为原点，（**2** 分）

若 $k>0$，则可取 $V(\mathrm{x})=kx_1^2+2x_2^2$ ，可得

$\dot{V}(\mathrm{x})=2kx_1\dot{x}_1+4x_2\dot{x}_2=2kx_12x_2-4kx_1x_2\equiv 0$ （**3** 分）

由于，$\dot{V}(\mathrm{x})$ 恒等于零，因此系统在平衡点为李雅普诺夫意义下的一致稳定。 （**2** 分）

若 $k<0$，由李雅谱诺夫方程 $A^TP+PA=-I$，

$p_{11}+p_{12}=0$， $p_{12}=p_{21}=\dfrac{-1}{2\text{-}k}$ （**3** 分）

因此，不存在唯一的正定矩阵 P，该系统在平衡点处不是一致渐近稳定的。**（2 分）**

(2) 这种说法是正确的，原因（略）：从能量的观点来分析。 **（3 分）**

六、【15 分】

原系统为：
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

（1）判别能控性，$Qc = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ 显然满秩。 **（2 分）**

有条件可以，引入反馈后的极点为：-7.07± 7.07j **（1 分）**

令$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2]$

$$\left|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}\right| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2+k_1 & s+3+k_2 \end{vmatrix} = s^2 + (k_2+3)s + 2 + k_1$$ **（4 分）**

$$= (s + 7.07 + 7.07j)(s + 7.07 - 7.07j) = s^2 + 14.14s + 100$$
$$k_2 = 11.14, \quad k_1 = 98$$

（2） 判别能观性，$Qo = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 显然满秩。 **（2 分）**

令$\mathbf{G} = [g_1 \quad g_2]^T$

$$\left|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{GC}\right| = \begin{vmatrix} s+2g_1 & -1 \\ 2+2g_2 & s+3 \end{vmatrix} = s^2 + (3+2g_1)s + 6g_1 + 2g_2 + 2$$
$$= (s+10)^2 = s^2 + 20s + 100$$
$$g_1 = 8.5, \quad g_2 = 23.5$$ **（4 分）**

（3） 不可以，原因略（简述分离原理）。 **（2 分）**

七、【15 分】

$H = 4x^2 + 4u^2 + 4\lambda u$ **（2 分）** $\dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -8x \Rightarrow \dot{\lambda} + 8x = 0$ **（2 分）**

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow 8u + 4\lambda = 0 \\ \dot{x} = 4u \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{x} + 2\lambda = 0$$

$\ddot{x} - 16x = 0 \Rightarrow x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{4t}$ **（4 分）**

由边界条件得

$$c_1 = -\frac{2e^8}{1-e^8}$$
（2 分）
$$c_2 = \frac{2}{1-e^8}$$

则有

$$x^*(t) = -\frac{2e^8}{1-e^8}e^{-4t} + \frac{2}{1-e^8}e^{4t}$$ **（2 分）**

由 $\dot{x}(t) = 4u(t)$，得到 $u = \frac{1}{4}\dot{x}$

因此，$u^*(t) = \frac{2e^8}{1-e^8}e^{-4t} + \frac{2}{1-e^8}e^{4t}$ **（3 分）**