二〇二〇～二〇二一学年第 1 学期《高等数学Ⅱ》考试试题

考试日期： 年 月 日 试卷类型： 试卷代号：

班号 学号 姓名

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、填空（每空三分）

1.设曲线$y=y(x)$由$\begin{cases} x=\int_0^u e^{-t^2}dt \\ y=\int_0^u \sin(u-t)dt \end{cases}$确定, 则$y'(0)=$_______

2.曲线$y=\ln(1-x^2)$上相应于$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$的一段弧长为________

3.半球面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$和旋转抛物面$z=x^2+y^2$所围闭曲面在xoy面上投影部分的面积为______

4.$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{\frac{1}{n}}e^{\frac{2}{n}}\ldots e^{\frac{n}{n}}}=$_______

5.已知三点$A(1,0,1),B(2,1,1),C(1,1,1)$,则$\triangle ABC$底边$AC$上高为_______

6. 设有二阶连续导数的函数$y=f(x)>0,f(2)=\frac{1}{2},f'(2)=0$,且

$\int_0^1 x^2 f''(2x)dx=0$,则$y=f(x)$与$x=0,x=2$所围平面图形的面积$S=$____

7.已知$f(x)$有连续导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right]=2$,则$f(0)=$_______

二、选择题（每题 3 分）

1. 当$x\to 0$时，$bx-\sin x$与$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt$是等价无穷小，则（）

A. a=4, b=1　　B. a=1, b=4　　C. a=-4, b=1　　D. a=4, b=-1

2.设$f(x)$在$\left[0,1\right]$上有二阶连续导数，则下列说法正确的是（）

1.若$f''(x)>0$，则$\int_0^1 f(x)dx > f(\frac{1}{2})$

2.若$f''(x)>0$，则$\int_0^1 f(x)dx < f(\frac{1}{2})$

3.若$f''(x)<0$，则$\int_0^1 f(x)dx > f(\frac{1}{2})$

4.若$f''(x)<0$，则$\int_0^1 f(x)dx < f(\frac{1}{2})$

$A.1,4$

$B.2,3$

$C.2,4$

$D.1,3$

3.下列反常积分收敛的是()

A. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+2x}} dx$

$B.\int_0^1 \frac{\sqrt{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[3]{x}} dx$

$C.\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx$

$D.\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^3} dx$

三、求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 t\ln t dt}{x^4}$

四、计算题(每题5分)

1.$\int \frac{1}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} dx$

2.$\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx$

3.$\int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx$

4.若函数$f(x) = xe^x + \frac{x(e^x + e^{-x})}{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\int_{-1}^{1} f(x)dx$，求$\int_{-1}^{1} f(x)dx$

5.$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x}$

五、已知一直线通过x+y-z-8=0与直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$的交点，且与$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$垂直相交，求该直线的方程

六、曲线$y=\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$绕x轴旋转一周所得的旋转体，将它在x=0, x=b(b>0)

之间部分的体积记为V(b)，且V(a)$=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}V(b)(0<a<b)$,求a为多少

七、设x∈R，求$f(x)=\int_0^1|2x-t|\,dt$及$f(x)$的极值

八、设$f(x)$在$[0, 1]$上连续，在$(0, 1)$内二阶可导，且$f(0) = f(1) = \int_0^1 f(x)dx$,证明：

1.方程$f(x) = \int_0^1 f(x)dx$在$(0, 1)$内至少有一个实根；

2.存在一点b∈$(0, 1)$，使得$f''(b) = 0$

本张试卷由学支教员王明鑫整理，答案仅供参考，如遇答案有误，请和学支教员部成员联系，学支会及时进行订正。感谢您的使用。

一、填空题

1. 0

2. $\ln 3-\frac{1}{2}$

3. π

4. $\sqrt{e}$

5. 1

6. 1

7. -1, 2

二、选择题

1. A

2. A

3. B

三、

解　由洛必达法则

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x\ln\cos x\cdot(\cos x)'}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\ln\cos x\cdot\cos x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{4x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{8x\cdot\cos x}=-\frac{1}{8}$$

四、

1. $\int\frac{1}{\cos^2x+2\sin^2x}dx$

$=\int\frac{1}{\cos^2x(1+2\tan^2x)}dx$

$=\int\frac{d\tan x}{1+2\tan^2x}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C$

2.

$$\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}dx$$
$$= \int \ln x d\left(\frac{1}{1-x}\right)$$
$$= \frac{\ln x}{1-x} - \int \frac{1}{x(1-x)}dx$$
$$= \frac{\ln x}{1-x} - \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{1-x}dx$$
$$= \frac{\ln x}{1-x} - \ln|x| + \ln|1-x| + c$$
$$= \frac{\ln x}{1-x} - \ln\left|\frac{x}{1-x}\right| + c$$

3.

解 把被积函数的分母配方得

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx.$$

令 $t = x + \frac{1}{2}$，即得

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt = \int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}dt$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{d\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{3}}t + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

4.

设 $A = \int_{-1}^{1} f(x)dx$

左右取积分

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} xe^x dx + \int_{-1}^{1} \frac{x(e^x+e^{-x})}{1+\sqrt{1-x^2}}dx + A\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$$

$$\therefore A = \frac{2}{e} + 0 + A\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$$

设 $x = \sin t$

$$\therefore A = \frac{2}{e} + A\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt$$
$$= \frac{2}{e} + \frac{\pi}{2}A$$

$$\therefore A = \frac{\frac{2}{e}}{1-\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{4}{e(2-\pi)}$$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sin x+\cos x}$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x+\sin x+\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\frac{\cos x+\sin x}{\sin x+\cos x}$

$= \frac{\pi}{4}$

五、

解:先求已知平面与已知直线 L_1 的交点:把

$x = 2t+1$

$y = -t+2$ 代入

$z = 2t-1$

$x+y-z-8=0$ 得: $t=-4$

所以交点为: $(-7,6,-9)$

再作一平面经过点 $(-7,6,-9)$ 且垂

直于已知直线 $L_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$,

方程为:

$2(x+7)+(y-6)+(z+9)=0$

,即 $2x+y+z+17=0$

用同样的方法,再求与已知

$L_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ 的交点:

$(-6,-2,-3)$

则经过点 $(-7,6,-9)$ 和点

$(-6,-2,-3)$ 的方向向量为

$(1,-8,6)$ 则这两点的直线方程为:

$$\frac{x+7}{1} = \frac{y-6}{-8} = \frac{z+9}{6}$$

六、

解: $V(\xi)$

$$=\pi\int_0^{\xi}(\frac{\sqrt{x}}{1+x^2})^2dx=\pi\int_0^{\xi}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^{\xi}=\frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{1+\xi^2})$$

$$V(a)=\frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{1+a^2})=\frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty}V(\xi)=\lim_{\xi\to+\infty}\frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{1+\xi^2})=\frac{\pi}{4}$$

所以, $1-\frac{1}{1+a^2}=\frac{1}{2}$, 得 $a=\pm1$

又 $a>0$, 所以 $a=1$

七. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}-2x, & x<0\\ \frac{1}{2}-2x+4x^2, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 2x-\frac{1}{2}, & x>\frac{1}{2}\end{cases}$

$x<0$ 时, $f'(x)<0$, 单调递减

$x\in[0,\frac{1}{4}]$ 时, $f'(x)<0$, 单调递减

$x\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ 时, $f'(x)>0$, 单调递增

$x\in(\frac{1}{2},+\infty)$ 时, $f'(x)>0$, 单调递增.

则 $f(x)$ 存在极小值 $f(\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$

八、

(1) $\because f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，所以存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$ 对方程 $f(x)=\int_0^1 f(x)\,dx$ 两边求导得 $f'(x)=0$，$\therefore$ 在 $(0,1)$ 内存在一个实根 ξ 满足方程

$$f(x)=\int_0^1 f(x)\,dx。$$

$$f(0)=f(1)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$\therefore f'(0)=f'(1)=0$ 又 $\because f(x)$ 在开区间 $(0,1)$ 内二阶可导，$\therefore f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由罗尔定理得：存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$。