南京航空航天大学

二〇二一～二〇二二学年 第1学期《结构动力学基础》考试试题

考试日期：2021年11月21日　试卷类型：A　试卷代号：

班号　　**学号**　　**姓名**

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	**总分**
得分											

（注意：除了特殊说明，本试卷所有数值计算结果保留小数点后2位，π取3.14，g取$9.8m^2/s$）

本题分数	20
得　分	

一、单项选择题（每小题2分，总分20分）

1. 一个振动系统可分解为惯性、弹性和阻尼三种力学元件组成，其中构成振动系统的必需要素是（ ）。

A、惯性和弹性　　B、惯性和阻尼

C、弹性和阻尼　　D、三者都是

2. 关于自由振动，下列叙述正确的是（ ）。

A、系统在无外力作用下的振动称为自由振动。

B、自由振动时系统无外力作用，因而也无内力。

C、自由振动响应是一种简谐运动。

D、以上都不对。

3. 无阻尼单自由度系统在初始条件u_0和$\dot{u}_0$的作用下产生的自由振动响应为（ ）。

A、$u(t)=u_0\sin\omega_n t+\dfrac{\dot{u}_0}{\omega_n}\cos\omega_n t$　　B、$u(t)=\dot{u}_0\cos\omega_n t+\dfrac{u_0}{\omega_n}\sin\omega_n t$

C、$u(t)=u_0\cos\omega_n t+\dfrac{\dot{u}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t$　　D、$u(t)=\dot{u}_0\sin\omega_n t+\dfrac{u_0}{\omega_n}\cos\omega_n t$

4. 关于欠阻尼单自由度系统的阻尼比，下列叙述正确的是：（ ）

A、具有相同粘性阻尼系数的阻尼器，在不同的振动系统中具有相同的阻尼比。

B、阻尼比越大，系统的自由振动衰减速度越快。

C、由于阻尼比的原因，系统的阻尼振动频率小于固有频率，阻尼振动周期小于固有周期。

D、系统临界阻尼系数与系统阻尼比有关，阻尼比越大，临界阻尼系数就越大。

5. 欠阻尼单自由度系统受简谐力激励时发生稳态振动响应，该系统在共振时（ ）

A、速度与激振力近似同相位，又称相位共振。
B、位移响应和加速度响应近似为零。
C、此时位移、速度和加速度的振幅放大系数均为最大值。
D、惯性力、弹性力和阻尼力三者相互平衡。

6. 为了减小发动机传到基础上的力，选择了弹簧和线性粘性阻尼元件组成的隔振器进行隔振，下列措施**不正确**的是（ ）

A、使隔振器工作在 $\lambda > \sqrt{2}$ 的频率范围。
B、隔振器工作时，应选择柔软的支撑弹簧，隔振效果越好。
C、隔振器工作时，应选择小阻尼元件，传递率低，隔振效果越好。
D、阻尼越小传递率越低，因此应选择无阻尼的隔振器。

7. 零初始条件下，质量为 m 的单自由度系统受到单位脉冲激励，则该系统（ ）

A、在冲击结束时，获得初始速度为 $1/m$。
B、在冲击结束时，获得初始位移为 $1/m$。
C、受到了幅值为 1N 的冲击力。
D、以上均不对。

8. 对于具有刚体模态的多自由度振动系统，该系统（ ）

A、可用柔度法建立刚度矩阵。
B、具有零固有频率，对应的振型向量也是零向量。
C、刚度矩阵不存在。
D、刚体模态运动无弹性势能。

9. 关于多自由度无阻尼系统的固有振动，下列说法**不正确**的是（ ）

A、一定是简谐振动，振动频率与激振力频率有关。
B、可以是自由振动的特殊形式。
C、是系统存在的一种运动模式。
D、是构成自由振动响应的基础。

10. 多自由度系统中的某个自由度为某一阶振型的节点，在该自由度上施加简谐激励，则（ ）

A、系统无响应。
B、系统响应中只包含这一阶模态的振动成分。
C、对应这一阶模态的振动成分无法被诱发。
D、只能诱发这一阶模态的振动成分。

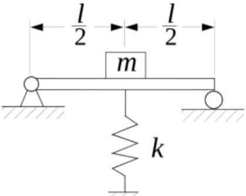
本题分数	20
得 分	

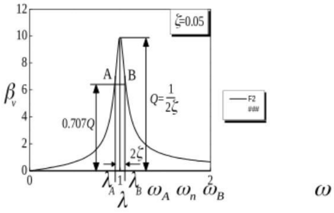
二、填空（每空2分，总分20分）

1、机械或结构系统在其（____）附近的往复运动称为振动。

2、某单自由度系统产生振动位移响应为 $u = 5\sin(5t)$ mm，则该系统的速度响应振幅为（____）mm/s。

3、题3图中简支梁长 $l = 4\text{m}$、抗弯刚度 $EI = 1.96\times10^{6}\,\text{Nm}^{2}$，且 $k = 4.9\times10^{5}\,\text{N/m}$，已知简支梁中部静挠度变形为 $\Delta = \dfrac{Pl^{3}}{48EI}$，则系统的等效刚度为（____）Nm。





题3图　　　　　　　　　　　　　　　　题4图

4、题4图为某次振动实验测试的速度共振曲线，已知曲线峰值对应的频率为157rad/s，半功率频率分别为ω_A =151rad/s, ω_B =163rad/s，则该系统的阻尼比为__（　　）__。（计算结果保留小数点后3位）

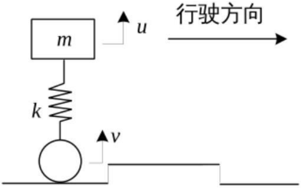
5、一质量为 m 的单自由度系统，经试验测出其阻尼自由振动频率为 ω_d，在简谐激振力作用下速度共振的激振频率为ω_0，则系统的固有频率为__（　　）__、阻尼系数为__（　　　）__，小阻尼情况下振幅对数衰减率为__（　　　）__。

6、安装在弹性隔振器上的发动机工作转速为2000rpm，要隔离发动机引起的90%振动，则系统的固有频率为__（　　　）__rad/s，设备在自重下的静变形为__（　　）__mm。（不计阻尼影响）

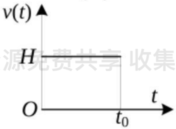
7、若阻尼矩阵在固有振型矩阵变换下是对角阵，这种形式的阻尼被称为__（　　　　）__。

本题分数	10
得　分	

三、图（a）所示无阻尼单自由度车辆模型，在通过路面凸起台阶时受图（b）所示的基础位移激励，求该模型的时间响应历程$u(t)$。



(a)



(b)

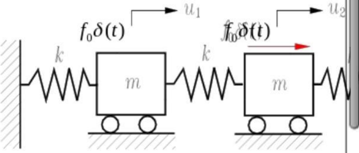
本题分数	15
得　分	

四、如图所示受脉冲激励的无阻尼二自由度系统，试:

（1）列出系统的振动方程；（5 分）

（2）求系统的固有频率和使模态质量归一化振型；（5 分）

（3）求零初始条件下系统在图示脉冲激励下的响应。（5分）



本题分数	15
得　分	

五、两端固定的等截面均质直杆，杆长度为 L，弹性模量为 E，密度为 ρ 。试：

（1）求该直杆的纵向振动固有频率和固有振型函数；（5分）

（2）证明固有振型函数的正交性；（5分）

（3）写出主质量和主刚度表达式。（5分）

（提示：$\int (\cos x)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$，　$\int (\sin x)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$ ）

本题分数	20
得　分	

六、旋转机械设备由于转子的偏心而导致稳态振动，此时可将设备视为受简谐力激励的单自由度系统，如图（a）所示，当激振频率接近系统固有频率时将引起设备强烈共振。如果系统本身的阻尼很小，不足以降低共振，人们可以在原有设备上串接一个附加的单自由度子系统，将设备上的振动“转移”到子系统上，或者说用子系统“吸收”原设备上的振动，从而实现减振目的，因此该附加的单自由度子系统又被称为“吸振器”。

在图（a）所示的旋转机械中，设备质量 $M_1 = 90\text{kg}$，支撑刚度 $k_1 = 3.6\times10^6\ \text{Nm}$，阻尼系数 $c_1 = 360(\text{Ns/m})$，完成下列（1）-（2）问：（8分）

（1）求图（a）中系统的固有频率 ω_n 和阻尼比 ζ；

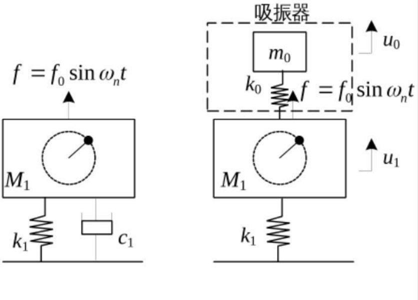
（2）图（a）中，当激振频率 $\omega = \omega_n$ 时，激振力幅值 $f_0 = 400\text{N}$，求共振时设备 M_1 的位移稳态响应幅值 B_1。

为了降低共振响应，在设备上连接如图（b）所示的吸振器，已知吸振器质量 $m_0 = 2.25\text{kg}$，并忽略系统阻尼，完成下列（3）-（5）问：（12分）

（3）建立设备与吸振器组合而成的系统受迫振动方程，并求系统位移稳态响应；

（4）若要使设备 M_1 的位移稳态响应的振幅最小，确定吸振器弹簧的刚度系数 k_0；

（5）求此时吸振器质量块的位移稳态响应振幅 B_0 为多少？



(a) 旋转机械设备　　(b) 设备+吸振器

南京航空航天大学

二〇二一～ 二〇二二 学年 第一学期

课程名称：《结构动力学基础 》参考答案及评分标准

命题教师： 试卷类型：A 试卷代号：

选择题（每题2分，总20分）

1 A, 2 A 3 C 4 B 5 A 6 D 7 A 8 D 9 A 10 C

填空（每空2分，总分20分）

1、平衡位置； 2、25； 3、1.96×10^6，； 4、0.038；

5、ω_0， $2m\sqrt{\omega_0^2-\omega_d^2}$， $2\pi\sqrt{1-\dfrac{\omega_d^2}{\omega_0^2}}$； 6、63.116，2.46； 7、比例阻尼

参. （10分）

解：解：根据牛顿第二运动定律建立模型的运动方程

$$m\ddot{u}+ku=kv \qquad （3分）$$

系统的单位脉冲响应函数为

$$h(t)=\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t\text{，其中 }\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad （3分）$$

基础激励 v 的函数为

$$v(t)=\begin{cases}H,0\le t\le t_0\\0,t>t_0\end{cases}$$

当 $0\le t\le t_0$ 时，

$$u=\int_0^t h(t-\tau)\cdot kv(\tau)d\tau=\frac{kH}{m\omega_n^2}\int_0^t\sin\omega_n(t-\tau)d\tau=H(1-\cos\omega_n t) \qquad （2分）$$

当 $t>t_0$ 时，

$$u=\int_0^{t_0}h(t-\tau)\cdot kv(\tau)d\tau+\int_{t_0}^t h(t-\tau)\cdot 0d\tau$$

$$=\frac{kH}{m\omega_n^2}\int_0^{t_0}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau=H\left[\cos\omega_n(t-t_0)-\cos\omega_n t\right] \qquad （2分）$$

（若上面写出了杜哈梅积分表达式而未完成积分运算，可酌情给2分）

四.　（15分）

解：（1）系统振动方程：

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix}+\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_0\delta(t) \\ f_0\delta(t) \end{pmatrix}$$ （5分）

（2）求解特征值问题

$$\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{\varphi}=0$$

可得固有频率和振型向量

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}\,(rad/s),\quad \omega_2=\sqrt{\frac{3k}{m}}\,(rad/s),\quad \boldsymbol{\varphi}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{\varphi}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

求主质量：$M_1=\boldsymbol{\varphi}_1^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_1=2m, M_2=\boldsymbol{\varphi}_2^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_2=2m$

可得以主质量归一化的振型向量为 $\boldsymbol{\varphi}_1'=\frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{\varphi}_2'=\frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ （5分）

（3）脉冲结束后，系统将产生在初始条件 $\boldsymbol{u}_0=\left[0,0\right]^T$，$\dot{\boldsymbol{u}}_0=[f_0/m \quad f_0/m]^T$ 作用下的自由振动响应，可表示为各阶固有振动的线性组合

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{\varphi}_1(a_1\cos\omega_1 t+b_1\sin\omega_1 t)+\boldsymbol{\varphi}_2(a_2\cos\omega_2 t+b_2\sin\omega_2 t)$$

在主坐标下，系统的初始条件为

$$\boldsymbol{q}_0=\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{u}_0=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \dot{\boldsymbol{q}}_0=\boldsymbol{\Phi}^{-1}\dot{\boldsymbol{u}}_0=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} f_0/m \\ f_0/m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_0/m \\ 0 \end{pmatrix}$$

可得：$a_1=a_2=0, b_1=\frac{f_0}{m\omega_1}, b_2=0$

因此系统的响应为：$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{\varphi}_1\cdot b_1\sin\omega_1 t=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{f_0}{m\omega_1}\sin\omega_1 t$ （5分）

（也可以先求主坐标下的模态力，通过求解主坐标下的脉冲激励响应，然后线性组合来获得系统

响应，视答题情况予以给分。）

伍． （15 分）

解：（1）振型函数为

$$U(x)=a_1\cos\frac{\omega}{c}x+a_2\sin\frac{\omega}{c}x$$

由边界条件$U(0)=0$，$U(l)=0$ 可得 $a_1=0$ 和 $\sin\frac{\omega}{c}x=0$ 。解纵向振动频率方程，可得

$$\frac{\omega}{c}l=n\pi \quad (n=1,2,3\cdots)$$

所以固有频率为：$\omega_n=\frac{n\pi c}{l}=\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}},(n=1,2,3\cdots)$

固有振型函数为：$U_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l},(n=1,2,3\cdots)$ （5 分）

（2）第 n 阶固有频率和振型函数 $\omega_n,U_n(x)$ 应满足

$$U_n''(x)+(\frac{\omega_n}{c})^2U_n(x)=0$$

乘以另一阶振型函数$U_m(x)$，并沿杆长积分，利用分部积分法和固定边界条件，可得

$$(\frac{\omega_n}{c})^2\int_0^l U_m(x)U_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^l U_n'(x)U_m'(x)\mathrm{d}x$$

同理可得：
$$(\frac{\omega_m}{c})^2\int_0^l U_m(x)U_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^l U_m'(x)U_n'(x)\mathrm{d}x$$

上面两式相减，可得：
$$\frac{\omega_n^2-\omega_m^2}{c^2}\int_0^l U_nU_m\mathrm{d}x=0$$

当$n\neq m$时，杆的固有频率互异，从而可得杆固有振型函数的正交关系：

$$\int_0^l U_m(x)U_n(x)\mathrm{d}x=0,\quad (n\neq m)$$

$$\int_0^l U_n'(x)U_m'(x)\mathrm{d}x=0,\ (n\neq m)$$

（5 分）

（也可以直接代入振型函数，用三角函数的正交性来证明）

（3）当$n=m$时，可得主质量和主刚度表达式：

$$M_n=\int_0^l\rho AU_n^2dx=\rho A\int_0^l(\sin\frac{n\pi x}{l})^2dx=\frac{1}{2}\rho Al$$

$$K_n=\int_0^l EA(U_n')^2dx=EA(\frac{n\pi}{l})^2\int_0^l(\cos\frac{n\pi x}{l})^2dx=(n\pi)^2\frac{EA}{2l}(n=1,2,3\cdots)$$

（5 分）

（若写出了主质量和主刚度的表达式，但未完成积分计算或者计算结果不正确，可酌情给 3 分）

六.　（20 分）

解：（1）$\omega_n=\sqrt{\frac{k_1}{M_1}}=200(rad/s)$　（2 分）

$$\zeta=\frac{c_1}{2\sqrt{M_1k_1}}=\frac{360}{2\times\sqrt{90\times3.6\times10^6}}=0.01$$

（2 分）

（2）当 $\omega=\omega_n$ 时，位移振幅放大系数为：$\beta_d=\dfrac{1}{2\zeta}=50$

此时设备稳态位移响应幅值：$B_1=\beta_d\cdot\dfrac{f_0}{k}=50\times\dfrac{400}{3.6\times10^6}=5.56mm$ （4 分）

（也可通过单自由度欠阻尼系统的运动方程来求稳态响应幅值，视答题情况予以给分）

（3）不计系统阻尼，二自由度系统的运动方程

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & m_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_0 & -k_0 \\ -k_0 & k_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_0 \\ 0 \end{bmatrix}\sin\omega_n t$$

系统频响函数矩阵

$$\boldsymbol{H}(\omega_n)=(\boldsymbol{K}-\omega_n^{\ 2}\boldsymbol{M})^{-1}=\begin{bmatrix} k_1+k_0-\omega_n^{\ 2}M_1 & -k_0 \\ -k_0 & k_0-\omega_n^{\ 2}m_0 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} k_0 & -k_0 \\ -k_0 & k_0-\omega_n^{\ 2}m_0 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} k_0-\omega_n^{\ 2}m_0 & k_0 \\ k_0 & k_0 \end{bmatrix},$$

其中 $\Delta=\det(\boldsymbol{Z}(\omega_n))=-k_0m_0\omega_n^{\ 2}$。

设系统位移稳态响应为 $\boldsymbol{u}(t)=\bar{\boldsymbol{u}}\sin\omega_n t$，可得

$$\boldsymbol{u}(t)=\bar{\boldsymbol{u}}\sin\omega_n t=\boldsymbol{H}(\omega)\bar{\boldsymbol{f}}\sin\omega_n t=\frac{f_0}{\Delta}\begin{bmatrix} k_0-\omega_n^{\ 2}m_0 \\ k_0 \end{bmatrix}\sin\omega_n t \qquad \text{（4 分）}$$

（4）要使设备的振幅最小，即 $k_0-\omega_n^{\ 2}m_0=0$，可得吸振器弹簧的刚度系数

$$k_0=\omega_n^{\ 2}m_0=200^2\times2.25=9.0\times10^4N\cdot m \qquad \text{（4 分）}$$

（5）此时吸振器质量块的振幅为

$$B_0=\left|\frac{f_0k_0}{\Delta}\right|=\frac{f_0}{k_0}=4.44mm \qquad \text{（4 分）}$$

（本题中未写单位或者单位写错者，每个涉及项扣 1 分）

南京航空航天大学

二〇二一～二〇二二学年 第 1 学期 **《结构动力学基础》考试试题**

考试日期： 2021 年 11 月 21 日 试卷类型： B 试卷代号：

班号 **学号** **姓名**

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	**总分**
得分											

（注意：除了特殊说明，本试卷所有数值计算结果保留小数点后 2 位，π**取 3.14，g 取 9.8m²/s）**

本题分数	20
得 分	

一、单项选择题（每小题 2 分，总分 20 分）

1. 一个振动系统可分解为惯性、弹性和阻尼三种力学元件组成，其中构成振动系统的必需要素是（ ）。

A、惯性和弹性　　B、惯性和阻尼

C、弹性和阻尼　　D、三者都是

2. 关于无阻尼单自由度系统，下列叙述正确的是（ ）。

A、该系统自由振动响应是一种简谐运动。

B、该系统的自由振动响应频率与初始条件有关。

C、系统的惯性元件质量越大，固有频率越大。

D、以上都不对。

3. 无阻尼单自由度系统在初始条件u_0和$\dot{u}_0$的作用下产生的自由振动响应为（ ）。

A、$u(t) = u_0 \sin\omega_n t + \dfrac{\dot{u}_0}{\omega_n}\cos\omega_n t$　　B、$u(t) = \dot{u}_0 \cos\omega_n t + \dfrac{u_0}{\omega_n}\sin\omega_n t$

C、$u(t) = u_0 \cos\omega_n t + \dfrac{\dot{u}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t$　　D、$u(t) = \dot{u}_0 \sin\omega_n t + \dfrac{u_0}{\omega_n}\cos\omega_n t$

4. 关于欠阻尼单自由度系统的自由振动，下列叙述正确的是：（ ）

A、该系统的自由振动是简谐振动。

B、该自由振动具有等时性，因此是个周期运动。

C、阻尼比越大，该自由振动的振幅衰减速度越快。

D、该自由振动相邻两次沿同一方向经过平衡位置的时间就是系统的固有周期。

5. 欠阻尼系统的共振现象，下列理解**不正确**的是（ ）

A、在共振频率附近的一个频带内，都可能有剧烈振动的现象。

B、利用共振现象可以实测系统阻尼。

C、系统阻尼比越小，共振区越窄，共振峰越陡峭。

D、共振都是有害的，结构设计时必须避免共振。

6. 为了改善仪表设备的振动环境，选择了弹簧和线性粘性阻尼元件组成的隔振器进行隔振，下列措施**不正确**的是（　）

A、隔振器工作时，应选择柔软的支撑弹簧，隔振效果越好。
B、隔振器工作时，应选择小阻尼元件，传递率低，隔振效果越好。
C、阻尼越小传递率越低，因此应选择无阻尼的隔振器。
D、使隔振器工作在 $\lambda > \sqrt{2}$ 的频率范围。

7. 零初始条件下，质量为 m 的单自由度系统质量块受到单位脉冲激励，则该系统（　）

A、在冲击结束时，获得初始速度为 $1/m$。
B、在冲击结束时，获得初始位移为 $1/m$。
C、受到了幅值为 1N 的冲击力。
D、以上均不对。

8. 对于具有刚体模态的多自由度振动系统，该系统（　）

A、可用柔度法建立刚度矩阵。
B、具有零固有频率，对应的振型向量也是零向量。
C、刚度矩阵不存在。
D、刚体模态运动无弹性势能。

9. 关于多自由度系统的固有振型向量，下列说法正确的是（　）

A、对质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵均具有加权正交性。

B、可作为基底来张成描述系统运动的空间。
C、振型向量中元素的数值具有唯一性。

D、由固有振型向量组成的固有振型矩阵不一定可逆。

10. 多自由度系统中的某个自由度为某一阶振型的节点，在该自由度上布置一传感器测试系统响应，其它自由度上施加简谐激励，则（　）

A、系统无响应。
B、通过该传感器的测试信号无法获取这一阶模态的振动成分。
C、传感器测试信号中仅包含这一阶模态的振动成分。
D、只能诱发这一阶模态的振动成分。

本题分数	20
得　分	

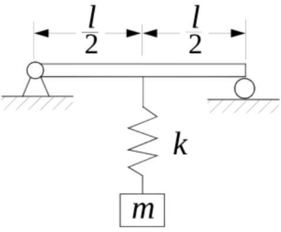
二、填空（每空2分，总分20分）

1、机械或结构系统在其__(_______)__附近的往复运动称为振动。

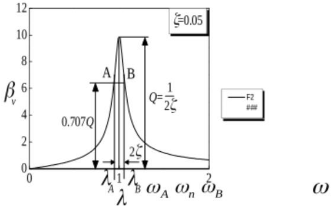
2、某单自由度系统产生振动位移响应为 $u = 5\sin(5t)$ mm，则该系统的加速度响应振幅为__(

)__m/s² 。

3、题3图中简支梁长 $l = 4\text{m}$ 、抗弯刚度 $EI = 1.96\times10^{6}\,\text{Nm}^2$ ，且 $k = 4.9\times10^{5}\,\text{N/m}$ ，已知简支梁中部静挠度变形为 $\Delta = \dfrac{Pl^3}{48EI}$ ，则系统的等效刚度为__(_________)__ N ·m 。



题3图



题4图

4、题4图为某次振动实验测试的速度共振曲线，已知曲线峰值对应的频率为 $25Hz$ ，半功率频

率分别为$\omega_A = 24.5Hz, \omega_B = 25.5Hz$，则该系统的阻尼比为（____）。

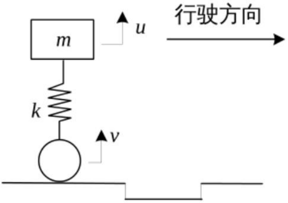
5、一质量为m的单自由度系统，经试验测出其阻尼自由振动频率为ω_d，在简谐激振力作用下速度共振的激振频率为ω_0，则系统的固有频率为（__）、阻尼系数为（______），小阻尼情况下振幅对数衰减率为（______）。

6、安装在弹性隔振器上的电机工作转速为3000rpm，电机质量22kg，欲使传到基础上的力为偏心质量惯性力的10%，则该电机安装的固有频率为（______）rad/s，隔振器弹簧刚度系数为（______）Nm。（不计阻尼影响）

7、若阻尼矩阵在固有振型矩阵变换下是对角阵，这种形式的阻尼被称为（____）。

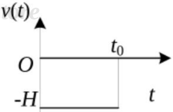
本题分数	10
得　分	

三、图（a）所示无阻尼单自由度车辆模型，在通过路面下陷台阶时受图（b）所示的基础位移激励，求该模型的时间响应历程$u(t)$。



(a)

本资源免费共享 收集网站 nuaa.site



(b)

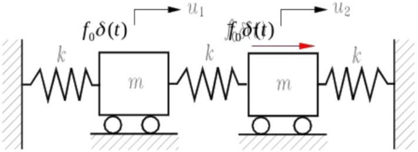
本题分数	15
得　分	

四、如图所示受脉冲激励的无阻尼二自由度系统，试：

（1）列出系统的振动方程；（5分）

（2）求系统的固有频率和使模态质量归一化振型；（5分）

（3）求零初始条件下系统在图示脉冲激励下的响应。（5分）



本题分数	15
得　分	

五、一端固定一端自由的等截面均质直杆，杆长度为 L，弹性模量为 E，密度为 ρ 。试:

（1）求该直杆的纵向振动固有频率和固有振型函数；（5 分）

（2）证明固有振型函数的正交性；（5 分）

（3）写出主质量和主刚度表达式。（5 分）

（提示：$\int(\cos x)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$，$\int(\sin x)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$）

本题分数	20
得　分	

六、旋转机械设备由于转子的偏心而导致稳态振动，此时可将设备视为受简谐力激励的单自由度系统，如图（a）所示，当激振频率接近系统固有频率时将引起设备强烈共振。如果系统本身的阻尼很小，不足以降低共振，人们可以在原有设备上串接一个附加的单自由度子系统，将设备上的振动“转移”到子系统上，或者说用子系统“吸收”原设备上的振动，从而实现减振目的，因此该附加的单自由度子系统又被称为“吸振器”。

在图（a）所示的旋转机械中，设备质量 $M_1 = 90\text{kg}$，支撑刚度 $k_1 = 3.6\times10^6\ \text{Nm}$，阻尼系数 $c_1 = 360(\text{Ns/m})$，完成下列（1）-（2）问：（8 分）

（1）求图（a）中该系统的固有频率 ω_n 和阻尼比 ζ；

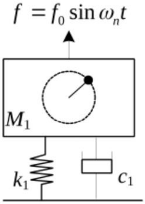
（2）图（a）中，当激振频率 $\omega = \omega_n$ 时，激振力幅值 $f_0 = 400\text{N}$，求共振时设备 M_1 的位移稳态响应幅值 B_1。

为了降低共振响应，在设备上连接如图（b）所示的吸振器，已知吸振器弹簧的刚度系数 $k_0 = 9.0\times10^4\ \text{Nm}$，忽略系统阻尼，完成下列（3）-（5）问：（12 分）

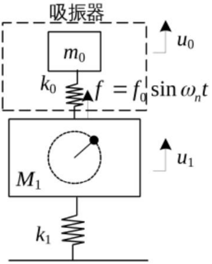
（3）建立设备与吸振器组合而成的系统受迫振动方程，并求系统位移稳态响应；

（4）若要使设备 M_1 的位移稳态响应振幅为零，确定吸振器振子质量 m_0；

（5）求此时吸振器质量块的位移稳态响应振幅 B_0 为多少?



(a) 旋转机械设备



(b) 设备+吸振器

二〇二一～二〇二二 学年 第一学期

课程名称：《结构动力学基础》参考答案及评分标准

命题教师： 试卷类型：B 试卷代号：

选择题（每题2分，总20分）

1 A, 2 A 3 C 4 C 5 D 6 C 7 A 8 D 9 B 10 B

填空（每空2分，总分20分）

1、平衡位置；2、0.125；3、3.675×10^5；4、0.02；

5、ω_0，$2m\sqrt{\omega_0^2-\omega_d^2}$，$2\pi\sqrt{1-\dfrac{\omega_d^2}{\omega_0^2}}$；6、94.723，$1.974\times10^5$；7、比例阻尼

参. （10分）

解：解：根据牛顿第二运动定律建立模型的运动方程

$$m\ddot{u}+ku=kv \qquad \text{（3分）}$$

系统的单位脉冲响应函数为

$$h(t)=\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t\text{，其中}\ \omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{（3分）}$$

基础激励 v 的函数为

$$v(t)=\begin{cases}-H, 0\le t\le t_0\\ 0, t>t_0\end{cases}$$

当 $0\le t\le t_0$ 时，

$$u=\int_0^t h(t-\tau)\cdot kv(\tau)d\tau=-\frac{kH}{m\omega_n^2}\int_0^t\sin\omega_n(t-\tau)d\tau=-H(1-\cos\omega_n t) \qquad \text{（2分）}$$

当 $t>t_0$ 时，

$$u=\int_0^{t_0} h(t-\tau)\cdot kv(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t} h(t-\tau)\cdot 0d\tau$$

$$=-\frac{kH}{m\omega_n^2}\int_0^{t_0}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau=-H\left[\cos\omega_n(t-t_0)-\cos\omega_n t\right] \qquad \text{（2分）}$$

（若上面写出了杜哈梅积分表达式而未完成积分运算，可酌情给2分）

四.　（15分）

解：（1）系统振动方程：

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix}+\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -f_0\delta(t) \\ f_0\delta(t) \end{pmatrix}$$ （5分）

（2）求解特征值问题

$$\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{\varphi}=0$$

可得固有频率和振型向量

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}\,(rad/s),\quad \omega_2=\sqrt{\frac{3k}{m}}\,(rad/s),\quad \boldsymbol{\varphi}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{\varphi}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

求主质量：$M_1=\boldsymbol{\varphi}_1^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_1=2m, M_2=\boldsymbol{\varphi}_2^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_2=2m$

可得以主质量归一化的振型向量为 $\boldsymbol{\varphi}_1'=\frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{\varphi}_2'=\frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ （5分）

（3）脉冲结束后，系统将产生在初始条件 $\boldsymbol{u}_0=\left[0,0\right]^T$，$\dot{\boldsymbol{u}}_0=[-f_0/m\quad f_0/m]^T$ 作用下的自由振动响应，可表示为各阶固有振动的线性组合

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{\varphi}_1(a_1\cos\omega_1 t+b_1\sin\omega_1 t)+\boldsymbol{\varphi}_2(a_2\cos\omega_2 t+b_2\sin\omega_2 t)$$

在主坐标下，系统的初始条件为

$$\boldsymbol{q}_0=\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{u}_0=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \dot{\boldsymbol{q}}_0=\boldsymbol{\Phi}^{-1}\dot{\boldsymbol{u}}_0=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -f_0/m \\ f_0/m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ f_0/m \end{pmatrix}$$

可得：$a_1=a_2=0, b_1=0, b_2=\frac{f_0}{m\omega_2}$

因此系统的响应为：$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{\varphi}_2\cdot b_2\sin\omega_2 t=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{f_0}{m\omega_2}\sin\omega_2 t$ （5分）

（也可以先求主坐标下的模态力，通过求解主坐标下的脉冲激励响应，然后线性组合来获得系统响应，视答题情况予以给分。）

伍.　　（15分）

解：（1）振型函数为

$$U(x)=a_1\cos\frac{\omega}{c}x+a_2\sin\frac{\omega}{c}x$$

由边界条件$U(0)=0$，$U'(l)=0$可得$a_1=0$和$\cos\frac{\omega}{c}l=0$。解纵向振动频率方程，可得

$$\frac{\omega}{c}l=\frac{n\pi}{2}\quad(n=1,3,5\cdots)$$

所以固有频率为：$\omega_n=\frac{n\pi c}{2l}=\frac{n\pi}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}},(n=1,3,5\cdots)$

固有振型函数为：$U_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{2l},(n=1,3,5\cdots)$　　　　（5分）

（2）第n阶固有频率和振型函数$\omega_n,U_n(x)$应满足

$$U_n''(x)+(\frac{\omega_n}{c})^2U_n(x)=0$$

乘以另一阶振型函数$U_m(x)$，并沿杆长积分，利用分部积分法和固定边界条件，可得

$$(\frac{\omega_n}{c})^2\int_0^l U_m(x)U_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^l U_n'(x)U_m'(x)\mathrm{d}x$$

同理可得： $$(\frac{\omega_m}{c})^2\int_0^l U_m(x)U_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^l U_m'(x)U_n'(x)\mathrm{d}x$$

上面两式相减，可得： $$\frac{\omega_n^2-\omega_m^2}{c^2}\int_0^l U_nU_m\mathrm{d}x=0$$

当 $n\neq m$ 时，杆的固有频率互异，从而可得杆固有振型函数的正交关系：

$$\int_0^l U_m(x)U_n(x)\mathrm{d}x=0,\quad (n\neq m)$$

（5 分）

$$\int_0^l U_n'(x)U_m'(x)\mathrm{d}x=0\text{，}(n\neq m)$$

（也可以直接代入振型函数，用三角函数的正交性来证明）

（3）当 $n=m$ 时，可得主质量和主刚度表达式：

$$M_n=\int_0^l\rho AU_n^2dx=\rho A\int_0^l(\sin\frac{n\pi x}{2l})^2dx=\frac{1}{2}\rho Al$$

（5 分）

$$K_n=\omega_n{}^2M_n=(n\pi)^2\frac{EA}{8l},(n=1,3,5\cdots)$$

（若写出了主质量和主刚度的表达式，但未完成积分计算或者计算结果不正确，可酌情给 3 分）

六．（20 分）

解：（1） $\omega_n=\sqrt{\frac{k_1}{M_1}}=200(rad/s)$ （2 分）

$$\zeta=\frac{c_1}{2\sqrt{M_1k_1}}=\frac{360}{2\times\sqrt{90\times3.6\times10^6}}=0.01$$

（2 分）

（2）当 $\omega=\omega_n$ 时，位移振幅放大系数为： $\beta_d=\frac{1}{2\zeta}=50$

此时设备稳态位移响应幅值：$B_1=\beta_d\cdot\dfrac{f_0}{k}=50\times\dfrac{400}{3.6\times10^6}=5.56mm$ （4分）

（也可通过单自由度欠阻尼系统的运动方程来求稳态响应幅值，视答题情况予以给分）

（3）不计系统阻尼，二自由度系统的运动方程

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & m_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_0 & -k_0 \\ -k_0 & k_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_0 \\ 0 \end{bmatrix}\sin\omega_n t$$

系统频响函数矩阵

$$\boldsymbol{H}(\omega_n)=(\boldsymbol{K}-\omega_n{}^2\boldsymbol{M})^{-1}=\begin{bmatrix} k_1+k_0-\omega_n{}^2M_1 & -k_0 \\ -k_0 & k_0-\omega_n{}^2m_0 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} k_0 & -k_0 \\ -k_0 & k_0-\omega_n{}^2m_0 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} k_0-\omega_n{}^2m_0 & k_0 \\ k_0 & k_0 \end{bmatrix},$$

其中 $\Delta=\det(\boldsymbol{Z}(\omega_n))=-k_0m_0\omega_n{}^2$ 。

设系统位移稳态响应为 $\boldsymbol{u}(t)=\bar{\boldsymbol{u}}\sin\omega_n t$ ，可得

$$\boldsymbol{u}(t)=\bar{\boldsymbol{u}}\sin\omega_n t=\boldsymbol{H}(\omega)\bar{\boldsymbol{f}}\sin\omega_n t=\frac{f_0}{\Delta}\begin{bmatrix} k_0-\omega_n{}^2m_0 \\ k_0 \end{bmatrix}\sin\omega_n t \qquad \text{（4分）}$$

（4）要使设备的振幅为零，即 $k_0-\omega_n{}^2m_0=0$ ，可得吸振器振子质量

$$m_0=\frac{k_0}{\omega_n{}^2}=\frac{9.0\times10^4}{200^2}=2.25kg \qquad \text{（4分）}$$

（5）此时吸振器质量块的振幅为

$$B_0=\left|\frac{f_0k_0}{\Delta}\right|=\frac{f_0}{k_0}=4.44mm \qquad \text{（4分）}$$

（本题中未写单位或者单位写错者，每个涉及项扣1分）