

南京航空航天大学

第 1 页 (共 2 页)

| | | | | | | | | | | | |
|-------------------------------|---|---|----|-----------|---|----|---|-------|---|---|----|
| 二〇一九~二〇二〇 学年 第I学期 《复变函数》 考试试题 | | | | | | | | | | | |
| 考试日期: 2019 年11月1日 | | | | 试卷类型: A 卷 | | | | 试卷代号: | | | |
| 班号 | | | 学号 | | | 姓名 | | | | | |
| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 总分 |
| 得分 | | | | | | | | | | | |

一. 填空题 (每空 3 分, 共 24 分)

1. $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2-z} dz =$ _____

2. $e^{2z} = -3 + 4i$, 则 $z =$ _____

3. $(x - \sqrt{5}) + i = i$, $x \in R$, 则 $\frac{1+xi}{x-i} + 1$ 的三角表示式是 _____

4. $\text{Res}[\frac{1-\cos z}{z^4}, 0] =$ _____, $\text{Res}[\frac{1}{1-z}, 1] =$ _____

5. 设 $f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^3 \sin z}$, 则 $f(z)$ 的奇点 _____ (如果是极点, 要写出级)

6. $f(z) = z^3$ 在 $z = i$ 处的转动角为 _____

7. 幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 z^n$ 的收敛半径为 _____

二、若 $u(x, y) = e^y \sin x + 2x + 1$, 求证 $u(x, y)$ 为调和函数。并求解析函数

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 其中 $z = x + iy$, 使得 $f(0) = 1 + i$ 。(12 分)

三、 $f(z) = 4x^2 - 4y^2 - 2 + e^x \sin y + 8xyi - ie^x \cos y + 5i$, 其中 $z = x + iy$, 求出其导数并证明 $f(z)$ 解析。(12 分)

四、将 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z+2)}$ 分别在 $0 < |z| < 1$ 和 $1 < |z-1| < 3$ 内展成洛朗级数。(12 分)

五、计算下列积分的值（每题 5 分，共 20 分）

$$1. \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z(z-5)^2} dz$$

$$2. \oint_{|z|=1} \frac{z - \sin z}{z^6} dz$$

$$3. \oint_{|z|=3} \frac{3z+2}{z(z+1)^2} dz$$

$$4. \oint_{|z|=4} \frac{1}{z \sin z} dz$$

六、设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $|f(z)|$ 为常数，求证 $f(z)$ 在 D 内也是常数。（10 分）

七、求将右半平面 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 共形映射成单位圆 $|w| < 1$ 的分式线性映射 $w = f(z)$ ，使其满足 $f(1) = 0, f(i) = -1$ 。（10 分）