1. 设 $A,B,C$ 为三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{12}$，则 $A,B,C$ 中恰有一个事件发生的概率为________.

2. 从1,2,3,4,5 五个数中任取 3 个不同的数排成三位数，则所得三位数为偶数的概率为________.

3. 设随机变量 $X$ 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ 0.3, & 1\le x<3 \\ 1, & x\ge 3 \end{cases}$，则 $P\{X=3\}=$ ________.

4.已知随机变量 $X$ 服从参数为 1 的泊松分布，$Y$ 服从指数分布，$X,Y$ 的相关系数为 0.25，若 $D(3X-2Y+2)=8$，则 $E(3X-2Y+2)=$ ________.

5. 设 $X_1,X_2,X_3,X_4,X_5$ 是取自正态总体 $N(0,4)$ 的简单随机样本，设 $Y=a(X_1+X_2)^2+b(X_3+X_4+X_5)^2$，$\overline{X},S^2$ 分别为样本均值和样本方差，若Y服从期望为 2 的 $\chi^2$ 分布，则 $D(a\overline{X}^2-bS^2)=$ ________.

6. 设总体 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\theta^2}{(\theta^2-1)x^3},1<x<\theta\\0,其他\end{cases}$,其中 $\theta>1$ 为未知参数

对于假设检验问题，$H_0:\theta=2$，$H_1:\theta\neq 2$，现观测一个样本，若拒绝

$=\{X\leq 3/2\}$，则该检验的显著性水平为________.

设总体 $X$ 服从 $[0,\theta]$ 上的均匀分布，$X_1,X_2,X_3$ 为来自总体的简单

若 $\tilde{\theta}=k\min\limits_{1\leq i\leq 3}\{X_i\}$ 为 $\theta$ 的无偏估计量，则 $k=$ ________.

| 本题分数 | |
|---|---|
| 得　分 | |

题(每题3分)



1. 对于任意事件A和B，下列说法正确的是(　　)

(A)若 $AB \neq \phi$，则 $A,B$ 一定独立　(B)若 $AB \neq \phi$，则 $A,B$ 有可能独立

(C)若 $AB=\phi$，则 $A,B$ 一定独立　(D)若 $AB=\phi$，则 $A,B$ 一定不独立

2. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，检验 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu \neq \mu_0$，则(　　)

(A)若在 $\alpha=0.01$ 下拒绝 $H_0$，则在 $\alpha=0.05$ 下必拒绝 $H_0$

(B)若在 $\alpha=0.01$ 下拒绝 $H_0$，则在 $\alpha=0.05$ 下必接受 $H_0$

(C)若在 $\alpha=0.01$ 下接受 $H_0$，则在 $\alpha=0.05$ 下必拒绝 $H_0$

(D)若在 $\alpha=0.01$ 下接受 $H_0$，则在 $\alpha=0.05$ 下必接受 $H_0$

3. 设随机变量 $X$ 的密度为 $f(x)$，满足 $f(1+x)=f(1-x)$，且 $\int_0^2 f(x)dx=0.6$

$P\{X<0\}=$(　　)

(A)0.2　(B)0.3　(C)0.4　(D)0.5

| 得　分 | |
|---|---|

算题(每题 6 分)

1. 一个学生接连参加同一课程的两次考试。第一

格的概率为 3/4,若第一次及格则第二次及格的概

为 3/4 ;若第一次不及格则第二次及格的概率为 3/8。若已知他第

格，求他第一次及格的概率。

已知他第二

合格

2. 设二维随机变量$(X,Y)$的联合概率密度为$f(x,y)=\begin{cases} kxy, 0<x<y<1 \\ 0, 其他 \end{cases}$，求$k$的值及$Z=X+Y$的概率密度。

三.(3) 某人独立投篮，投中率为 $\frac{1}{5}$，若中一球则停止，以X表示所需投篮次数，求X分布律及其方差D(X)

4. 设 $X_1,X_2,X_3$ 为来自总体 $N(1,1)$ 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，随机变量 $Y$ 期望为 2 的指数分布，Z 服从区间(-5,5)上的均匀分布，且 $Y$、$Z$ 相互独

求 $P\{\max(Y,Z) > D(\sum_{i=1}^{3}(X_i-\overline{X})^2)\}$。

5. 某市有 50 个独立工作的无线寻呼台，每个寻呼台在每分钟内收到的呼叫次数服从参数为 0.05 的泊松分布。利用中心极限定理求该市在某时刻一分钟内呼叫次数总和大于 3 次的概率(结果用 Φ 函数表示)。

四 设$X$的概率密度$f(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1 \\ 0, & 其他\end{cases}$

(1)求$k$ (2)求$X$分布函数 (3)求$Y=F(X)$的概率密度

| 本题分数 | 8 |
| --- | --- |
| 得　分 | |

五．按规定，100g 罐头番茄汁中平均维 C 含量不得少于 21mg/g，维 C 含量服从正太分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 $\mu,\sigma^2$ 均未知。现抽取 16 个罐头，测得其 100g 番茄汁中维 C 含量(m/g)的样本均值为 20，样本标准差为 3.984。

(1) 问对于显著性水平 $\alpha=0.05$,能否认为这批罐头合格？

(2) 求总体方差的置信水平为 0.95 的置信区间.（写出具体推导过程）

| 本题分数 | 8 |
| --- | --- |
| 得　　分 | |

六. 设总体 $X$ 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{(\mu-\ln x)^2}{2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，

其中 $\mu$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 $X$ 的样本，求 $\mu$ 的矩估计量和最大似然估计量。

| 本题分数 | 14 |
|---|---|
| 得　分 | |

七. 设随机变量$(X,Y)$服从区域$x^2 \le y \le x$上的均匀分布。(1)求联合概率密度$f(x,y)$；(2)求Y的边缘概率密度$f_Y(y)$；(3)求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$；(4)X,Y是否相互独立？为什么？(5)通过计算说明$X,Y$是否不相关？(6)求$P\{X+Y\le 1\}$。

一、

1、 0.3 2. $\frac{80}{243}$

一、

3、 $\sigma_1^2+\sigma_2^2-4$

一/

4) 3.

5) $\frac{1}{24}$

6)

7) 2.

二/1 B.
2 A.
3 A

三、1 记"该学生第i次考试及格"为事件$A_i$, $i=1,2$.

$P(A_1)=\frac{3}{4}$, $P(A_2|A_1)=\frac{3}{4}$

$P(\bar{A}_1)=\frac{1}{4}$  $P(A_2|\bar{A}_1)=\frac{3}{8}$

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\left(1+\frac{3}{4}\right)=\frac{21}{32}.$$

$$P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1)P(A_2|A_1)}{P(A_2)}=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{4}}=\frac{3}{14}.$$

$dx$

三/2 $\int_0^1 kx\,dx\int_x^1 y\,dy$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 kx\cdot(1-x^2)\,dx$

$=\frac{k}{2}\int_0^1 x-x^3\,dx$

$=\frac{k}{2}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{k}{8}$

$\frac{k}{8}=1$

$\Rightarrow k=8.$

2. 当 $0 \le z < 1$ 时, $z = x + y$

$$F_Z(z) = 8\int_0^{\frac{z}{2}} x\,dx \int_x^{z-x} y\,dy$$

$$= 4\int_0^{\frac{z}{2}} x\left[(z-x)^2 - x^2\right] dx$$

$$= 4\int_0^{\frac{z}{2}} x(z^2 - 2zx)\,dx$$

$$= 2\cdot\frac{z^2}{4}\cdot z^2 - 8z\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{z^3}{8}$$

$$= \frac{z^4}{8} - \frac{1}{3}z^4$$

$$= \frac{-5}{24}z^4$$

$$\therefore f_Z(z) = \begin{cases} -\frac{5}{6}z^3 & 0<z<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

三/3. $P(X=1)=\frac{1}{5}$

$P(X=2)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$

$P(X=3)=\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5}$ ⇒ 分布律

$P\{X=k\}=\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{5}$

$P\{X=k\}=\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{5} \quad k=1,2,3,\ldots\ldots$

4. $\sum_{i=1}^{3}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2(2)$

$D\left(\sum_{i=1}^{3}(X_i-\bar{X})^2\right)=4$

$\therefore P(\max(Y,Z)>4)$

$=1-P(\max(Y,Z)<4)$

$=1-P(Y<4)P(Z<4)$

$=1-\int_0^4 \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\,dx \quad \frac{9}{10}$

$=1-\left(-e^{-\frac{1}{2}x}\right)\Big|_0^4 \times\frac{9}{10}$

$=1-\frac{9}{10}\times(1-e^{-2})=0.2218$

三/5

**解** 设随机变量 $X_i(i=1, 2, \cdots, 50)$ 表示第 $i$ 个寻呼台在给定时刻一分钟内收到的呼叫次数，则该市在给定时刻一分钟内的呼叫总次数为 $X=\sum_{i=1}^{50}X_i$. 由题意知，随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_{50}$ 独立同分布于泊松分布，且

$$E(X_i)=\lambda=0.05,\ D(X_i)=\lambda=0.05,\ i=1, 2, \cdots, 50,$$

则由林德伯格-勒维中心极限定理知，随机变量 $X$ 近似服从正态分布 $N(n\lambda, n\lambda)$，即 $X\sim N(2.5, 2.5)$. 从而

$$P\{X>3\}=P\left\{\frac{X-2.5}{\sqrt{2.5}}>\frac{3-2.5}{\sqrt{2.5}}\right\}=1-\Phi(\sqrt{0.1})$$

Ⅱ (1) $\int_{-1}^{1} \frac{k}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= k \arcsin x \Big|_{-1}^{1}$

$= k \times \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$

$= k\pi = 1$

$\Rightarrow k = \frac{1}{\pi}$

2 (2) 当 $-1 \le x < 1$ 时

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \arcsin x \Big|_{-1}^{x}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( \arcsin x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \arcsin x + \frac{1}{2}$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{\pi} \arcsin x + \frac{1}{2} & -1 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1. \end{cases}$$

五. (1) 假设: $H_0: \mu \geq 21$

$H_1: \mu < 21$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

$$= \frac{20-21}{3.984/\sqrt{16}}$$

$$= -1.004$$

[illegible]分布.

2(2).

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \qquad \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$$

$$= \frac{(16-1)\times 3.984^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(15)} \qquad = \frac{15\times 3.984^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(15)}$$

令 $E(X)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{(\mu-\ln x)^2}{2}}\cdot x\,dx$

矩估计量.

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\mu-\ln x)^2}{2}}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu^2+\ln^2 x-2\mu\ln x}{2}}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu^2}{2}}e^{-\frac{1}{2}\ln^2 x}e^{\mu\ln x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu^2}{2}}e^{-\ln x}x^{\mu}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu^2}{2}}x^{\mu-1}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu^2}{2}}\frac{1}{\mu}=\bar{X}\Rightarrow\frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{\mu}=\bar{X}\sqrt{2\pi}$$

解 $L(\mu)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{x_1\cdots x_n} e^{-\frac{(\mu-\ln x_1)^2}{2}}\cdots e^{-\frac{(\mu-\ln x_n)^2}{2}}$

$L(\mu)=(\sqrt{2\pi})^{-n}\frac{1}{x_1\cdots x_n} e^{-\frac{(\mu-\ln x_1)^2}{2}}\cdots e^{-\frac{(\mu-\ln x_n)^2}{2}}$

$\ln L(\mu)= -n\ln\sqrt{2\pi} - \ln x_1\cdots x_n - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mu-\ln x_i)^2$

$= -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mu-\ln x_i)^2$

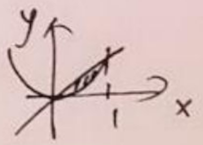
$\frac{d\ln L(\mu)}{d\mu} = -\sum_{i=1}^{n}(\mu-\ln x_i)=0$

$\Rightarrow \hat{\mu}=\ln x_i$

$\Rightarrow$ 最大似然估计量 $\hat{\mu}=\ln x_i$

t. (1). $S=\int_0^1 x-x^2\,dx$

$= \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$




$\therefore f(x,y)=\begin{cases} 6 & (x,y)\in D \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(2). $\cancel{f_Y(y)=\int_{x^2}^{x} 6\,dx}$

$f_X(x)=\int_{x^2}^{x} 6\,dy$

$=\begin{cases} 6(x-x^2) & 0<x<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{y}^{\sqrt{y}} 6\,dx$

$=\begin{cases} 6(\sqrt{y}-y) & 0<y<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(3). $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{6}{6(\sqrt{y}-y)}$

$=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y}-y} & 0<y<1 \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$

(4) $\because f_X(x)\cdot f_Y(y)\neq f(x,y)$

$\therefore X$ 与 $Y$ 不独立.

(5). $E(X) = \int_0^1 6x\,dx \int_{x^2}^{x} dy$

$= \int_0^1 6x(x-x^2)\,dx$

$= 6\int_0^1 x^2-x^3\,dx$

$= \frac{1}{2}$

$E(XY) = \int_0^1 6x\,dx \int_{x^2}^{x} y\,dy$

$= \int_0^1 3x(x^2-x^4)\,dx$

$= \int_0^1 3x^3-3x^5\,dx$

$= \frac{1}{4}$

$E(Y) = \int_0^1 6\,dx \int_{x^2}^{x} y\,dy$

$= \int_0^1 3(x^2-x^4)\,dx$

$= 1-\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$cov(X,Y) \neq 0$

$\Rightarrow \rho_{X,Y} \neq 0 \Rightarrow$ X与Y相关

(6) $P\{X+Y \le 1\}$

$= 1 - P\{X+Y > 1\}$

$= 1 - \int_{\frac{1}{2}}^{1} 6\,dx \int_{x^2}^{x} dy$

$= 1 - \int_{\frac{1}{2}}^{1} 6x - 6x^2\,dx$

$= 1 - 6\int_{\frac{1}{2}}^{1} x - x^2\,dx$

$= 1 - 6 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{7}{8}\right)$

$= \frac{1}{2}$