南京航空航天大学

研究生考试参考答案及评分标准

二00九～二0一0 学年　第 1 学期

课程名称：矩阵论 **A** 卷　　课程编号：A000003

参考答案及评分标准制定人：《矩阵论》课程组　考试日期：2010 年 1 月 12 日

一、（**20** 分）

（**1**）特征值多项式为 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^3$ ---------**3** 分

特征值为 **1**（三重） ---------**3** 分

（**2**）不变因子　$1,\ (\lambda-1),\ (\lambda-1)^2$ ---------**3** 分

初等因子　$(\lambda-1),\ (\lambda-1)^2$ ---------**2** 分

最小多项式　$m(\lambda)=(\lambda-1)^2$ ---------**1** 分

（**3**）**Jordan** 标准形 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ ---------**3** 分

（**4**）由 $P^{-1}AP=J$，$AP=PJ$，记 $P=(p_1\ \ p_2\ \ p_3)$，则 $\begin{cases}Ap_1=p_1\\Ap_2=p_2\\Ap_3=p_2+p_3\end{cases}$

$(I-A)x=0$ 可求无关解 $\xi=(-1\ \ 1\ \ 0)^T$，$\eta=(3\ \ 0\ \ 1)^T$

取 $p_1=\xi$，$p_2=k_1\xi+k_2\eta$，k_1，k_2 使 p_1，p_2 无关且保证 $(I-A)p_3=-p_2$ 有解。

$k_1=k_2\neq 0$ 满足，故可取 $k_1=k_2=1$，$p_2=(2\ \ 1\ \ 1)^T$，$p_3=(2\ \ 0\ \ 1)^T$

则 $P=(p_1\ \ p_2\ \ p_3)$. ---------**5** 分

二、（**20** 分）

（**1**）$\|A\|_1=3$；$\|A\|_2=3$；$\|A\|_\infty=5$；$\|A\|_F=\sqrt{14}$ ---------**8** 分

（**2**）证明：

容易验证：$\|A\|_* = n\cdot\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$满足矩阵范数三个条件：非负性，正齐次性，三角不等式

相容性：

$$\|AB\|_* = n\cdot\max_{i,j}|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}|\le n\cdot\max_{i,j}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|\le n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|\sum_{k=1}^{n}|b_{ij}|$$

---------8 分

$$\le n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|\cdot n\cdot\max_{i,j}|b_{ij}| = \|A\|_*\cdot\|B\|_*$$

（**3**）由条件知 A 可对角化，存在可逆矩阵 **P** 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \mathrm{O} & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$，其中 $\lambda_i\ne\lambda_j$。

又 $AB=BA$ 则 $P^{-1}AP\cdot P^{-1}BP = P^{-1}BP\cdot P^{-1}AP$，由 $\lambda_i\ne\lambda_j$，故 $P^{-1}BP$ 为对角形，

即 B 可对角化。 **---------4** 分

三．解：（**1**）$\begin{cases}T(1+x+x^2)=4+x^2\\ T(x+x^2)=3-x+2x^2\\ T(x^2)=x^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}T(1)=1+x-x^2\\ T(x)=3-x+x^2\\ T(x^2)=x^2\end{cases}$ 故

$T(1\ x\ x^2)=(1\ x\ x^2)\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 故所求矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ **--------5** 分

（**2**）$R(T)=span(T(1),T(x),T(x^2))$，又因为 $T(1),T(x),T(x^2)$ 线性无关，故

$\dim(R(T))=\dim span(T(1),T(x),T(x^2))=3$，基为 $T(1),T(x),T(x^2)$；

$\ker(T)=\{p(x)|T(p(x))=0\}$ 设 $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$，易求 $a_0=a_1=a_2=0$

$\ker(T)=\{0\}$ $\dim(\ker(T))=0$ **---------5** 分

（**3**）变换 T 在基 $1,x,x^2$ 下的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则 A 的特征值及特征向量为

$\lambda_1=1,\quad \eta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\lambda_2=2,\quad \eta_2=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$，$\lambda_3=-2,\quad \eta_3=\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$

故变换 T 的特征值及特征向量，

$\lambda_1 = 1$，　$\xi_1 = x^2$，$\lambda_2 = 2$，　$\xi_1 = 3 + x - 2x^2$，$\lambda_3 = -2$，　$\xi_1 = 3 - 3x + 2x^2$ **---------5** 分

（**4**）对 $1, x, x^2$ 进行标准正交化得：

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}x \quad , \quad \varepsilon_3 = \frac{\sqrt{10}}{4}\left(3x^2 - 1\right)$$ **---------5** 分

四．解（**1**）$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & t \\ -1 & t & 4 \end{pmatrix}$，$\Delta_1 = 4 > 0, \Delta_2 = 16 > 0$，　$\Delta_3 = 60 - 4t^2 > 0$ 则

$$-\sqrt{15} < t < \sqrt{15}$$ **---------8** 分

（**2**）由条件，存在酉阵 U，使 $U^H A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 故

$$A \ge 0 \iff U^H A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \ge 0 \iff \lambda_i \ge 0 (i = 1 \cdots n)$$ **---------6** 分

（**3**）　$A \ge 0$，存在酉阵 U，使 $U^H A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$，　$\lambda_i \ge 0 (i = 1 \cdots n)$

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^H，\quad A + I = U \begin{pmatrix} \lambda_1 + 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n + 1 \end{pmatrix} U^H，$$

$$\left|A + I\right| = \left| U \begin{pmatrix} \lambda_1 + 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n + 1 \end{pmatrix} U^H \right| = (\lambda_1 + 1) \cdots (\lambda_n + 1) \ge 1$$

等号成立的充分必要条件为 $\lambda_i = 0\left(i = 1 \cdots n\right)$ 即 $A = 0$ **---------6** 分

docin 豆丁 www.docin.com

五、（**20** 分）

（**1**） A 的满秩分解为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$$ **---------5** 分

$$A^{+}=C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & -5 & 4\\ -2 & -4 & -1\end{pmatrix}$$ **---------5** 分

由 $AA^{+}b=b$，故方程组相容，通解为

$$x=A^{+}b+\left(I-A^{+}A\right)y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.5 & 0 & 0.5\\ 0 & 0 & 0\\ 0.5 & 0 & 0.5\end{pmatrix}y$$

其中 y 任意. **---------5** 分

（**3**）矩阵方程 $AXB=C$ 有解的充分必要条件是 $AA^{+}CB^{+}B=C$ 。

必要条件：取 $X=A^{+}CB^{+}$ 满足 $AXB=C$ ，故有解；

充分条件： $AXB=C$ 有解，则 $C=AXB=AA^{+}AXBB^{+}B=AA^{+}CB^{+}B$ **---------5** 分

docin 豆丁
www.docin.com