# 南 京 航 空 航 天 大 学

## 研究生考试参考答案及评分标准



二 00 八 ～二 00 九　学年　　第 1 学期

课程名称：矩阵论 **A 卷**　　　　课程编号：A000003

参考答案及评分标准制定人：《矩阵论》课程组　　考试日期：2009 年 1 月 13 日

一、(20 分)

(1) 特征值多项式为 $f(\lambda)=\left|\lambda I-A\right|=\lambda(\lambda+1)^2$ ---------------3

特征值为 0，—1（二重） ----------------3

(2) 不变因子 $1,1,\lambda(\lambda+1)^2$ -------------6

初等因子 $\lambda,(\lambda+1)^2$ --------------2

最小多项式 $m(\lambda)=\lambda(\lambda+1)^2$ ---------------2

(3) Jordan 标准形 $\begin{bmatrix} -1 & 1 & \\ & -1` & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}$ ----------------------4

二、(20 分)

(1) $\left\|A\right\|_1=3;\left\|A\right\|_2=\sqrt{3};\left\|A\right\|_\infty=2;\left\|A\right\|_F=\sqrt{5}$ --------- 2’ *4 = 8

(2) 证明：

(i) 因为 $A$ 可逆，则 $A$ 的特征值均非零。设 $\lambda$ 是 $A$ 的任一特征值，$x$ 是相应的特征向量，则

$$Ax=\lambda x,\quad A^{-1}x=\lambda^{-1}x$$

因为 $\|.\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的相容矩阵范数，则存在与 $\|.\|$ 相容的向量范数 $\|.\|_a$，从而

$$|\lambda|\left\|x\right\|_a=\left\|\lambda x\right\|_a=\left\|Ax\right\|_a\le\left\|A\right\|\left\|x\right\|_a,\quad |\lambda^{-1}|\left\|x\right\|_a\le\left\|A^{-1}\right\|\left\|x\right\|_a$$

因为 $\left\|x\right\|_a>0$，则 $\left\|A^{-1}\right\|^{-1}\le|\lambda|\le\left\|A\right\|$。 ---------6

(ii) 容易验证：$\left\|A\right\|_P=\left\|P^{-1}AP\right\|$ 满足相容矩阵范数的四个条件。 -----------6

三、（20 分）

（1）$A$ 的满秩分解为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$ -----------------5

$$A^{+}=C^{T}(CC^{T})^{-1}(B^{T}B)^{-1}B^{T}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\0 & 1 & 0\\\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$ ---------5

（2）因为 $AA^{+}b=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\neq b$; 所以不相容的。 -----------3

其极小最小二乘通解为 $x=A^{+}b=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\2\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ -----------3

（3）因为 $x$ 是不相容线性方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解当且仅 $x$ 是如下相容线性方程组

$$A^{T}Ax=A^{T}b$$

的解，所以不相容线性方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解唯一当且仅当 $A^{T}A$ 非奇异，即 $rank(A^{T}A)=n$ 。因为 $rank(A^{T}A)=rank(A)$，所以不相容线性方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解唯一当且仅当 $A$ 列满秩。 -----------4

四、(**20 分**)

(1) dim(V)=3, ------2

V 的一组基为 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ ------3

(2) 因为

$$T(\varepsilon_1)=\varepsilon_1+\varepsilon_2,T(\varepsilon_2)=2\varepsilon_2,T(\varepsilon_3)=-\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

则线性变换 $T$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&-1\\0&0&1\end{bmatrix}。$$ ------------5

(3) 因为 $T$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵 A 非奇异, $Ker(T)=N(T)=\{0\},\dim(N(T))=0$ 。---2

$R(T)=span(T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2),T(\varepsilon_3))=span(\varepsilon_1+\varepsilon_2,2\varepsilon_2,-\varepsilon_2+\varepsilon_3)=V$ , 则 $\dim(R(T))=3$ 。

----3

(4) 因为矩阵 A 的初等因子为 $\lambda-2,\lambda-1,\lambda-1$,所以矩阵 A 可对角化。因为线性变换在不同基下的矩阵是相似的,因此存在一组基使得(2)中线性变换 $T$ 在所取基下的矩阵为对角矩阵。

因为矩阵 A 对应于特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=1$ 的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,则取 V 的一组基为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $T$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}。$$ ------------5

五、（20 分）

（1）因为 A 为 n 阶 Hermite 矩阵，则存在 n 阶酉矩阵 U，使得

$$A = U\Lambda U^H,$$

其中 $\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，并且 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$。令

$$B = Udiag(\lambda_1^{\frac{1}{3}}, \cdots, \lambda_n^{\frac{1}{3}})U^H,$$

则 B 是 n 阶 Hermite 矩阵，并且 $A = B^3$。 -------------8

设有另一个 n 阶 Hermite 矩阵 E，使得 $A = E^3$，则 E 有谱分解

$$E = Vdiag(\mu_1, \cdots, \mu_n)V^H$$

其中 $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$。因为 $A = E^3$，则 $\mu_i^3 = \lambda_i (i = 1, \cdots, n)$，$E = Vdiag(\lambda_1^{\frac{1}{3}}, \cdots, \lambda_n^{\frac{1}{3}})V^H$。由 $A = B^3 = E^3$，有

$$Udiag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)U^H = Vdiag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)V^H。$$

记 $P = U^H V = (p_{ij})$，则 $diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)P = Pdiag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，从而

$$\lambda_i p_{ij} = \lambda_j p_{ij} \quad (i, j = 1, \cdots, n),$$

于是

$$\lambda_i^{\frac{1}{3}} p_{ij} = \lambda_j^{\frac{1}{3}} p_{ij} \quad (i, j = 1, \cdots, n),$$

即

$$diag(\lambda_1^{\frac{1}{3}}, \cdots, \lambda_n^{\frac{1}{3}})P = Pdiag(\lambda_1^{\frac{1}{3}}, \cdots, \lambda_n^{\frac{1}{3}}),$$

因此 $B = Udiag(\lambda_1^{\frac{1}{3}}, \cdots, \lambda_n^{\frac{1}{3}})U^H = Vdiag(\lambda_1^{\frac{1}{3}}, \cdots, \lambda_n^{\frac{1}{3}})V^H = E$。 -------------4

（2）因为 $A \geq 0$，所以 A 的特征值均非负。设 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，且 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$，则 $A^2$ 的特征值为 $\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2$，于是

$$(tr(A))^2 = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)^2 \geq \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 = tr(A^2)。$$ --------------4

（3）因为 $A > 0$，则 A 可逆，并且 $A^{-1} > 0$。由 $I = AA^{-1}$，可得

$$n = tr(I) = tr(AA^{-1}) = tr(A^H A^{-1}) \leq \left[tr(A^H A)tr(A^{-H} A^{-1})\right]^{\frac{1}{2}} = \left[tr(A^2)tr(A^{-2})\right]^{\frac{1}{2}}$$

由（2）知 $\sqrt{tr(A^2)} \leq tr(A), \sqrt{tr(A^{-2})} \leq tr(A^{-1})$，因此 $n \leq tr(A)tr(A^{-1})$。 ------------4