南京航空航天大学

《高等数学I（2）》期末考试试题

二〇二〇～二〇二一学年 第2学期 试卷代号：082259

考试日期：2021年10月16日 试卷类型：A卷

班号 学号 姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

本题分数	30
得 分	

一、填空题（每空3分）

1. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=$ __________；

2. 设函数 $z=e^{xy}$，在点$(1,1)$处当$\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$时的全微分$\mathrm{d}z=$ ________；

3. 曲面$e^z-z+xy=3$在点$(2,1,0)$处的切平面方程为__________；

4. 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1$，则球面上点$(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$处指向球面内侧的单位法向量为__________；

5. 设向量场$\mathbf{A}=x(1+x^2z)\mathbf{i}+y(1-x^2z)\mathbf{j}+z(1-x^2z)\mathbf{k}$，则其在点$M(1,2,-1)$处的散度$\mathrm{div}\mathbf{A}|_M=$ __________；

6. 若$|q|<1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^n$的和为__________；

7. 设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=2$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{3^n}(x+3)^n$的收敛半径$R=$ __________；

设函数$f(x)$为周期是2π的周期函数，它在$(-\pi,\pi]$上的表达式为

$f(x)=\begin{cases}-x,-\pi<x\le 0\\ 0,0<x\le\pi\end{cases}$，$s(x)$为$f(x)$的以$2\pi$为周期的傅里叶级数的和函数，则

$(\pi)+s(-\pi)=$ __________。

分方程$y''=-\dfrac{3}{x}y'+1(x>0)$满足初始条件$y|_{x=1}=0$，$y'|_{x=1}=1$的特解

__________；

$y_1=xe^x+e^{2x},y_2=xe^x,y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$是二阶常系数线性非齐次微分

$y''+py'+qy=e^x-2xe^x$的三个特解，则此微分方程为__________。

本题分数	9
得　分	

二、选择题（每空3分）

1. 已知$f(x,y)=e^{\sqrt{x^4+y^2}}$，则（　　）

（A）$f_x(0,0),f_y(0,0)$都存在　　（B）$f_x(0,0),f_y(0,0)$都不存在

（C）$f_x(0,0)$存在，$f_y(0,0)$不存在　　（D）$f_x(0,0)$不存在，$f_y(0,0)$存在

2. 设函数$f(x,y)$为平面上连续函数，则$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{1}yf(x^2,y^2)\mathrm{d}y=$（　　）

（A）$2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 yf(x^2,y^2)\mathrm{d}y$　　（B）$4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x yf(x^2,y^2)\mathrm{d}y$

（C）$2\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-y}^{y} yf(x^2,y^2)\mathrm{d}x$　　（D）0

3. 设$u_n>0(n=1,2,\cdots)$，若$\lim\limits_{n\to\infty}n^2u_n=l(0<l<+\infty)$，则交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$Vn

）

（A）绝对收敛　（B）条件收敛　（C）发散　（D）不能确定其敛散性

本题分数	6
得　分	

三、设$u(x,y),v(x,y)$由方程组$\begin{cases}x=e^u+u\sin v\\ y=e^u-u\cos v\end{cases}$确定，求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$.

本题分数	13
得　分	

四、计算。

1. 设Σ是球面$x^2+y^2+z^2=4(z\geq 0)$的外侧，计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.（7分）

2. 求微分方程$(xy^2+y-1)\mathrm{d}x+(x^2y+x+2)\mathrm{d}y=0$的通解.（6分）

本题分数	7
得　分	

五、将$f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$展成x的幂级数.

本题分数	9
得　分	

六、试判断以下级数是发散、条件收敛还是绝对收敛，并说明理由.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^n \sin\dfrac{\pi}{3^n}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n-\sqrt{n}}{n+1}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$

本题分数	7
得　分	

七、求微分方程$y''-2y'-3y=x^2+2x+1$的通解.

本题分数	7
得　分	

八、设$f(x)=e^x-\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$，其中$f(x)$连续，求$f(x)$.

	7

九、求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}$的收敛域与和函数.

十、设$f(x)$为正值连续函数，试证明不等式

$$\oint_L \frac{-y}{f(x)}\mathrm{d}x + xf(y)\mathrm{d}y \geq 2\pi a^2，$$其中L是圆周

$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2(a>0)$，取逆时针方向.

7/ (1) 1

2) $0.25e$.

3) $x+2y-4=0$

4) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

5) 0.

6) $\frac{aq}{1-q}$

7) $\frac{1}{6}$

8) $\frac{\lambda}{4}$

9)

10) $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$

1C

2. A.

3A.

三

$$x = e^u + u\sin v$$

$$y = e^u - u\cos v$$

$$1 = e^u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\sin v + u\cos v\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$0 = e^u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\cos v + u\sin v\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A \quad \frac{\partial v}{\partial x} = B$$

$$(e^u + \sin v)A + u\cos v B = 1$$

$$(e^u - \cos v)A + u\sin v B = 0$$

$$B = -\frac{e^u - \cos v}{u\sin v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = A = \frac{1 + u\cos v\,\dfrac{e^u - \cos v}{u\sin v}}{e^u + \sin v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A = \frac{1}{e^u + \sin v} + \frac{(e^u - \cos v)\cos v}{(e^u + \sin v)\sin v}$$

(II)/1. $\iint\limits_{\Sigma} yz\,dz\,dx + z\,dx\,dy$

补1. $\Sigma_1: z=0$ 下侧

原式 $= \iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2} r^3 \cos\varphi\, dr.$

$= 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi$

$= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$

$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\, d\varphi$

$= -2\pi \cos 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= -2\pi \times (-1-1)$

$= 4\pi$

(12)/2 $(xy^2+y-1)dx+(x^2y+x+2)dy=0$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy+1 \quad \frac{\partial P}{\partial y}=2xy+1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$u=\frac{1}{2}x^2y^2+xy-x+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2y+x+\varphi'(y)$$

$$\varphi'(y)=2 \quad \varphi(y)=2y$$

$$\therefore u=\frac{1}{2}x^2y^2+xy-x+2y \ (u\in R)$$

五 $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}$

$$=\frac{1}{(x-1)(x-3)}$$

$$=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}\frac{1}{3-x}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n x^n$$

$$-1<x<1$$

T

六. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|e^{n}\sin\frac{\pi}{3^n}\right|$

$\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n\pi}{3^n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}}{3^{n+1}}\Big/\frac{e^n}{3^n}=\frac{e}{3}<1$

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}e^{n}\sin\frac{\pi}{3^n}$ 绝对收敛

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-\sqrt{n}}{n+1}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 条件收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\sqrt{n}}{n+1}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{-\sqrt{n}}$ 发散

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-\sqrt{n}}{n+1}$ 发散

(3) $u_n=\frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 $u_{n+1}-u_n<0$

$\lim_{n\to\infty}u_n=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 条件收敛

七 $y''-2y'-3y=x^2+2x+1$

特征方程：$r^2-2r-3=0$

$$(r-3)(r+1)=0$$

$$r_1=3 \quad r_2=-1$$

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$$

$$y^*=ax^2+bx+c$$

$$y^{*\prime}=2ax+b$$

$$y^{*\prime\prime}=2a$$

$$2a-2(2ax+b)-3(ax^2+bx+c)=x^2+2x+1$$

$$-3a=1 \quad a=-\frac{1}{3}$$

$$-4a-3b=2.$$

$$\frac{4}{3}-3b=2$$

$$b=-\frac{2}{9}$$

$$2a-2b-3c=1$$

$$3c=2a-2b-1$$

$$3c=-\frac{11}{9}$$

$$c=-\frac{11}{27}$$

$$\therefore y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x-\frac{11}{27}$$

$$(C_1, C_2 \in R)$$

八 $f(x)=e^x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$

$$f(x)=e^x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$$

$$f'(x)=e^x-\int_0^x f(t)dt-xf(x)+xf(x)$$

$$f'(x)=e^x-\int_0^x f(t)dt$$

$$f''(x)=e^x-f(x)$$

$$f''(x)+f(x)=e^x$$

$$r^2+1=0$$

$$r=\pm i$$

$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$y^* = ae^x$

$2ae^x = e^x$

$a = \frac{1}{2}$

$\therefore f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x$

$f(0) = 1$

$f(0) = C_1 + \frac{1}{2} = 1 \quad C_1 = \frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{1}{2} \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x$ $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} e^x$

$f'(0) = 1$ $f'(x) = -\frac{1}{2} \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2} e^x$

$f'(0) = C_2 + \frac{1}{2} = 0 \quad C_2 = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right|=1$$，所以收敛半径R=1，

九

设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$，x∈(-1，1）时，

$$\int_0^x s(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}n\ x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n\ x^{n-1}$$

$x\neq 0$时，$\frac{1}{x}\int_0^x s(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}n\ x^{n-1}$

$$\int_0^x[\frac{1}{u}\int_0^u s(t)dt]du=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$$

两边对x求导：

$$\frac{1}{x}\int_0^x s(t)dt=\frac{d}{dx}(\frac{x}{1-x})=\frac{(1-x)+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2},$$

$$\int_0^x s(t)dt=\frac{x}{(1-x)^2},$$

继续求导，$s(x)=\frac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{1+x}{(1-x)^3}$

$x=0$时，由定义式知道，$s(0)=1$，

$x=\pm 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$的一般项不趋近于0，级数发散。

所以

$$s(x)=\begin{cases}\frac{1+x}{(1-x)^3},x\neq 0\\ 1,x=0\end{cases}=\frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$+\oint_L x f(y)\,dy - \frac{y}{f(x)}\,dx$$

$$= \iint_D \left[f(y) + \frac{1}{f(x)}\right] dxdy$$

$$= \iint_D f(x) + \frac{1}{f(x)}\, dxdy$$

$$\geq \iint_D 2\pi\, dxdy = 2\pi a^2.$$