miHoYo
TECH OTAKUS SAVE THE WORLD
原神

须弥教令院出版社

普通高等学校教辅

概率论与数理统计

《原神》版 教学辅导用书

主编 展未央

须弥教令院出版社

普通高等学校教辅

概率论与数理统计

《原神》版 教学辅导用书

主编 展未央

内容简介

本书以高等学校工科专业开设的《概率论与数理统计》课程为基础，共七章，前四章介绍了概率论的基本内容，包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、极限定理；后三章介绍了数理统计的基本内容，包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验．

本书一般适于高等学校工科本科生修读《概率论与数理统计》参考，由于不重理论重应用的编写思想，纯理科方向或数学相关专业的同学可能不适用此书．

概率论与数理统计 《原神》版教学辅导用书

策划编辑 展未央 封面设计 展未央 版式设计 展未央 插图绘制 展未央

修订校对 没人校对编者真的好头大啊

版权说明

第一版前言

随着科学技术的发展，概率论与数理统计得到了越来越广泛的应用，已成为高等学校大部分专业必修的一门基础课．通过本课程的学习，要使学生掌握研究随机现象的基本思想与方法，并具备一定的分析解决问题的能力．

然而，现行的大多数教材往往都存在着“先定义，后证明”的刻板编排方式，虽然十分严谨，但却不利于学生的理解与学习．编者以为，要学好一门数学课乃至学好任何一门课程，都应当先从其意义与应用入手．如果不知道学习这门课能够做什么，只是盲目的根据学校培养方案的要求就开始学习，很容易丧失学习的兴趣与动力．

此外，很多教材编写者为顾及数学描述的严谨性与教材语言的书面性，往往直接使用复杂难懂的数学语言给出一些概念，又不用通俗的文字补充解释其理解要点．编者以为，越好的数学教材应当越“说大白话”，能够让读者以较低的理解成本快速掌握知识，而非将晦涩的数学表述留给读者自己思考与消化．

有感于以上实际教学中的痛点，编者出于个人兴趣，编写了这本《概率论与数理统计 〈原神〉版教学辅导用书》．基于《原神》游戏的丰富背景，结合编者对这门课程教学实际的反思与总结，本教材能够较好的梳理这门课程的知识要点，并图文并茂、形式生动的给出各个知识点的理解方式，帮助读者更好的学习这门课程．教辅中还设置了「闲话一刻」、「留言板」等模块，将一些较难理解的知识点以对话或讨论的形式给出，力求还原同学们学习时的真实场景，做到教材与同学真正互动．

本书的编写者为展未央（笔名），书中课程编排、正文内容、版面设计、知识点插图绘制等均由其一人独立完成；与《原神》游戏相关的角色美术素材直接来源于《原神》游戏官方．

本书在编写时参考了高等教育出版社出版的《概率论与数理统计》（第二版，主编 徐伟、孙浩、许勇、张莹、都琳），书中的数学符号与习惯用法与此教材基本保持一致．

编者编写此书时，仍为西北工业大学航天学院的一名大学二年级本科生，限于编者的经验和水平，书中不足之处恳请读者指正．

编者 展未央
2022 年 1 月于西安市西北工业大学

背景介绍

须弥的危机告一段落，「虚空」系统停转后，小吉祥草王下放了虚空中蕴藏的，不为人知的甚至来自于异世界的知识技术，以推动须弥的科学技术发展．

教令院下属的刹诃伐罗学院——研究机关术的妙论派，负责新兴知识的修订与推广．随着机械学、建筑学的蓬勃发展，数学与物理学等基础学科也愈来愈受到重视，《概率论与数理统计》这门课也随之开设．

来自异世界的旅行者与最好的伙伴派蒙一起，加入到教令院的学习生活中．在这里，他们将与许多在往日旅程中遇到的伙伴一起，共同完成为期四年的「学业修行」，顺利从教令院拿到学位证书……

空 / 荧

来自异世界的双子旅行者，学习过许多属于或不属于这个世界的知识．因此冒险之余常在辅导派蒙的学业．

派蒙

旅行者最好的伙伴，提瓦特最好的导游，野外探险时最好的“应急食品”！但是学习功课方面就不太好了……

纳西妲

尘世七执政之一，须弥的“小吉祥草王”．司掌梦境权能的智慧之神，具有访问世界树，通晓提瓦特古往今来的能力．

久岐忍

稻妻街头帮派“荒泷派”二把手，百业通才，成功考取了各行各业的许多证书．

夜兰 §1.1

隶属于璃月总务司的特别情报官，神出鬼没，行踪飘忽，变幻无常．另一身份是岩上茶室之主，玩骰子的「行家」．

烟绯 §1.2

璃月港最优秀的律法咨询师，可以在一小时内把数万字的璃月律法完整背诵下来．

胡桃 §1.3

璃月「往生堂」第七十七代堂主，维护着世间阴阳平衡之道．此外还是古灵精怪的“小巷派暗黑诗人”，诸多“杰作”被璃月人口口相传．

刻晴 §1.4

璃月七星之一的“玉衡星”，坚信与人类命运相关的事，应当由人类去做而非依靠神明．因此时刻要求自己要拿出常人数倍的努力．

神里绫华 **§2.1**

稻妻社奉行神里家的大小姐，容姿端丽、品行高洁，是深受民众爱戴的“白鹭公主”．对旅行者空倾慕有加．

神里绫人 **§2.2**

稻妻社奉行神里家的现任家主，处世低调，有着超凡的手腕与极深的城府．喜欢喝奶茶．

鹿野院平藏 **§2.3**

任职于稻妻天领奉行的少年侦探，直觉敏锐、心思巧妙，是天领奉行中无可争议的破案天才．

枫原万叶 **§2.4**

稻妻出身的浪人武士，如今则栖身于璃月的南十字船队．性情温和洒脱，心中埋藏着许多往事．

早柚 **§2.5**

隶属于稻妻社奉行下设秘密组织“终末番”的特别忍者，总因为长不高而烦恼，最擅长的事情是逃跑与睡觉．

五郎 **§2.6**

海祇岛珊瑚宫反抗军的大将，天生具有野兽般的战斗直觉与顽强意志，能精准找出绝境中的胜机．

迪卢克 **§3.1**

蒙德城最大酒庄“晨曦酒庄”的庄主，总是以最完美的贵公子形象示人．然而他真实的一面，是秉承坚定信念守护蒙德的战士．

琴 **§3.2**

蒙德城西风骑士团代理团长，四风守护中的南风之狮．肩负着西风骑士团的信任，还有蒙德民众的期待．

温迪 **§3.3**

蒙德城的建立者，尘世七执政中的风神．为了蒙德人民的自由放弃治理，化身吟游诗人行走大地．自称是世上最好的吟游诗人．

优菈 **§3.4**

蒙德城西风骑士团游击小队队长，常年在外作战的“浪花骑士”，反叛的旧贵族末裔．喜欢“记仇”．

提纳里 **§4.1**

须弥道成林的巡林官，毕业于教令院阿弥利多学院，生论派植物学学者．专业知识过硬，行事干脆利落、十分稳健．

赛诺 **§4.2**

须弥教令院的大风纪官，所有风纪官们的首领．拥有的独特幽默感令人印象深刻．闲暇时喜欢打“七圣召唤”．

珐露珊 **§4.3**

须弥教令院知论派名宿，来自“一百年前”的教令院杰出学者，古典机关术学科奠基人之一．

托马 **§5.1**

稻妻社奉行神里家的家政官，同时也是活跃在稻妻的“地头蛇”．为人友善又富有亲和力，对待工作或人际都有着格外认真的一面．

宵宫 **§5.2**

稻妻“长野原烟花店”的现任店主，热情似火的少女，才华横溢的烟花工匠，被誉为“夏祭的女王”．

珊瑚宫心海 **§5.3**

稻妻海祇岛珊瑚宫的“现人神巫女”，现任海祇岛最高领袖．通读兵法、擅长谋略，在军事上有着独特见解．

北斗 **§6.1**

璃月港武装船队“南十字”的头领，为人豪爽，重情重义，在璃月有着相当的声望．曾亲手砍下海兽“海山”的头颅．

申鹤 **§6.2**

师从留云借风真君的仙家弟子，虽为人类，却生活在远离璃月港的山野之间长年累月修行，以红绳锁魂来控制杀心．

甘雨 **§6.3**

璃月七星的秘书，体内流淌着人类与仙兽的血脉．天性优雅娴静，但仙兽“麒麟”温柔的性情与坚定毅重的工作态度毫无冲突．

阿贝多 **§7.1**

蒙德城西风骑士团首席炼金术士兼调查小队队长，被称做“白垩之子”的天才．不怎么在意称号和名望，只专注于研究课题．

可莉 **§7.2**

蒙德城西风骑士团的火花骑士，永远伴随闪光与爆炸出现！然后在琴团长严厉的目光注视下默默消失．经常被关禁闭．

为了更好的普及这门课的相关知识，教令院的学者们与小吉祥草王一起，以旅行者和派蒙的学习生活为蓝本，编撰了这本生动活泼、详略得当的教材．

亲爱的读者，现在你即将迈入《概率论与数理统计》的课程之门．在这之前，你应当已经完成了《高等数学》或《微积分》等有关课程的学习．要想更好的享受这趟旅途，从中最大程度地学习到有用的知识，编者恳切地建议你先了解本书的编排及功能划分：

目录 – 除了罗列章节安排，本书目录还包含了特色模块介绍，一定要看哦！

正文 – 共七章内容，例题随附在每一节之后．

附录 1 – 全书证明汇总，正文中限于篇幅无法给出的证明汇总在此．

附录 2~5 – 各分布表，是数理统计部分需要使用到的参考数据．

附录 6 – 全书知识点总结，便于读者快速查阅公式，或做总复习用．

勤思考、多练习，是扎实掌握一门课程的基础要领．目标是教令院的奖学金也好、乃至「荣誉大贤者」的头衔也罢，都请认真地开始你的学习吧！

目　　录

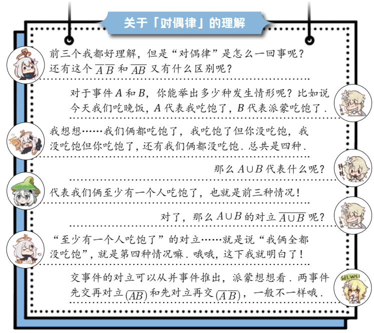
附录

全書特色介绍

Features of the book

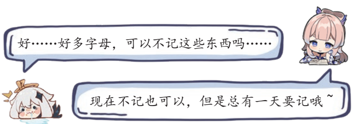
章前引言

每一章开头，派蒙会和其他伙伴讨论本课相关问题，作为章节引入



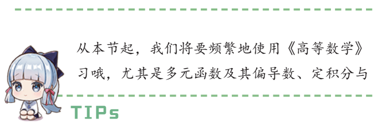
讨论板

对于一些不易理解的问题，派蒙会和伙伴们展开深刻的讨论！



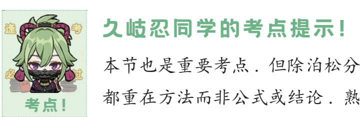
闲话一刻

有时派蒙偶尔会吐槽一些奇怪的定义，或者提出一些问题哦~



温馨提示

一些知识点下方，会有伙伴提示你这条知识点的注意事项~



考点注意

逢考必过的久岐忍同学会告诉大家哪些是重要的考点~

例题时间

充满智慧的纳西妲老师会在每小节后为大家准备一些例题哦~

去追寻便好，哪怕是须臾的光亮。

第 2 章　随机变量及其分布

派蒙觉得，学好这门数学课的要领在于何处呢？

绫华，你知道我明明学的不好啊……不过一定要说的话，我觉得应该是算数算的好！

呵呵，也是一种必要条件呢．空是怎么想的呢？

绫华学业很不错，应该有高见．我呢觉得是“数学思维”，能将实际问题与数学工具产生联系．

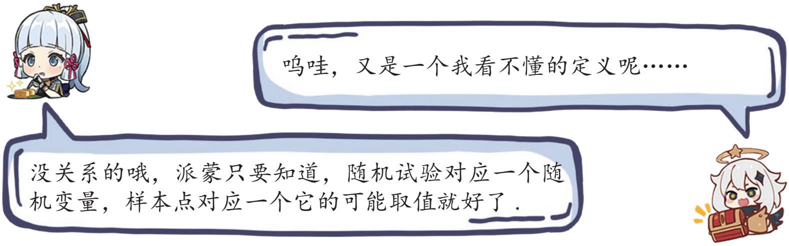
旅行者过奖了，不过与我的想法真是不谋而合呢~

§2.1 一维随机变量及其描述法

上一章中我们研究了随机试验．实际问题中很多随机试验都与数值产生联系，例如掷骰子出现的点数、伙伴在战斗中造成的伤害、教令院每年延毕的人数等等．即使有些试验与数字没有直接联系，也可以为其结果“赋予”数值与之关联．

事实上，这种联系就是一种函数关系，将随机试验的样本点映射成实数，由此随机事件也被映射成实数集合．我们将这种函数关系称为**随机变量**（常用希腊字母或大写英文字母表示）：

定义 2.1 （随机变量）设 $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ 为一概率空间，$\xi(\omega)$ 是定义在 Ω 上的单值实函数，若对任一实数 x，$\{\omega:\xi(\omega)\leqslant x\}\in\mathfrak{F}$，即它是一个事件，则称 $\xi(\omega)$ 为随机变量，简记为 ξ．



今后，我们认为每个随机试验都可以对应一个随机变量，随机试验的结果（样本点）对应其取值，随机事件对应其取值组成的集合（区间），而随机事件的概率对应随机变量取值落入此集合的概率.

由此看来，随机变量与一般的函数有所区别．对于一般函数，每一个自变量就对应一个函数值；对于随机变量虽然也如此，但自变量（样本点）能否被取到会受到概率的影响，因此函数值（随机变量的取值）也有其概率.

另外，如果我们认为“概率”是被“赋予”给随机事件的一种特征（例如掷骰子出现各点数的概率是被物理规律“赋予”的，教令院每年延毕的人数是被统计数据“赋予”的），那么概率也可以看做是随机变量的一个函数．此处随机变量的取值为自变量，对应的概率值为函数值．我们一般称这种函数关系为**随机变量的概率分布**.

现在我们将随机事件及其概率均转化为了与函数有关的数学形式，因而可以对它进行各种数学运算，研究起来较随机事件更为容易和方便.

根据随机试验的结果是有限个（或无限可列个）还是无限个，我们将随机变量分为**离散型随机变量**和**连续型随机变量**两种，下面分别研究它们的概率分布情况.

从本节起，我们将要频繁地使用《高等数学》课程中的有关知识，请同学们注意复习哦，尤其是多元函数及其偏导数、定积分与重积分等内容.

TIPs

离散型随机变量，指的是所有可能取值为有限个，或即使为无限个也可以罗列出的随机变量．由于其可列的特性，一般用**分布律**（或**分布列**）描述其概率分布：

分布律 / 分布列 若随机变量 X 的所有可能取值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，

则称 $P\{X = x_i\} = p_i(i = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$ 为其分布律．

称表

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

为其分布列．

一般更常用分布律，形式更简洁．分布律和分布列完整表述了随机变量取值的概率分布情况，即：随机变量 X 取值为 x_i 的概率就是 p_i ．

然而这种理所当然的描述方式对于连续型随机变量却是行不通的——因为连续型随机变量取某个特定值的概率一定为零．

连续型随机变量在单点处的概率


为什么呢？难道连续型随机变量没有概率分布了吗？

我先问派蒙一个问题吧，派蒙早上什么时候起床呢？



我，我吗……来教令院上学以后大概是七点半左右吧．

好的，那么我们就假定派蒙每天早上在 7:20 到 7:40 内的某个时刻起床，并且在哪一刻是随机的，这样合理吗？



我觉得没问题！但是绫华举这个例子是想说什么呢？

想问问派蒙，在早上 7:30 分这一刻，一毫秒都不差的这一刻，起床的概率是多少呢？



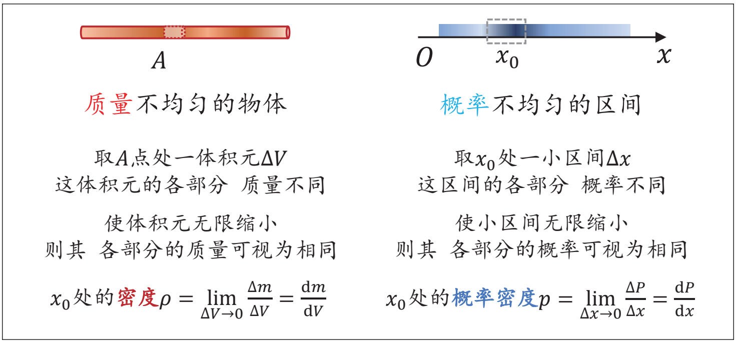
这，这好像是个“几何概型”的问题……但是，但是这一刻在时间轴上好像只是一个点，点没有长度，而我起床时间的可能区间却是一条线段……

没错，出现了 0/ 常数的情况呢，因此概率是 0 哦．


以上讨论虽然是针对等可能概型这一特例而言的，但显然对于不等可能的连续型随机变量也如此．当然，无论是“等可能”还是“不等可能”，它们都不再说的是随机变量取某个特定值的可能性，因为这种可能性必然为零．

既然无法直接使用连续型随机变量取特定值的概率，我们又如何表述它的概率分布情况呢？

物理实际中有一对情况类似的定义可供参考：质量和密度．如图，对于一质量为 m 的细杆，它其中的某一点质量为零，但在这一点却有密度，用微分来定义：$\rho=\mathrm{d}m/\mathrm{d}V$ ．倘若要求物体中某部分的质量，只需在该空间上对密度求积分即可，这就是我们在《高等数学》中学习过的“定积分的物理意义”．



▲ 质量与密度，概率与概率密度的关系

连续型随机变量在一点处的概率同样为零，可与物理中的质量类比；因此，应当有一个数学量来类比物理中的密度，我们将其称之为**概率密度函数**：

概率密度函数 若存在可积函数 $p(x)(-\infty<x<+\infty)$，
使得 $P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x}p(x)\,\mathrm{d}x$，
则称 $p(x)$ 为连续型随机变量 X 的概率密度函数．

类比一下就是，“要求随机变量某区间的概率，只需在该区间上对概率密度求积分即可”，对吧？

派蒙真聪明，就是这样的意思哦．

由此，我们就得到了两类随机变量的描述方法：离散型随机变量的分布律，连续型随机变量的概率密度函数．它们分别还有如下的性质：

离散型随机变量	连续型随机变量
（1）非负性 $0 \leqslant p_i \leqslant 1$	（1）非负性 $p(x) \geq 0$
（2）归一性 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$	（2）归一性 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1$
	（3） $P\{a < x \leqslant b\} = \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$

1° 连续型随机变量的密度函数，值不一定比 1 小哦，因为它并不直接等于概率．

2° 归一性常用来求解概率分布中的未知参数．

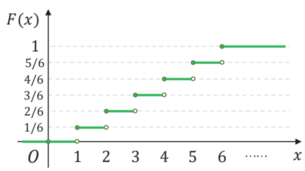
TIPs

离散型和连续型随机变量的两种描述法并不完全统一，同时也存在一些既非离散型又非连续型的随机变量．我们还有一种描述随机变量概率分布的方式：**（累计）分布函数**．

累计分布函数　称 $F(x) = P\{X \leqslant x\}(-\infty < x < +\infty)$ 为随机变量 X 的（累计）分布函数．

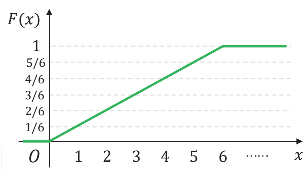
分布函数有显明的数学意义．首先，分布函数的函数值是一个概率值；其次，它在 x 处的函数值为随机变量 X 取 x 及其以前所有值的概率总和，这也是它被称为“累计”分布函数的缘故．

虽然连续型随机变量不能研究单点处的概率值，但离散型随机变量可以研究区间上的概率值．因此离散型和连续型的随机变量都具有分布函数，它们各自的图像如图所示．



X等可能地取1–6间的整数

▲ 离散型随机变量的分布函数



X等可能地取[0,6]间的任一实数

▲ 连续型随机变量的分布函数

离散型随机变量的分布函数是阶跃式的．如上图所示，我们可以看出 $F(3) = P\{X \leqslant 3\} = 3/6$，而 $F(3.5) = P\{X \leqslant 3.5\} = 3/6$，这是因为不管是 $X \leqslant 3$ 还是 $X \leqslant 3.5$，对应 X 的可能取值都是 $1, 2, 3$.

连续型随机变量的分布函数一般是连续的，这很容易理解．

1° 分布函数的定义域一定是 $(-\infty, +\infty)$，即使随机变量取不到这些值也是如此哦．

2° 离散型随机变量一般很少用分布函数，分布律更加简单直观．

TIPs

分布函数也有如下的常用性质：

（1） $0 \leqslant F(x) \leqslant 1, x \in \mathbf{R}$　（2） $F(x)$ 是单调不减的

（3） $F(-\infty)=\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)=0,\ F(+\infty)=\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)=1$

（4）对离散型随机变量， $F(x)=\sum\limits_{x_k \leqslant x} P\{X=x_k\}$

对连续型随机变量， $F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(x)\,\mathrm{d}x,\ p(x)=F'(x)$

（5） $P\{a<X \leqslant b\}=P\{X \leqslant b\}-P\{X<a\}=F(b)-F(a)$

其中第三条和第四条性质比较重要，它们常常被用来确定一些连续型随机变量的分布函数与密度函数 .

例题時間 Time for Example §2.1

例 2.11 设随机变量的分布律为 $P\{X=k\}=C^k, k=1,2,\cdots$，求 C .

解 由题意， $\sum_{k=1}^{\infty} C^k=1$，即 $C+C^2+C^3+\cdots=1$，

显然 $0<C<1$，故 $\dfrac{C}{1-C}=1$，解得 $C=\dfrac{1}{2}$.

利用分布律的归一性和等比数列求和公式就可以求解了～

例 2.12 设随机变量的密度函数为 $p(x)=ce^{-|x|}, -\infty<x<+\infty$，求 c .

解 由题意， $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,\mathrm{d}x=1$，即 $\int_{-\infty}^{0} ce^{x}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty} ce^{-x}\,\mathrm{d}x=1$，

即 $2c=1$，解得 $c=\dfrac{1}{2}$.

虽然形式上是在无穷广义区间上积分，但要注意密度函数是否分段哦 .

例 2.13 设 X 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x, -\infty<x<+\infty$，求：

(1) 常数 A,B；(2) $P\{-1<X<1\}$；(3) X 的密度函数 .

解 (1) 由题意， $F(-\infty)=A-\pi B=0,\ F(+\infty)=A+\pi B=1$，

解得 $A=1/2, B=1/\pi$. 则 $F(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arctan x$.

(2) $P\{-1<X<1\}=F(1)-F(-1)$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan 1\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan(-1)\right)=\frac{1}{2}.$$

(3) $p(x)=F'(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}, -\infty<x<+\infty$.

利用分布函数的性质求解常数，求导即得密度函数 .

本节涉及的概念、定义和性质是之后所有内容的基础，因此同学们务必要熟练掌握．

§2.2 一维随机变量的典型概率分布

本节我们将研究一些典型的随机变量及其概率分布．这些随机变量都产生于一些常见的概率问题，例如产品检验问题、抽次品问题、元件寿命问题等等．

常见的离散型随机变量概率分布有单点分布、两点分布、均匀分布、**二项分布**、**泊松分布**、**几何分布**、**超几何分布**等．

单点分布 若 X 仅能取一个值 C 且取此值的概率为 1，即：$P\{X=C\}=1$，则 X 服从单点分布（退化分布）．

单点分布可以用来描述必然事件．

两点分布 若 X 仅能取值为 0,1 且取值为 1 的概率为 p，即：$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}(k=0,1)$，则 X 服从两点分布．

两点分布可以用来描述伯努利试验．伯努利试验指的是仅有“A 发生”和“A 不发生”两种结果的随机试验．我们可以用数值 1 指代“A 发生”，数值 0 指代“A 不发生”（称这种表述为“示性函数”），于是两点分布可以描述这种试验结果的概率．

离散型均匀分布 若 X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=1/n(k=1,2,\cdots,n)$，则 X 服从离散型均匀分布．（x_k 各不相同）

离散型均匀分布可以用来描述“随机变量取有限个值，且取每个值的概率相等”的古典概型问题．

二项分布 若 X 分布律 $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=1,2,\cdots,n)$，则 X 服从二项分布，记作 $X\sim B(n,p)$．（$0\leqslant p\leqslant 1$）

二项分布可以用来描述 n 重伯努利试验，也就是重复 n 次伯努利试验，求其中事件 A 发生了 k 次的概率．

泊松分布 若 X 分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k=0,1,2,\cdots)$，则 X 服从泊松分布，记作 $X\sim P(\lambda)$．（$\lambda>0$）

泊松分布可以用来描述一段时间内某事件发生的次数，如某时段内电话交换台接收到的电话呼唤次数，某时段内放射性物质

衰变放射出的粒子数目等等．实际上，泊松分布的分布律来源于二项分布，它是二项分布在 $n \to \infty$ 时的极限分布．

泊松分布的来源与意义

二项分布的分布律我能理解，但是泊松分布为什么就能表示“某段时间内事件的发生次数呢”？

两种分布都用来表示“事件发生的次数次数”，但前者表示“n次重复试验中”，而后者表示“某段时间内”．从随机变量的角度来讲，你觉得它们有什么区别呢？

我想想……前者是离散型的，后者是连续型的？

正是此意．如果我们换个角度思考随机事件，将“事件发生”理解为“观测到此事件”，那二项分布就是有限次观测，而泊松分布就是一直观测，也就是无限次观测．

那就是说，泊松分布就是让二项分布的n取无限推出的！

方向是对的，不过还有一些前提条件，这里要涉及到数学期望的概念．派蒙在中学数学了解过吧？

学过是学过啦，大概说的就是一种“加权平均”吧．

很对．假设某天晚上旅行者失眠了，因为派蒙打鼾．根据过往经验，派蒙 1 分钟内打鼾的期望是 10 个．现在他打算捂着耳朵睡，但是每 1 秒就要松一下，那么 1 分钟内他每次松耳朵能听到派蒙打鼾的概率是多少呢？

绫人！要不是为了学习……这是二项分布，我记着二项分布的期望是 np，这里次数 n 应该是 60，而期望 np 是 10，所以 p 应该是 10/60，也就是每次“观察”时发现我在打呼的概率是1/6……什么嘛，我睡觉不打呼啦！

举例而已．现在的问题是，从“旅行者每 1 秒听一次”到“旅行者一直听着”，在数学上怎样实现这个转变呢？

哼！应该是他两次松开耳朵的时间间隔越来越短，也就是说，所谓“观测”的次数越来越多，直到无穷！

不错，这个过程中 n 趋于无穷了，但期望 np 并不会变化，派蒙不会在 1 分钟内打无穷多个鼾．二项分布的分布律里 n 和 p 在一起出现，一个无穷大，一个无穷小，不好分析，而期望是不变值，因此可以规定期望 $\lambda = np$，这样 $p = \lambda/n$，于是 p 可以被 n 代换掉，就只用考虑 n 趋于无穷的情况了．剩下的工作就是计算极限，详细步骤就请见书后附录 1 吧．

几何分布 若 X 分布律为 $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p\,(k=1,2,\cdots)$，则 X 服从几何分布，记作 $X\sim Geo(p)$.（$0\leqslant p\leqslant 1$）

几何分布可以用来描述 n 重伯努利试验中首次“成功”出现在第 k 次的概率，也就是说前 k-1 次结果均为“失败”.

超几何分布 若 X 分布律为 $P\{X=k\}=C_M^k C_{N-M}^{n-k}/C_N^n$，则 X 服从超几何分布 .（$k=0,1,2,...,\min\{M,n\}$）

超几何分布与几何分布并无显著联系（深究起来，要追溯到所谓的“超几何级数”），只是译名相近而已 . 超几何分布用来描述废品检验一类的问题，具体说来是：

在 N 件产品中有 M 件次品，现从中一次性抽取 n 件，抽到次品的件数为随机变量 X . 这是一个古典概型问题，当 X 取值为 k 时，样本空间含有 C_N^n 个样本点，即“从 N 件产品中抽取 n 件”；而事件“抽到 k 件次品”分两步完成，先从 M 件次品中抽出 k 件，即 C_M^k，再从 $N-M$ 件正品中抽出 $n-k$ 件，即 C_{N-M}^{n-k} .

“参数”是随机变量概率分布中很重要的概念，不论随机变量意义如何，只要其服从的分布中参数确定，则分布律就确定 . 例如说，二项分布的参数就是 n 和 p .

TIPs

常见的连续型随机变量概率分布有**均匀分布**、**指数分布**、**正态分布**等 .

连续型均匀分布 若 X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, a\leqslant x\leqslant b\\ 0 \quad ,otherwise\end{cases}$，

则 X 服从连续型均匀分布，记作 $X\sim U[a,b]$.

连续型均匀分布可以用来描述“随机变量取无限个值，且取每个值的概率相等”的几何概型问题 .

指数分布 若 X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, \; x\geqslant 0\\ 0 \; ,otherwise\end{cases}$，

则 X 服从指数分布，记作 $X\sim Exp(\lambda)$.

指数分布可以用来描述所谓的“寿命”问题，例如大批的某种电子元件寿命为 X，某生物群落中生物的寿命为 X .

值得注意的是，这种分布所描述的“寿命”往往研究的是大批同类事物的存续时间，而非单独观察某特定个体的寿命 . 实际

上，指数分布源于泊松分布，是泊松分布取 $k=0$ 时的特殊情况．

指数分布的来源与意义

泊松分布是离散型的，指数分布是连续型的，它们是如何联系的呢？

先来想想所谓的“寿命”问题与泊松分布有何关联吧．假设教令院生产了一批元器件并投入使用，按照过往经验，这批元件 1 年内因损坏而被替换的个数期望为 10 个．

可以把它代入泊松分布中，得到“1 年内这批元件发生故障的个数”的概率分布．

很聪明嘛．如果发生故障的次数恰好为 0 呢？

就是说这批元件正常工作了 1 年无故障，“寿命”是 1 年！这样我就可以算出“这批元件寿命为 1 年”的概率了．

正解，注意这里的“寿命”应当指的是元件<u>至少</u>能工作的时长，并非说“寿命”一过就一定要故障．现在，如果我想考察“这批元件寿命为 x 年”的概率，如何做呢？

我想想这个过程啊……这个问题就等同于“这批元件正常工作了 x 年无故障”，故障次数仍然恰好为 0，但我得知道“x 年内这批元件发生故障的次数”的概率分布才行．虽然它仍然是泊松分布，可是期望……

如果 1 年内损坏的期望为 10 个，那么 x 年内损坏的期望就是 10x 个哦．这个过程其实需要严谨的证明，但是有点超纲了，就直接告诉派蒙吧．

哦哦，那么泊松分布里的参数就变成了 10x！然后让次数 k=0 就可以推导了吧！

完全正确哦．详细的推导过程，就请见例 2.21 的过程吧．

正态分布　　若 X 的密度函数为 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$，则 X 服从正态分布，记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$．（$\sigma>0$）

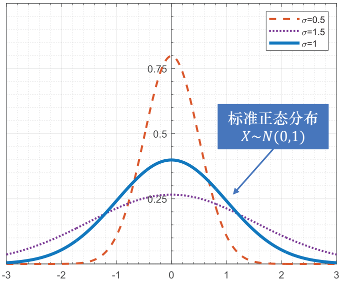
正态分布是最重要的一种分布，自然界中最常见的噪声、误差等均可用正态分布描述．在后面的学习中我们还可以看到，正

态分布还具有数学上易于处理等优点．

这里暂时还无法向读者阐述正态分布的来源，或者确定何种问题中的随机变量服从正态分布，也不能解释正态分布的密度函数为何形式如此．本课的主要任务是，在已知随机变量服从正态分布的情况下，计算有关的概率问题．

如图是正态分布的概率密度曲线，具有轴对称性．参数 μ 为曲线的对称轴，决定曲线的位置；参数 σ 决定曲线形状，σ 越小分布越集中于对称轴附近，越大则越分散．

当 $\mu=0,\sigma=1$ 时称 X 服从**标准正态分布**，记作 $X\sim N(0,1)$．这是我们今后非常常用的一种分布．



▲ 正态密度曲线

服从正态分布的随机变量，其取值落入某个区间的概率当然可以通过求概率密度函数在相应区间上的积分得到，但这个积分在数学上是难以运算的．

为了实际运用的方便，人们利用数值计算的方法得到了所谓的“标准正态分布表”（见附录 2），给出了服从标准正态分布的随机变量 X 取不同 x 时，对应的正态分布函数的值 $\Phi(x)$．

分布函数 $\Phi(x)$ 实质上就等于概率 $P\{X\leqslant x\}$，故查表即可计算标准正态随机变量的取值落入某区间的概率．对于一般的正态随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，可通过如下变换：

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

将其转化为服从标准正态分布的随机变量 $Y\sim N(0,1)$．当然，随机变量的取值 x 也要发生相应的变化．

化为标准正态分布的式子在之后的学习中非常常用，一定要牢记．另外，这公式的分母是 σ，而非 σ^2，请留心．

TIPs

久岐忍同学的考点提示！

本节提及的所有概率分布都是考点．离散型随机变量的分布律、连续型随机变量的密度函数，以及各分布的记号（如果有）、参数、实际意义，都需要牢记．

例题时間 Time for Example §2.2

例 2.21 某计算机在任何长为 t 的时间内网络卡顿的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布，试求：(1) 相继两次卡顿之间的时间间隔 T 的概率分布；(2) 在设备已连续 8 分钟无卡顿的情形下，再无卡顿 7 分钟的概率 .

解 (1) 由题意， $P\{N(t)=k\}=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}(k=0,1,2,\cdots)$，

欲求 T 的概率分布，可求其分布函数 $F_T(t)=P\{T<t\}$.

而事件 $\{T>t\}$ 与事件 $\{N(t)=0\}$ 等价，

故 $F_T(t)=P\{T<t\}=\begin{cases}0 & ,t\leqslant 0\\ 1-P\{N(t)=0\},t>0\end{cases}=\begin{cases}0 & ,t\leqslant 0\\ 1-e^{-\lambda t},t>0\end{cases}$.

则 $p_T(t)=F_T{}'(t)=\begin{cases}0 & ,t\leqslant 0\\ \lambda e^{-\lambda t},t>0\end{cases}$， 即 $T\sim Exp(\lambda)$.

(2) 所求概率即为 $P\{T>8+7\mid T>8\}$.

$$P\{T>15\mid T>8\}=\frac{P\{T>15,T>8\}}{P\{T>8\}}=\frac{P\{T>15\}}{P\{T>8\}}$$
$$=\frac{1-F_T(15)}{1-F_T(8)}=\frac{e^{-15\lambda}}{e^{-8\lambda}}=e^{-7\lambda}.$$

第 (1) 问就是指数分布的推导，第 (2) 问被称为指数分布的“无记忆性”~

例 2.22 在事件 A 发生的概率为 p 的伯努利试验中，若以 X 表示：第 r 次 A 发生时试验的总次数，求 X 的分布律 .

解 由题意，若第 r 次事件 A 发生时，总共进行了 k 次试验，

则第 k 次（最后一次）试验时，事件 A 一定发生（为第 r 次发生）；

而前 $k-1$ 次试验时，事件 A 共发生了 $r-1$ 次；

故 $P\{X=k\}=p\times C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{k-r}$
$=C_{k-1}^{r-1}p^{r}(1-p)^{k-r}(k=r,r+1,r+2\cdots)$.

并非所有随机变量的分布都是我们学过的~这道题的叫「帕斯卡分布」.

例 2.23 设 $X\sim N(2,\sigma^2)$，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，求 $P\{X<0\}$.

解 由对称性 $P\{2<X<4\}=P\{0<X<2\}=0.3$，

则 $P\{0<X<4\}=0.6$，

故 $P\{X<0\}=P\{X>4\}=\dfrac{1}{2}(1-P\{0<X<4\})=0.2$.

计算正态随机变量的概率，一定要注意利用对称性哦~

例 2.24 设随机变量 $X \sim N(50,10^2)$，求 $P\{X \leqslant 70\}$.

解 设 $Y=\dfrac{X-50}{10}$，则 $P\{X \leqslant 70\}=P\{\dfrac{X-50}{10} \leqslant \dfrac{70-50}{10}\}=P\{Y \leqslant 2\}$，显然 $Y \sim N(0,1)$，查表得 $P\{Y \leqslant 2\}=\Phi(2)=0.9773$.

转换为标准正态分布的公式必须要掌握，之后查表就可以了~

本节中常见的各种随机变量及其概率分布都是考点，可以单独出小题，也可以作为计算题的背景；正态分布尤为重要，它是之后第四章乃至整个数理统计部分的基础 .

§2.3 一维随机变量的函数及其分布

在许多实际问题中，我们常需要寻求某个**随机变量的函数**的概率分布 . 例如说，上节中将一般正态随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 转化为标准正态随机变量 $Y \sim N(0,1)$ 的公式，实际上就构造了一个关于随机变量 X 的函数 $Y=f(X)$.

本节我们将根据一维离散型随机变量和连续型随机变量的分布律或概率密度，来求它们函数的分布 .

1. 一维离散型随机变量的函数

一维离散型随机变量的函数分布是比较容易求解的 . 一般而言，若已知 X 的分布列（各取值 x_i 及对应的概率 p_i），便可根据函数关系 $Y=f(X)$ 计算出 Y 的各个可能取值 y_i，再将原本 x_i 对应的概率 p_i 对应至 y_i 即可 . 最后能合并的取值需要合并 .

如下例所示，已知 X 的分布列，求 X^2 的分布列：

X	-1	0	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

已知X的分布列 →

X^2	1	0	1	4	9
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

根据X的分布列求X^2的可能取值 →

X^2	0	1	4	9
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

合并结果

▲ 求一维离散型随机变量的函数的分布列

2. 一维连续型随机变量的函数

一维连续型随机变量的函数分布，求解一般从其分布函数入手 . 若欲求随机变量 $Y=f(X)$ 的分布函数 $F_Y(y)=P\{Y \leqslant y\}$，即求概率 $P\{f(X) \leqslant y\}$. 若函数 $y=f(x)$ 严格单调，则其存在反函

数 $x=f^{-1}(y)$，于是概率 $P\{f(X)\leqslant y\}$ 便等价为 $P\{X\leqslant f^{-1}(y)\}$，而此概率值可根据 X 的分布函数 $F_X(x)=P\{X\leqslant x\}$ 求得，只需将其中的 x 替换为 $f^{-1}(y)$ 即可．

利用分布函数求解连续型随机变量的函数分布是最普遍、最通用的解法，即使函数在整个定义域上非严格单调，也可通过分段的手段求解分布函数．

然而，一般我们更常用来描述连续型随机变量的方法是概率密度函数，求解时先要对其积分才能得到分布函数；倘若结果要求密度函数，又得对求得的分布函数再求导才能得到．下面我们给出一条导出结论（证明见附录 1）：

若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上严格单调，且随机变量 X 的密度函数为 $p_X(x)$，则随机变量 $Y=f(X)$ 在 $(f(a),f(b))$ 上的密度函数为：

$$p_Y(y)=p_X(f^{-1}(y))\cdot|[f^{-1}(y)]'|$$

其中 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数．

这个公式里好多括号啊，怎么记忆呢……

其实只是两部分相乘哦．第一部分是 $p_X(x)$，不过将 x 换成 $f^{-1}(y)$ 而已；第二部分就是 $f^{-1}(y)$ 求导再取绝对值而已．

至此，我们有两种求一维连续型随机变量函数分布的方法：

(1) 根据分布函数，寻找等价命题求解；

(2) 根据密度函数，直接代入公式求解．

第一种方法有时稍显繁琐，但普遍适用于这类问题；第二种方法虽然简单，但需要牢记公式，正确代入．

「分段」是求概率分布中很重要的一点，求解连续型随机变量的函数尤是如此哦．

TIPs

久岐忍同学的考点提示！

本节没有需要特别加以记忆的知识点，但随机变量的函数及其分布是必考内容．多加练习，掌握求解方法是才是重点．

例题時間 Time for Example §2.3

例 2.31 若 X 概率密度为 $p_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, x\geqslant 0\\ 0\ , x<0\end{cases}$，求 $Y=e^X$ 概率密度 .

解 ①当 $x\geqslant 0$ 即 $y\geqslant 1$ 时：显然 $p_X(x)=e^{-x}$ 严格单调；

又 $y=f(x)=e^x$ 反函数为 $x=\ln y$,

故 $p_Y(y)=p_X(f^{-1}(y))\cdot|[f^{-1}(y)]'|=e^{-\ln y}|(\ln y)'|=\dfrac{1}{y^2}$.

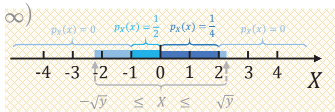
②当 $x<0$ 即 $y<1$ 时：显然 $p_Y(y)=0$. 则 $p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y^2}, y\geqslant 1\\ 0\ , y<1\end{cases}$.

根据 X 的分段来讨论 Y，判断严格单调即可套公式求解 ~

例 2.32 若 X 概率密度为 $p_X(x)=\begin{cases}1/2, -1<x<0\\ 1/4,\quad 0\leqslant x<2\\ \ 0\ ,\quad otherwise\end{cases}$，求 $Y=X^2$ 概率密度 .

分析 当 $-1<x<0$ 时，$0<y<1$；当 $0\leqslant x<2$ 时，$0\leqslant y<4$；

对 y 如下分段：
（区间开闭无影响）$\begin{cases}y<0 \ \rightarrow\ x\in\varnothing\\ 0\leqslant y<1 \ \rightarrow\ x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 1\leqslant y<4 \ \rightarrow\ x\in(-2,-1)\cup(1,2)\\ y\geqslant 4 \ \rightarrow\ x\in(2,+\infty)\end{cases}$



解 先求 Y 分布函数 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}$.

①当 $y<0$：$F_Y(y)=P\{X^2\leqslant y\}=0$.

②当 $0\leqslant y<1$：$F_Y(y)=P\{X^2\leqslant y\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}p(x)\,\mathrm{d}x$

$\left(\begin{matrix}-\sqrt{y}\in(-1,0)\\ \sqrt{y}\in(0,1)\end{matrix}\right)$ $\quad=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\sqrt{y}}\dfrac{1}{4}\mathrm{d}x=\dfrac{3\sqrt{y}}{4}$.

③当 $1\leqslant y<4$：$F_Y(y)=P\{X^2\leqslant y\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}p(x)\,\mathrm{d}x$

$\left(\begin{matrix}-\sqrt{y}\in(-2,-1)\\ \sqrt{y}\in(1,2)\end{matrix}\right)$ $\quad=\int_{-\sqrt{y}}^{-1}0\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\sqrt{y}}\dfrac{1}{4}\mathrm{d}x=\dfrac{2+\sqrt{y}}{4}$.

④当 $y\geqslant 4$：$F_Y(y)=P\{X^2\leqslant y\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}p(x)\,\mathrm{d}x$

$\left(\begin{matrix}-\sqrt{y}\in(-\infty,-2)\\ \sqrt{y}\in(2,+\infty)\end{matrix}\right)$ $=\int_{-\sqrt{y}}^{-1}0\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\dfrac{1}{4}\mathrm{d}x+\int_{2}^{\sqrt{y}}\dfrac{1}{4}\mathrm{d}x=1.$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & ,y<0\\ 3\sqrt{y}/4 & ,0\leqslant y<1\\ 1/2+\sqrt{y}/4 & ,1\leqslant y<4\\ 1 & ,y\geqslant 4\end{cases},\quad p_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}3/(8\sqrt{y}), 0\leqslant y<1\\ 1/(8\sqrt{y}), 1\leqslant y<4\\ 0\quad ,otherwise\end{cases}.$$

本题的密度函数非严格单调，只能用分布函数求解，注意分段哦 .

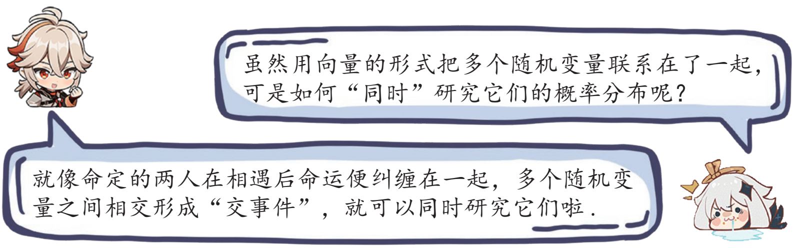
本节的重点是求解一维连续型随机变量的分布及其函数，难点在于理解并掌握方法，公式是次要内容．

§2.4 二维随机变量及其描述法

许多实际问题仅用一个随机变量来描述是不够的．例如，从教令院随机抽取一位同学，考察其《概率论与数理统计》课程的总成绩，则需要同时考察其平时成绩 X 与期末成绩 Y；并且这两个随机变量之间可能有关~~（例如说，期末成绩较低的同学得到较高平时成绩的概率较大）~~，也可能无关．

我们可以将多个随机变量组合在一起研究，形成所谓的 **n 维随机变量**，或称 **n 维随机向量**：

定义 2.2 （n 维随机变量）由 n 个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 组成的向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为 n 维随机变量，亦称 n 维随机向量．



习惯上我们仍称多维“随机变量”，但请务必注意，它的本质是一个向量，各个分量是一维随机变量．

本书主要讨论二维随机变量．虽然我们可以单独研究二维随机变量的每一个分量，但这样做就失去了二维的意义．下面我们将类比一维随机变量的描述法，介绍描述二维随机变量概率分布的最基本角度：**联合分布**．

对于二维离散型随机变量 (X,Y)（即 X,Y 均为离散型随机变量），可用**联合分布律**（或联合分布列）来描述其概率分布：

联合分布律 称 $P\{X=x_i;Y=y_j\}=p_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律．其中 $\{X=x_i;Y=y_j\}$ 表示“$X=x_i$ 且 $Y=y_j$”．

对于二维连续型随机变量 (X,Y)（即 X,Y 均为连续型随机变量），可用**联合密度函数**来描述其概率分布：

联合密度函数　若存在可积函数 $p(x,y)\,(-\infty<x,y<+\infty)$，使得 $P\{X\leqslant x;Y\leqslant y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则称 $p(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数．

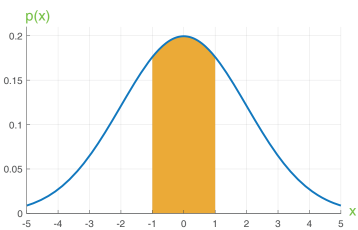
联合分布律与联合密度函数的意义仍与一维情形类似，只不过它们现在要同时考虑 X,Y 的取值．对离散型随机变量来讲，其分布律从一维点处的概率值上升至二维点处的概率值；对连续型随机变量来讲，其密度函数（的积分）从一维区间上的概率值上升至二维区域上的概率值．如下图所示：

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

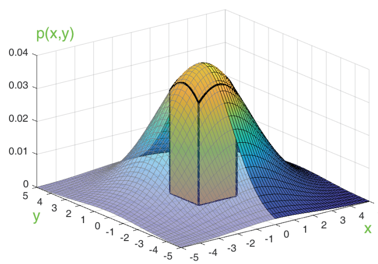
▲ 一维离散型随机变量的分布列

$Y\backslash X$	1	2	3	4
1	1/4	1/8	1/12	1/16
2	0	1/8	1/12	1/16
3	0	0	1/12	1/16
4	0	0	0	1/16

▲ 二维离散型随机变量的分布列



▲ 一维连续型随机变量的密度函数



▲ 二维连续型随机变量的密度函数

当然，联合分布律与联合密度函数也有如下性质：

二维离散型随机变量

（1）非负性　$0\leqslant p_{ij}\leqslant 1$

（2）归一性　$\sum_{i=1}^{n}p_{ij}=1$

二维连续型随机变量

（1）非负性　$p(x,y)\geq 0$

（2）归一性　$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$

（3）$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_{D}p(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

对二维连续型随机变量来讲，其可能取值是一对对的向量也即点 (x,y)，故计算取值落入某区域内的概率是二重积分，计算时技巧较多，请留意积分次序与积分限．

TIPs

同样的，分布函数也可以推广到二维随机变量的情形，表示 $X \leqslant x$ 且 $Y \leqslant y$ 的概率，即**联合分布函数**：

联合分布函数 称 $F(x,y)=P\{X \leqslant x;Y \leqslant y\}(-\infty<x,y<+\infty)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数．

联合分布函数也有如下的常用性质：

（1）$0 \leqslant F(x,y) \leqslant 1, x,y \in \mathbf{R}$ （2）$F(x,y)$ 关于 x,y 分别单调不减

（3）$F(-\infty,y)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=0,\quad F(x,-\infty)=\lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=0$

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{x\to+\infty,y\to+\infty}F(x,y)=1$$

（4）对离散型随机变量，$F(x,y)=\sum\limits_{x_i\leqslant x,y_j\leqslant y}P\{X=x_i;Y=y_j\}$

对连续型随机变量，$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$p(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$

至此，我们有了二维随机变量联合分布的三种描述方法，即联合分布函数、离散型的联合分布律、连续型的联合密度函数．

对二维连续型随机变量来说，联合分布函数是密度函数的二重变上限积分；联合密度函数是分布函数的二阶混合偏导数．二维离散型一般不用联合分布函数．

TIPs

二维随机变量 (X,Y) 的联合分布可以完全决定它的概率特征，因此其两个分量的概率分布也可以由联合分布求得，称之为分量 X,Y 相对于联合分布的**边缘分布**：

对二维离散型随机变量来讲，其**边缘分布律**为：

边缘分布律 称 $P\{X=x_i\}=P\{X=x_i;\sum_j(Y=y_j)\}$ 为二维随机变量 (X,Y) 中分量 X 的边缘分布律．

对二维连续型随机变量来讲，其**边缘密度函数**为：

边缘密度函数 称 $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y$ 为二维随机变量 (X,Y) 中分量 X 的边缘密度函数．

同样的，二维随机变量也有**边缘分布函数**的概念：

边缘分布函数 称 $F_X(x)=P\{X \leqslant x;Y \in \mathbf{R}\}=F(x,+\infty)$ 为二维随机变量 (X,Y) 中分量 X 的边缘分布函数．

以上定义仅给出 X 的边缘分布，分量 Y 的边缘分布同理可得.

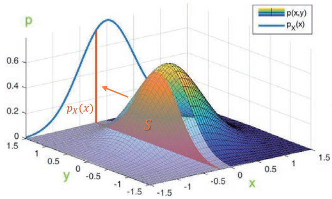
边缘分布的形象解释

好像有点明白，又好像不太明白……虽说直接代入式子里去求我是会的，但我并不理解为什么这么做……

学习一事应当由易入难，循序渐进才对，就从一个简单例子开始吧．下面左图是一个二维离散型随机变量的联合分布列．派蒙应该熟悉了吧，我就不铺垫实际背景了？

$Y \backslash X$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$
$Y=1$	1/4	1/8	1/12	1/16
$Y=2$	0	1/8	1/12	1/16
$Y=3$	0	0	1/12	1/16
$Y=4$	0	0	0	1/16
	1/4	1/4	1/4	1/4

▲ 离散型随机变量的边缘分布



▲ 连续型随机变量的边缘分布

没问题，这个我还是能看懂的．现在就要从这个联合分布列来求边缘分布了吧！不如先求 X 的分布怎么样？

好．单独看 X，它是一个一维离散型随机变量，求它的分布就是求其分布律，也就是它的所有可能取值和对应的概率．取值应该很好找吧．

嗯嗯，X 可以取 $1,2,3,4$ 嘛．

没错，那么概率呢？先来举个特例，$P\{X=1\}$ 怎么求呢？

联合分布律是 X 和 Y 共同取值的概率，而 $\{X=1\}$ 实际上包含了 $\{X=1;Y=1\}\{X=1;Y=2\}\{X=1;Y=3\}\{X=1;Y=4\}$ 这四个事件．所以就是把 $\{X=1\}$ 的这一列全部加起来！

看来派蒙已经明白了．把求得的概率之和写在联合分布列的边上，于是就得到了边缘分布．

哦！原来“边缘分布”的名字是这样来的．那么连续型随机变量呢？

其实也是“求和”，因为积分的本质就是求和．连续型随机变量，是将分量 X 每个取值的各个概率密度求和，得到对应边缘密度值，组合在一起成为边缘密度函数．如上右图所示，边缘密度函数在点 x 处的函数值（高度），就是联合密度函数在 x 处的“切片”的积分值（面积）哦．

这里需要指出两点：其一，二维随机变量的边缘分布，求得的是其一维分量的概率分布，遵从一维随机变量分布的性质；其

二，联合分布可以唯一确定两个分量的边缘分布，但两个边缘分布却能组成众多不同的联合分布．

注意理解二维连续型随机变量的边缘密度的求法：求 X 的边缘密度，则将联合密度函数对 y 求广义积分；求 Y 的边缘密度，则将联合密度函数对 x 求广义积分．

TIPs

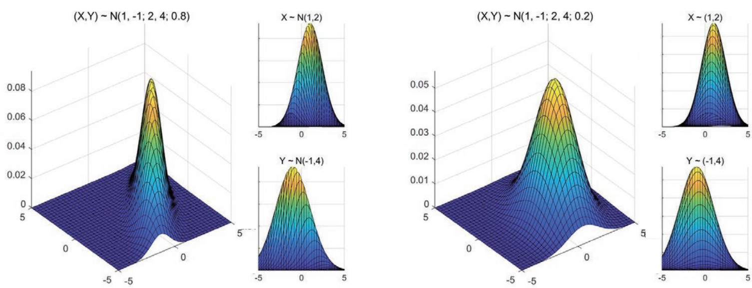
最后要介绍一种特殊的二维随机变量：服从**二维正态分布**的随机变量 (X,Y)：

二维正态分布　二维正态随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为：

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(x-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\},$$

记作 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$．（$\sigma_1,\sigma_2>0,|\rho|<1$）

二维正态随机变量的边缘分布正是一维正态分布 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$．联合密度函数中的参数 ρ 称为相关系数，它决定着两边缘分布的相关性．因此，即使两边缘分布保持不变，相关系数 ρ 改变也会影响联合分布，如下图所示：



▲ 边缘分布相同，相关系数不同的二维正态分布

特别当 $\rho=0$ 时，称两边缘分布 X,Y 相互独立．另外，边缘分布是正态分布的随机变量，其联合分布不一定是二维正态分布．

好——长——的式子，一定要记下来吗……

二维的确实不用哦，但是记号和参数一定要认识．

例题时間 Time for Example §2.4

例 2.41 二维随机变量 (X,Y) 概率密度为 $p(x,y)=\begin{cases}Ke^{-(3x+4y)},x>0,y>0\\ 0\quad ,otherwise\end{cases}$，

(1) 求常数 K；(2) 求 (X,Y) 的联合分布函数．

解 (1) 因 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，故 $K\int_0^{+\infty}e^{-3x}\int_0^{+\infty}e^{-4y}\mathrm{d}y=1$；

即 $\frac{1}{12}K=1$，解得 $K=12$．

(2) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}12\int_0^x e^{-3x}\mathrm{d}x\int_0^y e^{-4y}\mathrm{d}y\\ 0\end{cases}$

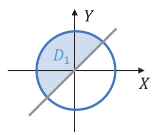
$=\begin{cases}12\times\frac{1}{3}(1-e^{-3y})\times\frac{1}{4}(1-e^{-4y})\\ 0\end{cases}=\begin{cases}(1-e^{-3y})(1-e^{-4y}),x>0,y>0\\ 0\quad ,otherwise\end{cases}$

用公式按部就班求解就好，注意密度函数的分段，以及重积分的计算～

例 2.42 二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D{:}x^2+y^2\leqslant R^2$ 内服从均匀分布，求：(1) 求 (X,Y) 的联合密度函数；(2) $P\{Y\geqslant X\}$．

解 (1) 因 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，且服从均匀分布，故 $p(x,y)$ 为常数；

则由二重积分的几何意义，$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi R^2},(x,y)\in D\\ 0\ ,otherwise\end{cases}$．



(2) 如图，$P\{Y\geqslant X\}=\iint_{D_1}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，由几何意义：

$P\{Y\geqslant X\}=\frac{1}{\pi R^2}\times\frac{1}{2}\pi R^2=0.5$．

二维均匀分布可以作为结论使用，密度函数值是对应区域面积的倒数．

例 2.43 在 1, 2, 3, 4 中任取一个数记为 X，又在 1 到 X 间任取一整数记为 Y，试求 (X,Y) 的联合分布列及 X,Y 的分布列．

解 设 X 可能取值为 $i(i=1,2,3,4)$，

而 Y 可能取值为 $j(j=1,\cdots,i)$，

则 $P\{X=i;Y=j\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{i}$．

联合分布列如右表所示．

相应的边缘分布如下表所示．

Y \ X	1	2	3	4	
1	1/4	1/8	1/12	1/16	25/48
2	0	1/8	1/12	1/16	13/48
3	0	0	1/12	1/16	7/48
4	0	0	0	1/16	3/48
	1/4	1/4	1/4	1/4	

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	1	2	3	4
P	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{3}{48}$

抓住定义求解，求联合分布列就是求 (X,Y) 同时取一组值 (i,j) 的概率．

例 2.44 若随机变量 (X,Y) 的联合概率密度 $p(x,y)=\dfrac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y)^2}$，试求 X,Y 的分布 .

解 $$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi^2(1+y^2)}\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)}.$$

同理 $p_Y(y)=\dfrac{1}{\pi^2(1+y^2)}$.

求 X 分布对 y 积分，求 Y 分布对 x 积分，注意广义积分的运算 ~

本节涉及的二维随机变量是重要考点，相较于一维情形，对计算的要求更高，需要同学们巩固《高等数学》相关基础；联合分布与边缘分布的定义也要牢记并熟练运用 .

§2.5 二维随机变量的条件分布与独立性

第一章中我们讨论了事件的条件概率，在那里我们以一个随机事件发生为条件，研究另一个随机事件发生的概率 . 现在我们可以将条件概率的概念推广到随机变量场合 .

考虑随机变量 (X,Y) 在其中一个分量取得固定值的条件下另一个分量的概率分布，这样得到的 X 或 Y 的分布称为**条件分布**：

对二维离散型随机变量来讲，其**条件分布律**为：

条件分布律　　称 $P\{X=x_i\mid Y=y\}=\dfrac{P\{X=x_i;Y=y\}}{P\{Y=y\}}$

为 $\{Y=y\}$ 发生的条件下 X 的条件分布律 .

对二维连续型随机变量来讲，其**条件密度函数**为：

条件密度函数　　称 $p(x\mid y)=\dfrac{p(x,y)}{p_Y(y)}$

为 $\{Y=y\}$ 发生的条件下 X 的条件密度函数 .

同样也可以研究连续型随机变量的**条件分布函数**：

条件分布函数　　称 $F(x\mid Y=y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}\mathrm{d}x$

为 $\{Y=y\}$ 发生的条件下 X 的条件分布函数 .

以上定义仅给出 X 的条件分布，分量 Y 的条件分布同理可得.

所以说条件分布的定义和条件概率其实差不多？都是交事件的概率除以条件本身的概率嘛．

没错，只不过对二维随机变量来讲，“交事件”就是联合分布．另外，条件分布函数记忆成密度的积分就好．

条件分布也是一维随机变量的分布，代入公式计算时，作为条件的那个变量均应当视作常数．

第一章中我们还研究过两随机事件相互独立的概念，即事件的条件概率等于无条件概率．这概念也可以推广到随机变量场合，即认为事件 $\{X \leqslant x\}$ 与事件 $\{Y \leqslant y\}$ 相互独立，进而可以定义如下**随机变量的独立性**：

定义 2.3 （独立随机变量）设 X,Y 为两随机变量，若对任意实数 x 与 y，$P\{X \leqslant x; Y \leqslant y\} = P\{X \leqslant x\}P\{Y \leqslant y\}$，则称 X,Y 相互独立．

针对不同的描述二维随机变量的手段，独立性的表述各有不同．对离散型随机变量来讲，其独立的充要条件是：

$$P\{X = x_i; Y = y_i\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_i\}$$

对连续型随机变量来讲，其独立的充要条件是：

$$p(x,y) = p_X(x)\,p_Y(y)$$

也可以用分布函数来描述随机变量的独立性：

$$F(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y)$$

总而言之，不论是分布律、密度函数还是分布函数，两随机变量独立的充要条件都是<u>联合分布等于两边缘分布之乘积</u>．

离散型随机变量相互独立，要求边缘分布的每个取值之概率的乘积都等于联合分布的，不能以特例来判断；连续型随机变量也要求等号两边的函数完全相等才可以．

TIPs

最后，我们不加证明地指出服从二维正态分布的随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的条件分布与独立性．

二维正态分布的两条件分布仍是正态分布，但参数 μ 与 σ 改变：在 $Y=y$ 的条件下，$X\sim N(\mu_1+\rho\sigma_1(y-\mu_2)/\sigma_2,\ \sigma_1\sqrt{1-\rho^2})$．根据轮换对称性也可得 Y 的条件分布．

显然，$\rho=0$ 是二维正态随机变量相互独立的充要条件，因为此时条件分布将等于对应的边缘分布（无条件分布）.

例题時間 Time for Example §2.5

例 2.51 二维随机变量 (X,Y) 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ 上服从均匀分布，求条件概率密度 $p(x|y)$（y 为常数且 $|y|\leqslant b$）.

解 由题意，$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi ab}, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\\ 0\quad, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1\end{cases}$. 椭圆内点有 $\begin{cases}|y|\leqslant b\\ |x|\leqslant a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\end{cases}$.

故 $p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}\frac{1}{\pi ab}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi b}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\ (|y|\leqslant b)$.

则 $p(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\frac{1}{\pi ab}/(\frac{2}{\pi b}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}})=\frac{1}{2a\sqrt{1-y^2/b^2}}\ (|y|\leqslant b)$.

此处 y 为常数，故这条件分布也服从均匀分布.

求条件分布要先求边缘分布，注意区别积分变量与常数，正确判断积分限~

例 2.52 二维随机变量 (X,Y) 概率密度为 $p(x,y)=\begin{cases}6, x^2\leqslant y\leqslant x\\ 0, otherwise\end{cases}$，试判断 X,Y 是否相互独立.

解 由题意，x,y 取值范围为 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2\leqslant y\leqslant x\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 1\\ y\leqslant x\leqslant\sqrt{y}\end{cases}$.

故 $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}6\mathrm{d}y, 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\quad, otherwise\end{cases}=\begin{cases}6(x-x^2), 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\quad, otherwise\end{cases}$,

且 $p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}}6\mathrm{d}x, 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0\quad, otherwise\end{cases}=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0\quad, otherwise\end{cases}$,

显然 $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$ 不始终成立，故 X,Y 不独立.

对 x 积分 y 就为自变量，对 y 积分 x 就为自变量，注意积分限的考虑哦~

本节内容没有难点，条件分布与独立性都是仅靠记忆公式就可掌握的内容. 但是，求解条件分布或判断独立性要依靠联合分布与边缘分布，因此上一节的内容仍然是重点.

§2.6 二维随机变量的函数及其分布

在本章 2.3 节中，我们已经讨论了一维随机变量的函数及其分布的求解．二维随机变量也有其相应的函数，例如从教令院随机抽取一位同学，其《概率论与数理统计》课程的平时成绩 X 与期末成绩 Y 组成随机变量 (X,Y)，则其总成绩 $Z=0.3X+0.7Y$，这就是一个**二维随机变量的函数** $Z=f(X,Y)$．

实际上，可以类比《高等数学》中一元函数与二元函数的相关概念：一维随机变量的函数有一个自变量 X，二维随机变量的函数有两个自变量 X,Y．只不过这里的自变量为随机变量，函数值也为随机变量罢了．

下面我们仍然针对离散型随机变量和连续型随机变量，根据它们的分布律或概率密度，来求它们函数的分布．

1. 二维离散型随机变量的函数

二维离散型随机变量的函数求解与一维情形相仿．一般但，已知 (X,Y) 的联合分布列，根据函数关系 $Z=f(X,Y)$ 计算出 Z 的各可能取值 z_k（若 X 有 i 个可能取值，Y 有 j 个可能取值，则 Z 有至多 $k=ij$ 个可能取值），再将原本 (x_i,y_j) 对应的概率 p_{ij} 对应至 z_k 即可．最后能合并的取值要合并，概率为 0 的取值舍弃．

如下例所示，已知 (X,Y) 的联合分布列，求 $X+Y$ 的分布列：

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	1/12	1/12	3/12
$1/2$	2/12	1/12	0
3	2/12	0	2/12

已知(X,Y)的联合分布列

$X+Y$	-3	-2	-1	$-3/2$	$-1/2$	$1/2$	1	2	3
P	1/12	1/12	3/12	2/12	1/12	0	2/12	0	2/12

$X+Y$	-3	-2	-1	$-3/2$	$-1/2$	1	3
P	1/12	1/12	3/12	2/12	1/12	2/12	2/12

求$Z=X+Y$的可能取值，并化简得到Z的分布列

▲ 求二维离散型随机变量的函数的分布列

这里我们还要给出一条关于两相互独立且服从泊松分布的随机变量之和的分布的结论（证明见附录 1）：

若 $X\sim P(\lambda_1),Y\sim P(\lambda_2)$，且 X,Y 相互独立，则 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$．

需要说明的是，分布列仅适用于取值为有限个的离散型随机变量．对于取值为无限可列个的泊松分布，则必须用联合分布律求解．尽管求解思想与上例一致，但其中将涉及到一些较复杂的数学运算与化简工作．

2. 二维连续型随机变量的函数

二维连续型随机变量的函数分布，求解方法与一维情形也类似，从其分布函数入手．若欲求随机变量 $Z=f(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}$，即求概率 $P\{f(X,Y)\leqslant z\}$ ．

事实上，$\{f(X,Y)\leqslant z\}$ 这一事件正表示二维随机变量 (X,Y) 的取值 (x,y) 落入不等式 $f(x,y)\leqslant z$ 规定的平面区域内的概率．根据概率密度函数的性质，我们有：

$$P\{f(X,Y)\leqslant z\}=\iint\limits_{f(x,y)\leqslant z} p(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这样，求分布函数的问题就被转化成求指定区域上概率密度的二重积分的问题．求得随机变量的分布函数后，若欲求其密度函数，只需对分布函数求变上限积分即可．

以上就是求解二维随机变量的函数分布的一般方法．通常来说，由于函数表达式、变量取值范围各不相同，求解二重积分也常就具体问题具体分析，不论如何选取积分顺序，只要能求得正确的结果即可．不过，对一些形式特殊的函数，我们有以下结论可供使用（证明见附录 1）：

$X+Y$ 的分布　　若 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)$，则 $Z=X+Y$ 的密度函数为 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z-y,y)\,\mathrm{d}x$ ．

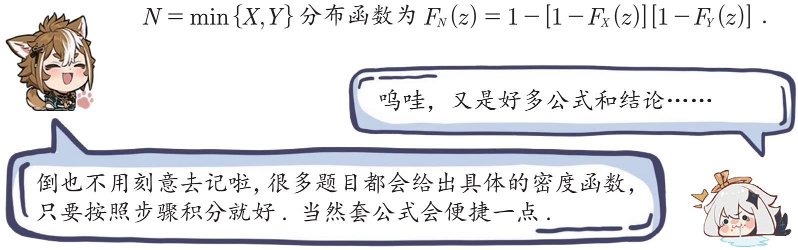
Y/X 的分布　　若 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)$，则 $Z=Y/X$ 的密度函数为 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p(x,xz)\,\mathrm{d}x$ ．

YX 的分布　　若 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)$，则 $Z=YX$ 的密度函数为 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{x}\right|p(x,\frac{z}{x})\,\mathrm{d}x$ ．

极值分布　　若 X,Y 相互独立，且分布函数为 $F_X(x),F_Y(y)$，则

$M=\max\{X,Y\}$ 分布函数为 $F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$；

$N=\min\{X,Y\}$ 分布函数为 $F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$ ．



这里我们不加证明地给出一条关于两相互独立且服从正态分布的随机变量之和的分布的结论：

若 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 X,Y 相互独立，则它们的和 $X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

此结论非常重要也非常常用，它是第四章中心极限定理及之后数理统计部分内容的基础 .

以上结论可以推广到 n 个随机变量之和的情形：若 $X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)(i=1,2,\cdots,n)$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则 $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim N(\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i,\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^2)$.

TIPs

久岐忍同学的考点提示！

考点！

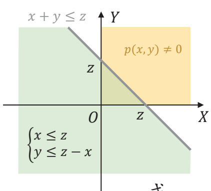
本节也是重要考点．但除泊松分布、正态分布之和这两条重要结论以外，其他内容都重在方法而非公式或结论．熟练求解二重积分是求解本节相关问题的关键．

例题時間 Time for Example §2.6

例 2.61 二维随机变量 (X,Y) 概率密度为 $p(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, x>0,y>0\\ 0 \quad ,otherwise\end{cases}$，求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数 .

解 ①当 $z\leqslant 0$ 时，由图可知 $p_Z(z)=0$；

②当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+y\leqslant z} p(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$



$$=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{z-x} p(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^z\int_0^{z-x}2e^{-(x+2y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^z e^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{z-x}e^{-2y}\mathrm{d}y=-2e^{-z}+e^{-2z}+1.$$

故 $p_Z(z)=F_Z'(z)=2(e^{-z}-e^{-2z})$.

或：$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}p(x,z-x)\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^z 2e^{x-2z}\mathrm{d}x=2(e^{-z}-e^{-2z}).$$

综上，$p_Z(z)=\begin{cases}2(e^{-z}-e^{-2z}), z>0\\ 0 \quad ,z\leqslant 0\end{cases}$．（公式法也可选择对 y 积分）

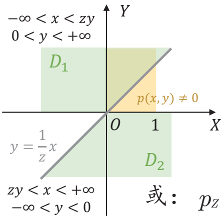
不论用分布函数求解还是直接套用公式，都要留意自变量的取值范围．尤其是公式法，虽然公式里积分限是无穷，但实际应用时 x 的取值范围要同时满足 x 与 z-x 都在密度函数有取值的区域内哦 ~

例 2.62 设 X,Y 相互独立且 $p_X(x)=\begin{cases}1,0\leqslant x\leqslant 1\\0,otherwise\end{cases}, p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y},y>0\\0,otherwise\end{cases}$，求 $Z=X/Y$ 的概率密度函数 .

解 由题意，(X,Y) 的联合密度函数 $p(x,y)=\begin{cases}e^{-y},0\leqslant x\leqslant 1,y>0\\0,\quad otherwise\end{cases}$.

①当 $z\leqslant 0$ 时，易得 $p_Z(z)=0$；（需重绘图像，下图中 $z>0$）

②当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X/Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x/y\leqslant z}p(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$



$$=\int_{zy}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{0}p(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{zy}\mathrm{d}x\int_{0}^{+\infty}p(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x/z}^{+\infty}e^{-y}\mathrm{d}y=-ze^{-\frac{1}{z}}+z.$$

故 $p_Z(z)=F_Z'(z)=1-(1+\frac{1}{z})e^{\frac{1}{z}}$.

或：$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|p(yz,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{1/z}ye^{-y}\mathrm{d}y$ $\quad\left(\begin{matrix}0\leqslant yz\leqslant 1\\y>0\end{matrix}\right)$

$$=1-(1+\frac{1}{z})e^{\frac{1}{z}}.$$

综上，$p_Z(z)=\begin{cases}1-(1+\frac{1}{z})e^{\frac{1}{z}},z>0\\\quad 0\qquad\quad,z\leqslant 0\end{cases}$.（公式法注意积分限的确定）

注意本题积分限的确定：使用分布函数求解，则根据图像和密度函数的实际区域确定积分限；使用公式求解，则积分变量 y 的范围需要保证 y 和（在 x 位置上的）yz 二者都落入密度函数有取值的区域内 .

例 2.63 设 X,Y 为两个随机变量，且 $P(X\geqslant 0;Y\geqslant 0)=3/7$，$P\{X\geqslant 0\}=P\{Y\geqslant 0\}=4/7$，求 $P\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}$.

解 因 $\max\{X,Y\}\geqslant 0$ 对立于 $\{X<0;Y<0\}$，

即 $P\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}=1-P\{X<0;Y<0\}$；

而 $P\{X<0;Y<0\}=1-P\{X\geqslant 0\cup Y\geqslant 0\}$（由对偶律可得）

$=1-(P\{X\geqslant 0\}+P\{Y\geqslant 0\}-P\{X\geqslant 0;Y\geqslant 0\})=2/7$，

故 $P\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}=1-2/7=5/7$.

对于极值分布，通常我们都寻找其等价事件：$\max\{X,Y\}$ 比谁小，则 X,Y 均比它小；$\min\{X,Y\}$ 比谁大，则 X,Y 均比它大 . 不等号方向改变时（最大值大于谁 / 最小值小于谁），考虑其对立事件 ~

本节内容是必考考点，小题或计算题都有可能出现 . 公式法可以不加证明直接在计算题中使用，但需要明了各个字母的含义，掌握确定积分限的方法；利用分布函数求解则比较直白，但计算较为繁琐，容易出错 . 建议读者都加以掌握 .

只要你不失去你的崇高，整个世界都会为你敞开。

第 5 章　数理统计的基本概念

最近得趁假期回一趟稻妻，处理社奉行的事务呢．

诶，托马要回去忙什么呀？绫华和绫人不去吗？

小姐就不回去了，我和家主大人要回去商议庆典之事．整理一些往年资料，统计庆典规模、参加人数、物料筹备等方面的数据，和鸣神大社一起评估一下今年的庆典计划安排是否妥当等等……

统计推断啊，托马看来要学以致用了嘛．

§5.1　数理统计中的常用概念

在前四章中，我们系统地学习了利用随机变量描述随机现象的统计规律性的方法．然而，这些方法均建立在随机变量的分布已知（或假设已知）的情况．

很多实际问题中，描述一个随机现象的随机变量服从什么分布往往是未知的；或者即使已知其分布形式，也难以得知其具体参数．例如说：

某仪器的测量误差X服从正态分布

$X\sim N(0,\sigma^2)$，但σ^2未知

某批电子元件的寿命Y服从指数分布

$Y\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，但$\lambda$未知

解决这类问题的基本思想是，从所研究对象的全体中随机抽取一部分进行试验或观测，以获取试验数据；再依据试验数据所

提供的信息，对整体作出推断．也就是说，数理统计是研究“从特殊到一般”的统计推断问题的学科．

数理统计研究的内容其实十分广泛，大致说来分为两方面：一是试验设计，即研究如何更有效获取试验数据的方法；二是统计推断，是我们课本主要要介绍的内容．

TIPs

我们先来介绍一些数理统计中的常用概念，这些概念既具有其实际意义，也可以利用概率论中的相关方法来描述：

总体　所研究对象全体的某方面性质称作总体．
数理统计中，一个随机变量 X 或分布函数 $F(x)$ 称为一个**总体**．

个体　组成总体的每个元素称作个体．
与总体 X 独立同分布的 X_i，即为总体中随机抽取的一个**个体**．

样本　从总体 X 中随机抽取 n 个个体 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，
称为总体的容量为 n 的**样本**，记作 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$．

数理统计中的总体与个体

个体为什么是随机变量呀？比如说，总体是一批灯泡的寿命，个体就是其中一个灯泡的寿命，应该是确定的呀？

派蒙忽略了“随机抽取”这一条件哦．虽然每个个体都是确定的，但是随机抽取为它赋予了随机性．

那我抽取出来的时候不就知道它的值是多少了嘛！

这种想法是不符合科学研究的思维的．就像代数式更直观，那我们为什么还要学习解方程呢？虽然你这一次抽取个体得到了确定的值，那下一次抽取还是这个值吗？要想建立系统的研究方法，就得对具有代表性的未知量进行数学分析，而不是只关心一个特例哦．

这里注意要理解样本的概念．其一，样本是一个 n 维随机变量，这说明它具有联合分布函数；其二，作为随机变量，样本也可以取到一组特定值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，称为样本的观测值，简称为**样**

本值，实际上就是样本空间中的一个（n 维的）样本点．

随机抽样的目的是为了利用样本对总体的分布或某些特征进行推断，因此要求抽取的样本具有如下的特性：

(1) 代表性，即样本的每个分量 X_i 与总体 X 同分布；

(2) 独立性，即样本的每个分量 X_i 之间相互独立．

满足以上两条性质的样本称为**简单随机样本**．今后如无特别说明，本书所说样本均指简单随机样本．

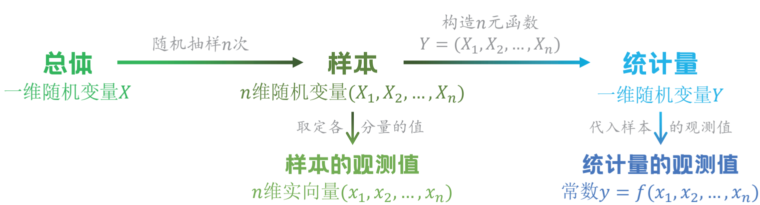
为什么不用随机变量序列 $\{X_n\}$ 在这里描述 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 呢？

我觉得“序列”更强调变化和趋势；而样本通常要作为一个整体来考量，**n 维随机变量具有联合分布**，更有优势嘛．

样本是统计分析和推断的依据，然而由于抽样的随机性，我们的原始样本很有可能是杂乱无章的，不利于我们使用．为此引入**统计量的概念**：

统计量　设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为总体 X 的一个样本，
若样本的函数 $Y=f(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 不含任何未知参数，
则称此函数为样本的一个**统计量**．
若样本取得一组观测值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，
则统计量 Y 也相应取得其观测值（函数值）$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$．

由定义，统计量是一个随机变量，因此它同样也具有分布函数、数学期望、方差与矩等描述方法．下面的图示反映了总体、样本与样本观测值、统计量与统计量观测值之间的关系：



▲ 总体、样本、统计量间的关系

要注意，统计量作为关于 n 个随机变量的函数，要求它的函数表达式中不应含有任何未知参数．例如说设样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

来自正态总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$，其中参数 σ^2 未知，则函数 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是统计量，而 $Z=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 不是统计量．

但是统计量本身作为<u>一维随机变量</u>，它服从的分布中可以含有未知参数．例如上面的统计量 Y，根据正态分布和的性质很容易知道 Y 服从正态分布 $N(0,\frac{\sigma^2}{n})$，其中就含有未知参数 σ^2．

统计量与我们在第二章 2.6 节学习的“二维随机变量的函数”没有本质区别，只不过这里由 n 个变元构成函数．请注意区分<u>函数的元数</u>与<u>随机变量的维数</u>．

TIPs

下面介绍几个实际中常用的统计量，它们统称为**样本矩**：

（1）样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

（2）样本方差 $S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2$

样本标准差 $S_n=\sqrt{S_n^2}$

（3）修正样本方差 $S_n^{*2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{n}{n-1}S_n^2$

修正样本标准差 $S_n^*=\sqrt{S_n^{*2}}$

（4）样本 k 阶原点矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$

样本 k 阶中心矩 $B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$

奇怪，统计量不是随机变量吗？怎么又叫均值又叫方差的．

只是形式上类似．虽然它们如此称呼也确实有其实际意义，不过还是建议直接将其理解为随机变量哦．

我们还要不加证明地给出样本矩的如下性质：

（1）$E(\overline{X})=E(X)$
即：样本均值的期望等于总体期望

（2）$D(\overline{X})=\frac{1}{n}D(X)$
即：样本均值的方差为总体方差 $1/n$ 倍

（3）$E(S_n^2)=\frac{n-1}{n}D(X)$
即：样本方差的期望渐进等于总体方差

（4）$E(S_n^{*2})=D(X)$
即：修正样本方差的期望等于总体方差

（5）$E(A_k)=\alpha_k$
即：样本原点矩的期望等于总体矩

（6）$A_k \xrightarrow{P} \alpha_k$
即：样本原点矩依概率收敛于总体矩

样本矩的数字特征

均值的期望，均值的方差……什么呀，头晕乎乎的……

我们挨个来解释一下这些性质吧．首先，统计量是一个随机变量，这点派蒙应该已经理解了吧？

这个我理解了，样本取定一组值，统计量才能取定一个值．

那么我们每抽样一次并得到结果，样本都会取定到不同的值，统计量也是如此，这就是它作为随机变量的随机性．

哦哦，那么每次抽样，样本的样本均值肯定也是随机的！

没错！既然是随机的，那么它自然有数学期望啊．

也就是说，如果我抽很多次样，得到很多个样本均值的观测值，那么它们的平均（期望）就是总体的期望！

你已经自己解释了性质（1）嘛．性质（2）是类似的，按照一定的样本容量 n 去抽样，每次抽样以后我们都能得到一个样本均值．每个均值可能比样本均值的期望 $E(\overline{X})$ 大或者小，这样就产生了样本均值的方差 $D(\overline{X})$ ．如果抽样的样本容量 n 越大，总的偏差就会越小．

也就是说，如果样本容量足够大，每次抽样得到的样本均值应该都会相等吧！

完全正确．再说一下性质（3）和（4）吧．所谓样本方差，反映的是样本中每一个分量的波动情况，这点要和样本均值的方差区别开来：<u>样本方差</u>是一次抽样中各个分量的偏差，是一个统计量；<u>样本均值的方差</u>是多次抽样中每一次样本均值的波动情况，是一个数字特征．了解了样本方差，我想理解性质（3）和（4）应该很容易吧．

上述性质（1）至（5）都是关于样本矩的数字特征的，其中性质（1）是性质（5）的特殊情况．

性质（6）描述的是样本原点矩这个随机变量本身，具体说来

是，当样本容量 n 很大时，样本均值 $\overline{X}$（一阶原点矩）依概率收敛于总体期望 $E(X)$，样本方差 S_n^2（二阶中心矩）依概率收敛于总体方差 $D(X)$．这一性质是下一章参数矩估计的理论依据．

这里确实是随机变量（统计量）依概率收敛于一个常数（数字特征），在第四章中我们就已经见过这种情况．随着样本容量增大，统计量的取值愈发集中是必然的．

TIPs

下面介绍**次序统计量**的概念．设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为总体 X 的一个样本，且 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为样本的一个观测值，依据此观测值将其由小到大重新排序并记为 $(x_{(1)},x_{(2)},\cdots,x_{(n)})$，如下图所示：

$X \sim U[0,5]$ —抽样→

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
3.0	0.2	2.4	4.6	1.3

—排序→

X_2	X_5	X_3	X_1	X_4
0.2	1.3	2.4	3.0	4.6

总体X　　样本(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)　　次序统计量$(X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)},X_{(4)},X_{(5)})$

▲ 次序统计量的由来

排序样本观测值时，将每个观测值对应的分量同时移动，形成新的 n 维随机变量，并重新记为 $(X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)})$，称其为样本的**次序统计量**．它也是一种统计量．

其中，称 $X_{(i)}$ 为第 i 位次序统计量．我们较为常用的是第 1 次序统计量 $X_{(1)}$（最小次序统计量）和第 n 次序统计量 $X_{(n)}$（最大次序统计量）．

对于连续总体，次序统计量的分布有如下结论：

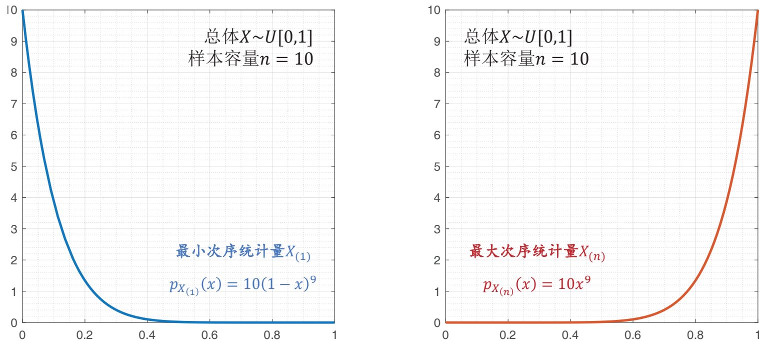
最小次序统计量　$p_{X_{(1)}}(x)=n[1-F(x)]^{n-1}p(x)$

最大次序统计量　$p_{X_{(n)}}(x)=n[F(x)]^{n-1}p(x)$

次序统计量……的分布？是怎么来的呢？

建议你不要认为“有样本观测值才能有次序统计量”，而要理解成“第 i 位次序统计量应当能取什么值”．

要特别指出的是，即使样本的各分量是相互独立的，次序统计量的各分量却一定不相互独立．为了说明这一点，我们试举一例，绘制最小、最大次序统计量的图像：



▲ 总体 $X\sim U[0,1]$，容量为 10 的样本的最小、最大次序统计量密度函数图像

由图可见，最小次序统计量 $X_{(1)}$ 取值在 $[0,0.2]$ 间的概率较大．这是因为对于总体 $X\sim U[0,1]$ 来讲，倘若一次抽样中最小的那个样本值都偏大，则其他样本值必然比它还大，这不符合“均匀分布”的分布规律，因此是小概率事件．

同理，最大次序统计量取值在 $[0.8,1]$ 间的概率较大．由于每个随机变量的取值概率都受到其“次序”的影响（最小次序统计量的取值不应太大，最大次序统计量的取值不应太小），因而次序统计量之间不是相互独立的．

公式中 $F(x),p(x)$ 分别为总体的分布函数、密度函数．倘若实在无法理解次序统计量的含义，请牢记公式，能够在考试中求解即可．

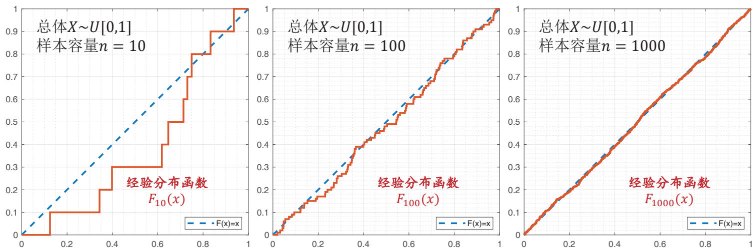
TIPs

在实际问题中，总体 X 的分布函数 $F(x)$ 通常是未知的．依据来自总体的样本值，我们可以估计总体的分布．下面介绍经验分布函数的概念：

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为总体 X 的样本，观测一组样本值后将其按由小到大的次序排列为 $(x_{(1)},x_{(2)},\cdots,x_{(n)})$，则称函数：

$$F_n(x)=\begin{cases}0, & x<x_{(1)}\\ k/n, & x_{(k)}\leqslant x<x_{(k+1)}\ (k=1,2,\cdots,n-1)\\ 1, & x\geqslant x_{(n)}\end{cases}$$

为总体 X 的**经验分布函数**．显然，经验分布函数是一个分段函数，其函数图像类似于离散型随机变量的分段函数，是阶跃式的．下面试举一例：



▲ 总体 X~$U[0,1]$，不同随机样本对应的经验分布函数

由图可见，当样本容量 n 很大时，经验分布函数 $F_n(x)$ 与总体分布函数 $F(x)$ 相差甚微．这就是所谓的**格里文科定理**：

格里文科定理 当 $n\to\infty$ 时，经验分布函数 $F_n(x)$ 几乎处处收敛于总体分布函数 $F(x)$，即 $F_n(x)\xrightarrow{a.e.}F(x)$．

从而在实际中，可以据此定理，用大容量样本的经验分布函数 $F_n(x)$ 估计总体分布函数 $F(x)$．

例 5.11 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是总体 X 的一个样本，总体服从参数为 4 的指数分布，则 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于？

解 由题意，Y_n 为样本的 2 阶原点矩，依概率收敛于总体 2 阶矩 $E(X^2)$．

又 X~$\mathrm{Exp}(4)$，故 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\dfrac{1}{4^2}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{8}$．

即 $Y_n\xrightarrow{P}\dfrac{1}{8}$．

单纯考察了性质 (6)，以及指数分布的期望与方差哦~

例 5.12 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是总体 X 的一个样本，总体服从参数为 λ 的指数分布，试求 $X_{(1)},X_{(n)}$ 的密度函数．

解 由题意，$p_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}(x>0)$，故 $F_X(x)=\int_0^x p(x)\,\mathrm{d}x=1-e^{-\lambda x}(x>0)$.

则 $p_{X_{(1)}}(x)=n[1-F(x)]^{n-1}p(x)=ne^{-(n-1)\lambda x}\lambda e^{-\lambda x}=n\lambda e^{-n\lambda x}$；

$p_{X_{(n)}}(x)=n[F(x)]^{n-1}p(x)=n(1-e^{-\lambda x})^{n-1}\lambda e^{-\lambda x}$．

只要求出总体的密度函数与分布函数，套公式就可以了~

例 5.13 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是总体 X 的一个样本．(1) 若设 $X\sim B(n,p)$，求 $E(\overline{X}),D(\overline{X}),E(S_n^{*2})$；(2) 若 $X\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，求 $E(\overline{X}),D(\overline{X}),E(S_n^{*2})$；(3) 设样本的一组观测值为(4.3, 1.1, 1.4, 3.1, 7.7, 1.4, 3.1)，求经验分布函数．

解 (1) 易知 $E(X)=np,D(X)=np(1-p)$，则由统计量的性质得，

$E(\overline{X})=np,D(\overline{X})=p(1-p),E(S_n^{*2})=np(1-p)$．

(2) 易知 $E(X)=1/\lambda,D(X)=1/\lambda^2$，则由统计量的性质得，

$E(\overline{X})=1/\lambda,D(\overline{X})=1/n\lambda^2,E(S_n^{*2})=1/\lambda^2$．

(3) 样本值由小到大排序得：(1.1, 1.4, 1.4, 3.1, 3.1, 4.3, 7.7)，

故经验分布函数为 $F_7(x)=\begin{cases}0, & x<1.1\\ 1/7, & 1.1\leqslant x<1.4\\ 3/7, & 1.4\leqslant x<3.1\\ 5/7, & 3.1\leqslant x<4.3\\ 6/7, & 4.3\leqslant x<7.7\\ 1, & x\geqslant 7.7\end{cases}$．

前两问考察了样本矩的性质，第三问根据样本值求经验分布函数~

作为数理统计部分的开篇，本节内容重在理解，尤其统计量是今后常用的概念．样本矩的定义与性质要熟练掌握．至于次序统计量和经验分布函数，只需了解其求解方法即可．

§5.2 常见统计分布

本节我们将学习三种统计量的概率分布，它们都是由正态随机变量的函数所构成的，广泛应用于数理统计的实际问题中．

首先介绍 χ^2 **分布**（卡方分布）：

χ^2 分布 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同服从 $N(0,1)$，则称随机变量 $\chi^2{}_n=X_1^2+X_2^2+\cdots X_n^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 为 χ^2 **变量**，**其服从自由度为 n 的 χ^2 分布**，记作 $\chi^2{}_n\sim\chi^2(n)$．

$\chi^2{}_n$ 的分布密度*：$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$

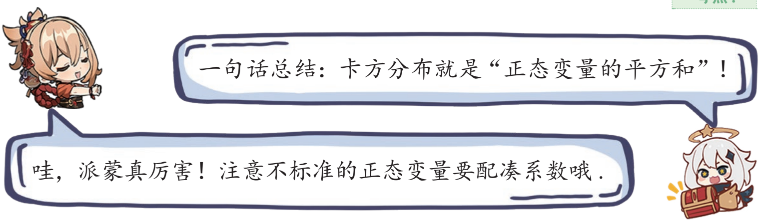
这里自由度 n 是定义中独立随机变量的个数，是分布中唯一的未知参数．分布密度中的 $\Gamma(\alpha)$ 是**伽马（Gamma）函数**，我们在

第 3 章例 3.31 中见过它，其定义为$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x(\alpha>0)$.

值得注意的是，χ^2 分布要求各随机变量 X_i 服从标准正态分布．若 $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$，将其化为标准正态变量，可得结论：

若总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体的样本，则随机变量 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\sim\chi^2(n)$．

常用此结论来确定或配凑 χ^2 变量中的常系数．



下面不加证明地给出 χ^2 分布的常用性质：

（1）$E(\chi^2_n)=n, D(\chi^2_n)=2n$．

（2）$\chi^2_n\sim AN(n,2n)$．

（3）若 $X_1\sim\chi^2(n_1), X_2\sim\chi^2(n_2)$ 且 X_1,X_2 相互独立，则 $X_1+X_2\sim\chi^2(n_1+n_2)$

性质（1）表述了 χ^2 分布的期望与方差，它们仅与 χ^2 分布的自由度 n 有关．此性质需要牢记．

性质（2）并不常用，实际上是中心极限定理的体现．

性质（3）又被称为 χ^2 分布的可加性．两个 χ^2 变量相加，和仍为 χ^2 变量，自由度为二者的和．

对了对了！千万要记得，卡方分布的形式是“正态变量的**平方和**”，而不是“和的平方”哦！如果遇到 $(X_1+X_2)^2+(X_3+X_4)^2$ 这种的，要先把括号里的看做一个整体！

TIPs

接下来介绍 t **分布**，由标准正态变量与 χ^2 变量构成：

t 分布　设随机变量 $X\sim N(0,1), Y\sim\chi^2(n)$ 且相互独立，

则称随机变量 $T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 为 t **变量，其服从自由度为 n 的** t **分布**，记作 $T\sim t(n)$．

T 的分布密度*：$p(x)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$

这里自由度 n 是定义中 χ^2 变量的自由度，同样也是 t 分布的

唯一未知参数．t 分布还是本章三种分布中唯一一种具有对称性的分布形式，其密度函数为偶函数．

需要留意，t 变量要求分子上是标准正态变量；而分母上是 χ^2 变量除以其自由度再开根号．整个表达式必须完全满足这个形式，否则其就不服从 t 分布了．

哪怕多乘一个常系数也不可以吗……

不可以哦！就算是要把正态变量化标准，多出来的系数也一定能够约掉，就是一种“恰好如此”的感觉！

下面不加证明地给出 t 分布的常用性质：

（1） $E(T)=0, D(T)=\dfrac{n}{n-2}\ (n>2)$．

（2） $T\sim AN(0,1)$．

性质（1）表述了 t 分布的期望与方差，它们仅与 t 分布的自由度 n 有关．此性质需要牢记，并注意成立条件．

性质（2）并不常用，表明 t 分布的极限是标准正态分布．但这一性质需要 n 较大时（一般不小于 30）才近似成立．

当 $n=1$ 时，$t(1)$ 即为所谓的“柯西分布”，它既不存在期望也不存在方差．一般说来，如果要判断一个随机变量是否服从某种分布，则要用“试”的方法来配凑哦．

TIPs

第三个要介绍的是 F **分布**，由两个 χ^2 变量构成：

F 分布 设随机变量 $X\sim\chi^2(n_1), Y\sim\chi^2(n_2)$ 且相互独立，

则称随机变量 $F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 为 F **变量**，其服从：

第一自由度为 n_1，第二自由度为 n_2 的 F 分布，记 $F\sim F(n_1,n_2)$.

F 的分布密度*：

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}x^{\frac{n}{2}-1}\left(1+\dfrac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

这里的第一自由度 n_1 是分子上的 χ^2 变量的自由度，第二自由度 n_2 是分母上的 χ^2 变量的自由度，它们是 F 分布的未知参数．

注意 F 分布的形式中 n_1,n_2 皆为常数，因此它们可以约分．识别 F 变量时要注意常系数能否还原回定义中的形式．

一句话总结，F 分布就是“两卡方分布之比”！

说的没错，看见这种形式的随机变量，就要考虑把常系数凑成 F 分布的形式呢．

下面不加证明地给出 F 分布的常用性质：

（1）若 $F\sim F(n_1,n_2)$，则 $\dfrac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$．

（2）若 $T\sim t(n)$，则 $T^2\sim F(1,n)$．

性质（1）表明，若 F 变量取倒数，则其仍服从 F 分布，两自由度次序交换．

性质（2）表明，t 变量的平方服从第一自由度为 1，第二自由度为 n（t 变量本身的自由度）的 F 分布．此性质根据定义即可很容易地证明，只需注意：若 $X\sim N(0,1)$，则 $X^2\sim\chi^2(1)$．

F 分布也有期望和方差：$E(F)=\dfrac{n_2}{n_2-2}(n_2>2),D(F)=\dfrac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}(n_2>4)$，形式太复杂，就不用掌握啦．

TIPs

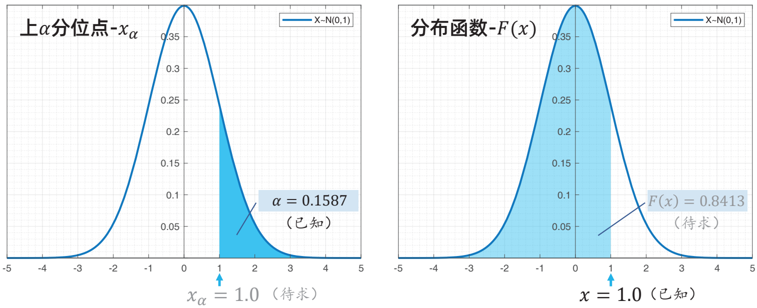
在数理统计的实际应用中，我们常常需要研究“随机变量取值在何区间时，对应的概率为给定值”这类问题．

事实上，早在中学统计中我们就了解过的「中位数」，就是要求随机变量在区间 $(x,+\infty)$（或 $(-\infty,x)$）上的概率为 $1/2$，求取值 x 应该为何值的问题．

为此，引入概率分布的**上 α 分位点**的概念．

上 α 分位点　　设总体 X 和给定的概率值 $\alpha(0<\alpha<1)$，若 X 可取值为实数 x_α，使得 $P\{X>x_\alpha\}=\alpha$，则称此 x_α 为此概率分布的**上 α 分位点**（或称**临界值**）．

上 α 分位点 x_α 与分布函数 $F(x)$ 同样都与随机变量取值落入区间中的概率有关．下图展示了标准正态分布的上 α 分位点与概率分布函数，除了不等号方向相反外，它们还有如下的区别：



▲ 上 α 分位点与分布函数值的区别

(1) 上 α 分位点 - x_α：若认为 x_α 是 α 的函数，则其中 α 表示概率值（图形中的面积），x_α 表示区间端点．

(2) 分布函数 - $F(x)$：若认为 $F(x)$ 是 x 的函数，则其中 $F(x)$ 表示概率值（图形中的面积），x 表示区间端点．

也就是说，上 α 分位点是“知道概率求取值”！

那么分布函数就是“知道取值求概率”啦！

最后介绍四种常见的概率分布——标准正态分布、χ^2 分布、t 分布和 F 分布的上 α 分位点．

标准正态分布：上 α 分位点记为 u_α，可从附录 2 中查表得知，注意此表是分布函数值表，因此要查 u_α，应寻找概率 $1-\alpha$ 所对应的值．由标准正态分布的对称性，有性质：$u_\alpha = -u_{1-\alpha}$ ．

χ^2 分布：上 α 分位点记为 $\chi^2_\alpha(n)$，可从附录 3 中查表得知．有性质：当 n 较大时，$\chi^2_\alpha(n) \approx n + \sqrt{2n}\, u_\alpha$ ．

t 分布：上 α 分位点记为 $t_\alpha(n)$，可从附录 4 中查表得知．由 t 分布的对称性，有性质：$t_\alpha(n) = -t_{1-\alpha}(n)$ ．

F 分布：上 α 分位点记为 $F_\alpha(n_1, n_2)$，可从附录 5 中查表得知．由 F 分布的性质，有：$F_\alpha(n_1, n_2) = \dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_2, n_1)}$ ．注意 F 分布的上 α 分位点与自由度 n_1, n_2 均有关．

最好掌握查表的技能~不会也没关系！理解上 α 分位点的意义，考试会给具体数值的~

TIPs

例题时间 Time for Example §5.2

例 5.21 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是标准正态总体 $X\sim N(0,1)$ 的一个样本，则统计量 $Y=\frac{1}{m}(\sum\limits_{i=1}^{m}X_i)^2+\frac{1}{n-m}(\sum\limits_{i=m+1}^{n}X_i)^2$ 服从何种分布（并写出参数）？

分析 出现“正态变量的平方和”的形式，考虑证为 χ^2 分布 .

解 设 $Y_1=\frac{1}{\sqrt{m}}\sum\limits_{i=1}^{m}X_i$, $Y_2=\frac{1}{\sqrt{n-m}}\sum\limits_{i=m+1}^{n}X_i$，即 $Y=Y_1^2+Y_2^2$.

因 $X\sim N(0,1)$，故 $\sum\limits_{i=1}^{m}X_i\sim N(0,m)$，则 $Y_1=\frac{1}{\sqrt{m}}\sum\limits_{i=1}^{m}X_i\sim N(0,1)$.

同理 $\sum\limits_{i=m+1}^{n}X_i\sim N(0,n-m)$，则 $Y_2=\frac{1}{\sqrt{n-m}}\sum\limits_{i=m+1}^{n}X_i\sim N(0,1)$.

则 $Y=Y_1^2+Y_2^2\sim\chi^2(2)$.

一定要把括号里的部分与常数一起配凑成标准正态分布哦~

例 5.22 设 (X_1,X_2,X_3,X_4) 是来自正态总体 $X\sim N(1,\sigma^2)$ 的一个样本，则统计量 $S=\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 服从何种分布（并写出参数）？

分析 出现分式且分子上为正态变量，考虑证为 t 分布 .

解 设 $Y=X_1-X_2$，则 $Y\sim N(0,2\sigma^2)$，故 $\frac{Y}{\sqrt{2\sigma^2}}\sim N(0,1)$.

设 $Z=X_3+X_4-2$，则 $Z\sim N(0,2\sigma^2)$，故 $(\frac{Z}{\sqrt{2\sigma^2}})^2\sim\chi^2(1)$.

而 $S=\frac{Y}{|Z|}=\frac{Y}{\sqrt{Z^2}}=\frac{Y/\sqrt{2\sigma^2}}{\sqrt{Z^2/2\sigma^2}}=\frac{Y/\sqrt{2\sigma^2}}{\sqrt{(\frac{Z}{\sqrt{2\sigma^2}})^2/1}}$，故 $S\sim t(1)$.

关键点是将绝对值化为平方开根号 . 注意配凑时保持恒等变形哦~

例 5.23 设 (X_1,X_2,X_3,X_4) 是来自正态总体 $X\sim N(0,4)$ 的一个样本，则统计量 $F=\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}$ 服从何种分布（并写出参数）？

分析 出现分式且分子分母均形似 χ^2 分布，考虑证为 F 分布 .

解 设 $Y=\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{4}$，$Z=\frac{X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2}{4}$，

由于 $\frac{X_i}{2}\sim N(0,1)$，故 $Y\sim\chi^2(10)$. 同理 $Z\sim\chi^2(5)$.

而 $\frac{Y/10}{Z/5}=\frac{Y}{2Z}=\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}=F$，故 $F\sim F(10,5)$.

除了要为 χ^2 分布配凑常数外，也别忘了 F 分布本身需要除以自由度哦~

本节内容非常重要，既会直接在选择填空题中设问考察三种统计分布的形式和性质，也会频繁出现在之后参数估计、假设检验的计算题中.

§5.3 抽样分布

在本章5.1节中，我们曾介绍了样本矩这一重要的统计量.但其作为随机变量，我们却仅能通过样本矩的性质得知它的数字特征，甚至无从得知其服从的分布.这是不利于我们使用的.

我们称统计量的概率分布为**抽样分布**.下面要介绍的是，正态总体下由样本矩构成的统计量，以及相应的抽样分布.

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体的一个样本，则有结论:

（1）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

涉及总体期望和方差，由样本均值构造

（2）$\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2}\sim \chi^2(n-1)$

仅涉及总体方差，由修正样本方差构造

（3）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_n^{*2}/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

仅涉及总体期望，由样本均值和修正样本方差构造

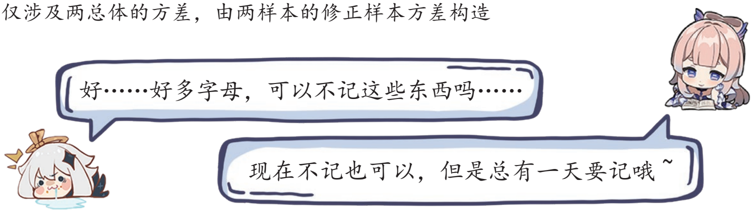
设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n),(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 分别是来自这两个总体的样本，且样本之间相互独立，则有结论:

（1）$\dfrac{(\overline{X_1}-\overline{X_2})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$，其中 $S_w=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_{n_1}^{*2}+(n_2-1)S_{n_2}^{*2}}{n_1+n_2-2}}$

仅涉及两总体的期望，由两样本的样本均值和修正样本方差构造

（2）$\dfrac{S_{n_1}^{*2}/S_{n_2}^{*2}}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

仅涉及两总体的方差，由两样本的修正样本方差构造



以上结论证明复杂，从略.各结论下方的说明，是为第6章6.3节及第7章7.2节的应用做准备的.

例题时间 Time for Example §5.3

例 5.31 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是正态总体 $X\sim N(1,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X},S_n^2$ 是样本均值和样本方差．又设 $X_{n+1}\sim N(1,\sigma^2)$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1}$ 独立，求下列统计量的概率分布（要求推导过程）：

(1) $T=\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{S_n}\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$；(2) $F=\dfrac{(n-m)\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-1)^2}{m\sum\limits_{i=m+1}^{n}(X_i-1)^2}$．

分析 (1) 中同时出现样本均值和方差，考虑证为 t 分布．

(2) 中分子分母同时出现平方，考虑证为 F 分布．(同例 5.23)

解 (1) 由题意 $X_{n+1}\sim N(1,\sigma^2)$, $\overline{X}\sim N(1,\dfrac{\sigma^2}{n})$，则设 $Y=X_{n+1}-\overline{X}$．

显然 $Y\sim N(0,\dfrac{n+1}{n}\sigma^2)$，则 $Y/\sqrt{\dfrac{n+1}{n}\sigma^2}=\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\dfrac{Y}{\sigma}\sim N(0,1)$．

又 $\dfrac{nS_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，（注意并非修正样本方差，但是自由度不改变）

则 $$\frac{\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\dfrac{Y}{\sigma}}{\sqrt{\dfrac{nS_n^2}{\sigma^2}/(n-1)}}=\sqrt{\frac{\dfrac{n}{n+1}}{\dfrac{n}{n-1}}}\frac{\dfrac{Y}{\sigma}}{\dfrac{S_n}{\sigma}}=\frac{Y}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}=T\sim t(n-1).$$

（分子上为标准正态变量，分母上为 χ^2 变量除以自由度开根号，恒等变形）

(2) 由题意 $X_i\sim N(1,\sigma^2)$，故 $\dfrac{X_i-1}{\sigma}\sim N(0,1)$，

则 $\sum\limits_{i=1}^{m}(\dfrac{X_i-1}{\sigma})^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-1)^2\sim\chi^2(m)$，

$\sum\limits_{i=m+1}^{n}(\dfrac{X_i-1}{\sigma})^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=m+1}^{n}(X_i-1)^2\sim\chi^2(n-m)$，

故 $$\frac{\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-1)^2/m}{\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=m+1}^{n}(X_i-1)^2/(n-m)}=\frac{(n-m)\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-1)^2}{m\sum\limits_{i=m+1}^{n}(X_i-1)^2}=F\sim F(m,n-m).$$

求解这类题目，要先合理怀疑是何种分布，再根据分布要求的形式与题目中出现的变量，构造分布所需的变量；最后代入分布的形式中，一般就能够完成配凑啦~注意修正样本方差与样本方差的区别~

本节内容是之后两章的基础，它们的实际用途将在后面详细介绍．这些结论也可以如上例一样直接考察证明题，需要熟悉各种分布的形式，大胆猜测，小心配凑．

心有所向，日复一日，必有精进。

例題時間 Time for Example §6.2

例 6.21 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是总体 X 的一个样本，求参数 θ 的最大似然估计量，X 满足：$p(x)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, x\geqslant\theta\\0, \quad x<\theta\end{cases}$．其是否为无偏估计、相合估计？

解 似然函数 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}p(x_i)=\prod\limits_{i=1}^{n}e^{-(x_i-\theta)}\ (x_i\geqslant\theta, i=1,2,\cdots,n)$．

则 $\ln L(\theta)=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(e^{-(x_i-\theta)})=-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+n\theta$. 则 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=n$．

由此而得的似然方程没有意义．（不与样本有关，无法求解）

由于 $L(\theta)$ 为关于 θ 的严格单调增函数，且 $\theta\leqslant x_i, i=1,2,\cdots,n$，

故当 θ 取得其最大值即 $x_{(1)}$ 时，$L(\theta)$ 取得最大值．

即 θ 的最大似然估计量为 $\widehat{\theta}=X_{(1)}$．

因 $p(x)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, x\geqslant\theta\\0, \quad x<\theta\end{cases}$，故 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-(x-\theta)}, x\geqslant\theta\\0, \quad x<\theta\end{cases}$，

则 $\widehat{\theta}=X_{(1)}$ 的密度函数：$p_{X_{(1)}}(x)=n[1-F(x)]^{n-1}p(x)=\begin{cases}ne^{-n(x-\theta)}, x\geqslant\theta\\0 \quad x<\theta\end{cases}$.

下面判断无偏性：

$E(\widehat{\theta})=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_{X_{(1)}}(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{+\infty}nxe^{-(n-1)x}\mathrm{d}x=\theta+\dfrac{1}{n}\neq\theta$，不是无偏估计．

下面判断相合性：

$$D(\widehat{\theta})=E(\widehat{\theta}^2)-[E(\widehat{\theta})]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p_{X_{(1)}}(x)\,\mathrm{d}x-(\theta+\frac{1}{n})^2$$
$$=\int_{\theta}^{+\infty}nx^2e^{-(n-1)x}\mathrm{d}x-(\theta+\frac{1}{n})^2=\frac{1}{n^2}.$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}E(\widehat{\theta})=\lim\limits_{n\to\infty}(\theta+\dfrac{1}{n})=\theta$, $\lim\limits_{n\to\infty}D(\widehat{\theta})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$，是相合估计．

判断无偏性、相合性，实际上就是求估计量的期望、方差而已 ~

例 6.22 设 (X_1,X_2) 是总体 X~$N(\mu,1)$ 的一个样本，以下均为 μ 的估计量：$\widehat{\mu}_1=\dfrac{1}{4}X_1+\dfrac{3}{4}X_2$, $\widehat{\mu}_2=\dfrac{1}{2}X_1+\dfrac{1}{2}X_2$, $\widehat{\mu}_3=\dfrac{1}{7}X_1+\dfrac{4}{7}X_2$, $\widehat{\mu}_4=\dfrac{2}{5}X_1+\dfrac{3}{5}X_3$，则其中最有效的估计量为哪一个？

解 对正态总体 X~$N(\mu,1)$，期望 μ 的最小方差无偏估计为样本均值 $\overline{X}$．

显然 $\widehat{\mu_2}$ 为样本均值 $\overline{X}$，故最有效．

一般很少需要用计算来判断有效性，直接使用结论就可以了 ~

本节内容常与上一节一同考察，在求解完点估计量后要求给出无偏性与相合性的判断与证明，本质上是求数字特征．

§6.3 参数的区间估计

参数的点估计可以给出未知参数 θ 的近似值 $\widehat{\theta}$，但由于抽样的随机性，我们无法得知这个估计值的误差范围．

下面要介绍的**参数的区间估计**方法可以有效解决这一问题：

区间估计 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为总体 X 的样本，含未知参数 θ，对于给定的实数 $\alpha(0<\alpha<1)$，确定两个统计量 $\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_2}$，使得：$P\{\widehat{\theta_1}<\theta<\widehat{\theta_2}\}=1-\alpha$，则称随机区间 $(\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_2})$ 为**参数 θ 的置信度 $1-\alpha$ 为的区间估计**，$\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_2}$ 称为**置信下限**和**置信上限**，$(\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_2})$ 称为**置信区间**．

区间估计的方法


感觉定义能明白，但是这个置信区间具体怎么求呢？


直接寻找 $\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_2}$ 还是比较困难的．因此我们要寻找一个 $P\{\widehat{\theta_1}<\theta<\widehat{\theta_2}\}=1-\alpha$ 的等价事件，也就是把它拆成两个不等式 $\theta>\widehat{\theta_1}$ 和 $\theta<\widehat{\theta_2}$ 的概率，通过解这两个概率得到 $\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_2}$．派蒙想想，怎样才能求解它们呢？


$\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_2}$ 未知，那 θ 应该已知……可是 θ 是未知参数啊！


但我们要求解的是概率呢，它只和随机变量的分布有关哦．举个例子来说，如果有一个 $X\sim N(0,\sigma^2)$，那么让你直接求 $P\{X>\sigma\}$，你会求吗？


X 的分布含有未知参数，我应该不会求吧……


可是当你把它等价变形为 $P\{X/\sigma>1\}$，左边的随机变量 X/σ 就服从 $N(0,1)$，你就会求了呀，只需要查表了．


我明白了！只要我能构造一个含有 θ 的函数——也就是统计量 W，但它服从的分布中不含任何未知参数．然后我就可以找一个合适的 a 让 $P\{W>a\}=P\{\theta>\widehat{\theta_1}\}$，这样就能解出 $\widehat{\theta_1}$ 啦！$\widehat{\theta_2}$ 也就一样咯！

以上的讨论给出了求参数区间估计的一般步骤，总结如下：

（1）构造关于样本的，含有未知参数 θ 的统计量 W，且 W 的分布已知．

（2）给定 α，查表得知 W 所服从分布的上 $1-\frac{\alpha}{2}$ 分位点，上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位点．

由于 $P\{W > w_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = 1-(1-\frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2}$， $P\{W < w_{\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\frac{\alpha}{2}$，

故 $P\{w_{1-\frac{\alpha}{2}} < W < w_{\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2} = 1-\alpha$，

则 $P\{\widehat{\theta_1} < \theta < \widehat{\theta_2}\} = 1-\alpha$ 与之等价．

（3）解不等式 $w_{1-\frac{\alpha}{2}} < W < w_{\frac{\alpha}{2}}$ 得到 $\widehat{\theta_1} < \theta < \widehat{\theta_2}$ ．

在第 5 章 5.3 节中，我们给出了几种来自正态总体的样本所构造的统计量，并指出了它们服从的分布形式，其中都不含有未知参数．本节中它们将正式派上用场．

对于正态总体，在不同条件下对不同参数作区间估计时，要构造的统计量及其服从的分布可参照下表：

待估参数	条件	构造的统计量及其分布
均值μ	σ^2已知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
	σ^2未知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_n^*/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
方差σ^2	μ未知	$\dfrac{n-1}{\sigma^2}S_n^{*2} \sim \chi^2(n-1)$

▲ 单个正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 参数的区间估计

待估参数	条件	构造的统计量及其分布
均值差$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2已知	$\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$
	σ_1^2,σ_2^2未知 但$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w^*\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \sim t(n_1+n_2-2)$ 其中$S_w^*=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_{n_1}^{*2}+(n_2-1)S_{n_2}^{*2}}{n_1+n_2-2}}$
方差比σ_1^2/σ_2^2	μ_1,μ_2未知	$\dfrac{S_{n_1}^{*2}/S_{n_2}^{*2}}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$

▲ 两个正态总体 $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 参数的区间估计

为了减轻读者的记忆负担，此表略去了置信区间的结论．表中加粗标出的量，是要从统计量中求解置信上下限的未知参数．

例如说，已知方差 σ^2 的条件下估计均值 μ 的置信区间，只需要构造统计量 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$，给定置信度 $1-\alpha$，然后求解不等式：

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}}<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<u_{\frac{\alpha}{2}},$$

解得 $\overline{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$（注意利用上 α 分位点的性质），即得参数 μ 的置信区间．

一定一定要想办法背下来这两张表哦！还有上 α 分位点的性质，也不要忘记~

TIPS

例题時間 Time for Example §6.3

例 6.31 从大批彩色显像管中选取 100 只，测试知其平均寿命为 10000 小时．可以认为显像管的寿命服从正态分布，且已知标准差 $\sigma=40$ 小时．求这批显像管的平均寿命的置信度为 95% 的置信区间．$(u_{0.025}=1.96)$

解 由题意 $\overline{X}=10000, n=100, \sigma=40$，置信度 $1-\alpha=0.95$，故 $\alpha=0.05$.

构造 $\dfrac{\overline{X}-\boldsymbol{\mu}}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，则 $u_{1-0.025}\le\dfrac{\overline{X}-\boldsymbol{\mu}}{\sigma/\sqrt{n}}\le u_{0.025}$ ．

又 $u_{0.975}=-u_{0.025}$，故 $\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025}\le\boldsymbol{\mu}\le\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025}$ ．

置信下限 $\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025}=9992.16$、上限 $\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025}=10007.86$，

则所求置信度为 95% 的置信区间为 $(9992.16, 10007.86)$．

这是方差已知求均值置信区间的问题，构造相应的统计量求解即可~

例 6.32 抽查了一批钢件的 20 件样品，得其屈服点如表．设屈服点服从正态分布，求 (1) 总体均值；(2) 总体方差，置信度为 0.95 的置信区间．$(t_{0.025}(19)=1.96, \chi^2{}_{0.025}(19)=32.9, \chi^2{}_{0.975}(19)=8.91)$

												4.99	5.11	5.20	5.20
5.46	5.27	5.23	4.96	5.35	5.15	5.35	4.77	5.38	5.34	5.11	5.00	5.61	4.88	5.27	5.38

解 由题意 $\overline{X}=10000, S_n^*=0.2081, S_n^{*2}=0.0433, n=20, \alpha=0.05$ ．

(1) 构造 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_n^*/\sqrt{n}} \sim t(19)$，则 $t_{1-0.025}(19) \le \dfrac{\overline{X}-\mu}{S_n^*/\sqrt{n}} \le t_{0.025}(19)$.

又 $t_{0.975}(19) = -t_{0.025}(19)$，故 $\overline{X}-\dfrac{S_n^*}{\sqrt{n}}t_{0.025}(19) \le \mu \le \overline{X}+\dfrac{S_n^*}{\sqrt{n}}t_{0.025}(19)$.

置信下限 $\overline{X}-\dfrac{S_n^*}{\sqrt{n}}t_{0.025}(19) = 5.1069$、上限 $\overline{X}+\dfrac{S_n^*}{\sqrt{n}}t_{0.025}(19) = 5.3131$，

则总体期望置信度为 95% 的置信区间为 $(5.1069, 5.3131)$.

(2) 构造 $\dfrac{n-1}{\sigma^2}S_n^{*2} \sim \chi^2(19)$，则 $\chi^2_{1-0.025}(19) \le \dfrac{n-1}{\sigma^2}S_n^{*2} \le \chi^2_{0.025}(19)$.

故 $\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{0.025}(19)} \le \sigma^2 \le \dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{0.975}(19)}$.

置信下限 $\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{0.025}(19)} = 0.0238$、上限 $\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{0.975}(19)} = 0.0879$，

则总体方差置信度为 95% 的置信区间为 $(0.0238, 0.0879)$.

对于表格给出的样本值，灵活使用科学计算器可以帮助计算哦~

例 6.33 两种机床生产同一型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取 8 个，从乙机床生产的滚珠中抽取 9 个，测其直径如表．设直径 X_1, X_2 分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$,，置信度为 95%，(1) 若 $\sigma_1 = 0.18$, $\sigma_2 = 0.24$，求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间；(2) 若 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 但未知，求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间；(3) 求 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间．　($u_{0.025} = 1.96, t_{0.025}(15) = 2.1315$, $F_{0.025}(7,8) = 4.53$, $F_{0.025}(8,7) = 4.90$)

甲	15.0	14.8	15.2	15.4	14.9	15.1	15.2	14.8	(mm)
乙	15.2	15.0	14.8	15.1	14.6	14.8	15.1	14.5	15.0

解 由题意，甲机床的样本 $\overline{X_1} = 15.05, S_{n_1}^{*2} = 0.0457, n_1 = 8$；

乙机床的样本 $\overline{X_2} = 14.9, S_{n_1}^{*2} = 0.0575, n_1 = 9$；且 $\alpha = 0.05$.

(1) 构造 $\dfrac{\overline{X_1}-\overline{X_2}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$，

则 $u_{1-0.025} \le \dfrac{\overline{X_1}-\overline{X_2}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \le u_{0.025}$. 又 $u_{0.975} = -u_{0.025}$，

故 $\overline{X_1}-\overline{X_2}-u_{0.025}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}} \le \mu_1-\mu_2 \le \overline{X_1}-\overline{X_2}+u_{0.025}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$.

解得置信下限为 -0.018、上限为 0.318，

则所求置信度为 95% 的置信区间为 $(-0.018, 0.318)$.

(2) 构造 $\dfrac{\overline{X_1}-\overline{X_2}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \sim t(15)$，$S_w = \sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_{n_1}^{*2}+(n_2-1)S_{n_2}^{*2}}{n_1+n_2-2}}$.

则 $t_{1-0.025}(15) \le \dfrac{\overline{X_1}-\overline{X_2}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \le t_{0.025}(15)$. 又 $t_{0.975}(15) = -t_{0.025}(15)$,

故 $\overline{X_1}-\overline{X_2}-t_{0.025}(15)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \le \boldsymbol{\mu_1}-\boldsymbol{\mu_2} \le \overline{X_1}-\overline{X_2}+t_{0.025}(15)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$.

解得置信下限为 -0.08614 、上限为 0.38614 ，

则所求置信度为 95% 的置信区间为 $(-0.08614,0.38614)$.

(3) 构造 $\dfrac{S_{n_1}^{*2}/S_{n_{21}}^{*2}}{\boldsymbol{\sigma_1^2}/\boldsymbol{\sigma_2^2}}\sim F(7,8)$，则 $F_{1-0.025}(7,8) \le \dfrac{S_{n_1}^{*2}/S_{n_{21}}^{*2}}{\boldsymbol{\sigma_1^2}/\boldsymbol{\sigma_2^2}} \le F_{0.025}(7,8)$.

即 $\dfrac{S_{n_1}^{*2}/S_{n_2}^{*2}}{F_{0.025}(7,8)} \le \boldsymbol{\sigma_1^2}/\boldsymbol{\sigma_2^2} \le \dfrac{S_{n_1}^{*2}/S_{n_2}^{*2}}{F_{0.975}(7,8)}$. 又 $F_{0.975}(7,8)=\dfrac{1}{F_{0.025}(8,7)}$ ，

解得置信下限为 0.1755 、上限为 3.8944 ，

则所求置信度为 95% 的置信区间为 $(0.1755,3.8944)$.

求样本矩的值、根据要求构造统计量、解置信区间，按照步骤来就可以~

例 6.34 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，μ,σ^2 未知，则 $\exp(\sigma^2)$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为?

解 构造 $\dfrac{n-1}{\sigma^2}S_n^{*2}\sim\chi^2(n-1)$，则 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \le \dfrac{n-1}{\sigma^2}S_n^{*2} \le \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$.

故 $\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \le \sigma^2 \le \dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}$.

则 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$.

又 $f(x)=\exp(x)$ 为严格单调增函数，

故所求置信区间为 $\left(\exp\left[\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right],\exp\left[\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]\right)$.

指数只是个幌子，实际上还是考察了区间估计那张表的记忆哦~

本节内容经常考察计算题，但难度不高，读者只需掌握解题的“套路”，并牢记本节所给的两张表格，一般而言题目都很容易求解．填空选择题也有可能直接考察表中的结论．

有时会遇到如例 6.32，例 6.33 这样只给样本值的题目，需要自行计算有关的样本矩．为了节省时间，读者可以考虑使用科学计算器的「统计」功能，以方便的计算样本均值、修正样本方差等数据．本课程的考试一般是允许携带计算器的．

第 7 章　假设检验

哟，派蒙和旅行者，没想到能在这里遇见你们啊！

是北斗！你怎么到教令院来了，有什么事办吗？

哈哈哈，我顺道来看看万叶．前些日子凝光差人送了我们船队一批枫丹来的观测仪器．我们船上都是些五大三粗的水手，没人看得懂说明书，上面说什么“误差的分布参数需要多次观测来确定”……我也来学教令院学学这新奇玩意儿怎么用嘛．

听上去是我们正在学的内容可以解决的问题呢！

§7.1　假设检验的基本概念

参数估计和假设检验是统计推断的两个组成部分，它们都是利用样本对总体进行某种推断，但推断的角度不同．

上一章中我们学习的参数估计，是根据样本的统计量对参数做出推断，在估计前是未知的．本章将要学习的**假设检验**，则是先对参数的值提出假设，然后根据样本判断此假设正确与否．

假设检验可以分为参数检验与非参数检验两种类型．若总体分布形式已知而参数未知，则可提出对参数的假设并予判断，这就是参数检验问题；若总体的分布形式未知，则可直接对总体所服从的分布提出假设并予判断，这就是非参数检验问题．

根据课程要求，本章我们只介绍正态总体的参数检验．

下面以一例实际问题入手，介绍假设检验中的基本概念：

黄金屋用铸币机铸造摩拉，每枚的标准质量10g
且铸币机铸造的摩拉质量服从正态分布
每天开工后，需要检验一次铸币机工作是否正常

某日开工后测得9枚摩拉的质量（单位：g）如下

9.93　9.87　10.05　10.12　9.83　9.97　9.95　10.21　10.05

问题归纳

本例中，检验“机器工作是否正常”即归结为检验“铸币机铸造的摩拉质量均值为10g”，即总体的均值μ检验．为检验此问题，可提出以下假设：

$$H_0: \mu = 10\mathrm{g}; \quad H_1: \mu \neq 10\mathrm{g}.$$

一般来说，肯定原命题的假设H_0称为**原假设**，而与之对立的H_1则称为**备选假设**．（当然，这只是一种习惯称呼．）

基本原理

假设检验的基本原理是：小概率事件几乎不会发生，倘若发生，则可认为有不合理的现象产生．这里“小概率事件”的概率应当为多小呢？常记这个概率值为$\alpha (0 < \alpha < 1)$，称为检验的**显著性水平**．这个值一般较小，如0.01,0.05,0.10等．

检验方法

假设检验的基本方法是反证法．具体说来，就是先认为原假设H_0成立，然后在此基础上根据样本推断假设．但由于样本的分布含有未知参数，我们需要将其转化为能够合理反映假设的统计量，并且此统计量服从的分布中不含任何未知参数．

本例中，我们要检验参数μ．我们知道，样本均值$\overline{X}$是μ的最小方差无偏估计，因此它的观测值$\overline{x}$能在一定程度上反映μ的大小．若假设H_0为真，则$\overline{x}$与假设值$\mu_0 = 10\mathrm{g}$的差距不应过大，即$|\overline{x} - \mu_0|$不应偏大（$|\overline{x} - \mu_0|$偏大的概率很小）．

不能大到何种地步呢？我们认为不应大到足以让“小概率事件”发生．若有$P\{|\overline{X} - \mu_0| > k\} = \alpha$（概率$\alpha$已给定），则当我们观测到$|\overline{x} - \mu_0|$确实大于$k$时，便可认为“小概率事件”发生，不合理现象出现，即原假设H_0不应成立．

但是，由于随机变量$|\overline{X}-\mu_0|$的分布未知，我们无从得知什么样k的能够使此式成立．为此，可以考虑将不等式左端化为我们熟悉的统计量，即恒等变形为：

$$P\{|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S_n^*/\sqrt{n}}|>\frac{k}{S_n^*/\sqrt{n}}\}=\alpha\ .$$

不等式右端仅仅是一个未知常数而已，我们只需要知道这个整体应当是何值，而不用关心k的具体取值．此时不等式左端的统计量是我们所熟知的，且其分布中不含任何未知参数，即：

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S_n^*/\sqrt{n}}\sim t(n-1)\ .$$

根据t分布的对称性，并结合上α分位点的知识，我们就能解出上面不等式右端的常数取值，即：

$$P\{|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S_n^*/\sqrt{n}}|>t_{\alpha/2}(n-1)\}=\alpha\ .$$

这也就是说，倘若我们观测到一组样本值，计算其有关样本矩$\overline{x},s_n^*$后代入统计量T，发现满足不等式$|T|>t_{\alpha/2}(n-1)$，则认为“小概率事件”确实发生，从而认为原假设H_0不成立．

注意到以上不等式给出了统计量T的一个取值范围，我们称其为假设H_0的**拒绝域**W，意为：若T的值落入拒绝域，则作出拒绝假设H_0的判断．W的补集称为假设的**接受域**．

由此，我们构造的统计量应当具有以下特点：(1) 与待检验的参数有关；(2) 分布中不含有任何未知参数，以便于计算“小概率事件”所对应的取值．

一般来说，拒绝域都是无穷区间．这很容易理解，如果拒绝域有限，那么接受域就是无穷．假设H_0对于无穷多个样本值都是成立的，还要假设检验干什么呢？

TIPs

其他概念：两类错误

我们对假设H_0的判断并不总是完全正确的，有可能会出现两类错误：**“弃真”错误**和**“纳伪”错误**．

“弃真”错误指的是将原本为真的假设H_0判断为假，犯这种错误的概率即为显著性水平α；“纳伪”错误指的是将原本为假的假设H_0判断为真，犯这种错误的概率记作β．

假设检验中，人们总希望犯这两类错误的概率越小越好．然

而，当样本容量 n 固定时，若 α 减小，则 β 必然增大；反之若 β 减小，则 α 必然增大．要同时减小 α 和 β，只能增大样本容量．

其他概念：单侧检验与双侧检验

双侧检验：当备选假设的参数区域在原假设的参数区域的两侧时，相应的检验称为**双侧**（或**双边**）**检验**．例如：

$$H_0: \mu = \mu_0; \quad H_1: \mu \neq \mu_0.$$

单侧检验：当备选假设的参数区域在原假设的参数区域的一边时，相应的检验称为**单侧**（或**单边**）**检验**．例如：

$$H_0: \mu \geqslant \mu_0; \quad H_1: \mu < \mu_0.$$

双侧或单侧的关系同样适用于拒绝域与接受域之间的关系．

例 7.11 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，假设 $H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu \neq \mu_0$．则若在 $\alpha = 0.05$ 下____ H_0，则在 $\alpha = 0.01$ 下____ H_0．

A. 拒绝 拒绝　　B. 拒绝 接受　　C. 接受 拒绝　　D. 接受 接受

解 拒绝域等同于“小概率事件发生”，这概率即为显著性水平 α．

当 α 越小时，拒绝域越小，接受域越大，

则后者的接受域包含前者的接受域，故选 D.

显著性水平并不等同于犯错误的概率，请严格按照拒绝域的定义理解哦~

本节内容仅做了解，掌握相应概念即可，基本不会考察．

§7.2 正态总体参数的假设检验

在生产实践与科学试验中，我们经常遇到一些总体服从正态分布．由于正态总体下的抽样分布已有较完善的结论，因此本节主要介绍正态总体均值和方差的检验．

在不同条件下，对不同参数作假设检验时，要构造的统计量及其服从的分布，以及相应的拒绝域可参照下表：

统计假设 H_0	统计假设 H_1	条件	构造的统计量及其分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	σ^2 已知	$U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\lvert u\rvert \geq u_{\alpha/2}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$			$u \geq u_{\alpha}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$			$u \leq -u_{\alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	σ^2 未知	$T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S_n^*/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\lvert t\rvert \geq t_{\alpha/2}(n-1)$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$			$t \geq t_{\alpha}(n-1)$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$			$t \leq -t_{\alpha}(n-1)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	μ 未知	$\chi^2 = \dfrac{n-1}{\sigma_0^2} S_n^{*2} \sim \chi^2(n-1)$	$\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$			$\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha}(n-1)$
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$			$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

▲ 单个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 参数的假设检验

此表给出了单个正态总体参数的假设检验中应构造的统计量．不难发现，它与第 6 章 6.3 节中区间估计的表格十分相似，只是原来的待估参数变成了假设中的量而已，这正是假设检验中先“假设 H_0 成立”的体现．

虽然拒接域也可以通过定义得出，但推算上 α 分位点的工作并不像解不等式一般简单，因此最好记住．注意每个统计量对应的第一行都是双侧检验，对应的拒绝域都是双边的（即 $(-\infty, x_{1-\alpha/2}) \cup (x_{\alpha/2}, +\infty)$ 的形式）．

统计假设 H_0	统计假设 H_1	条件	构造的统计量及其分布	拒绝域
$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\neq\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 已知	$U=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1)$	$\lvert u\rvert\geq u_{\alpha/2}$
$\mu_1\leq\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$			$u\geq u_\alpha$
$\mu_1\geq\mu_2$	$\mu_1<\mu_2$			$u\leq -u_\alpha$
$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\neq\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 未知但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w^*\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$ 其中$S_w^*=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_{n_1}^{*2}+(n_2-1)S_{n_2}^{*2}}{n_1+n_2-2}}$	$\lvert t\rvert\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$
$\mu_1\leq\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$			$t\geq t_\alpha(n_1+n_2-2)$
$\mu_1\geq\mu_2$	$\mu_1<\mu_2$			$t\leq -t_\alpha(n_1+n_2-2)$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	μ_1,μ_2 未知	$F=S_{n_1}^{*2}/S_{n_2}^{*2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$F\geq F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$或$F\leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$
$\sigma_1^2\leq\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$			$F\geq F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$
$\sigma_1^2\geq\sigma_2^2$	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$			$F\leq F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$

▲ 两个正态总体 $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 参数的假设检验

此表给出了两个正态总体参数的假设检验中应构造的统计量．它也与第 6 章 6.3 节中区间估计的表格相似，只不过对于均值差检验来讲，$\mu_1-\mu_2$ 变为 0，这是“假设 $H_0:\mu_1=\mu_2$ 成立”的体现；对于方差比检验来讲，σ_1^2/σ_2^2 变为 1，这是“假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 成立”的体现．

有些教材中构造的 T 变量的表达形式与此表不同，取决于是否引入 S_w 这一辅助量，但展开后式子都是一致的．

一般说来，双侧检验的题目更常见一些．对于单侧检验，其拒绝域的不等号方向与原假设 H_0 的常相反，务必留意．

这两张表也要背下来哦！但是和 6.3 节那两张表相比，只是多记一个拒绝域而已~

TIPs

例题時間 Time for Example §7.2

例 7.21 某厂生产一种钢索，其断裂强度 $X \sim N(\mu, 40^2)$．从一批产品中抽测 9 件，测其平均断裂强度为 770 Mpa．问：能否在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下认为此厂生产的这种钢索断裂强度的期望为 800 Mpa？（$u_{0.025} = 1.96$）

解 由题意，检验假设 $H_0: \mu = 800;\ H_1: \mu \neq 800$．

$\overline{X} = 770, n = 9, \sigma = 40$，显著性水平 $\alpha = 0.05$.

构造统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$．拒绝域为 $|u| > u_{\alpha/2}$，即 $|u| > 1.96$．

若假设 H_0 成立，则 U 的观测值 $u = \dfrac{770 - 800}{40/\sqrt{9}} = -2.25$．

故 U 落入拒绝域，所以拒绝原假设 H_0．

即：不能在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下认为此厂生产的这种钢索断裂强度的期望为 800 Mpa.

提出假设、选择统计量、计算拒绝域与观测值、做判断，按部就班来~

例 7.22 总体 $X \sim N(\mu, 40^2)$，参数均未知。从总体中抽取了一个容量为 100 的样本，测得其样本均值为 2.7，而 $\sum_{i=1}^{100}(x_i - \overline{x})^2 = 225$．试检验以下假设：$H_0: \sigma^2 = 2.5;\ H_1: \sigma^2 \neq 2.5$，$\alpha = 0.01$．（$u_{0.005} = 2.58$）

解 由题意，检验假设 $H_0: \sigma^2 = 2.5;\ H_1: \sigma^2 \neq 2.5$．

$\overline{X} = 2.7, S_n^2 = \dfrac{225}{100} = 2.25, S_n^{*2} = 2.27, n = 100$，显著性水平 $\alpha = 0.01$.

构造统计量 $\chi^2 = \dfrac{n-1}{\sigma^2} S_n^{*2} \sim \chi^2(n-1)$．

拒绝域为 $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$．

又 $\chi^2_\alpha(n) \approx n + \sqrt{2n}\, u_\alpha$，故 $\chi^2_{0.005}(99) \approx 135.3, \chi^2_{0.995}(99) \approx 62.7$，

故拒绝域为 $\chi^2 > 135.3$ 或 $\chi^2 < 62.7$．

若假设 H_0 成立，则 χ^2 的观测值 $\chi^2=\dfrac{100-1}{2.5}\times 2.27=89.9$.

故 χ^2 没有落入拒绝域，所以不能拒绝原假设 H_0 .

即：可以在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下认为 $\sigma^2=2.5$.

本题涉及到卡方分布的分位点在 n 较大时的近似性质哦~

例 7.23 对两批同型号的电阻进行抽样检测，各抽 6 件，测得结果如下．已知元件电阻服从正态分布，问两批电阻是否有显著差异 $(\alpha=0.05)$？

$(t_{0.025}(10)=2.2281,$
$F_{0.025}(5,5)=7.15)$

A批	0.140	0.138	0.143	0.141	0.144	0.137
B批	0.135	0.140	0.142	0.136	0.138	0.142

解 $\overline{X}=0.1405,\overline{Y}=0.1388,S_{n_1}^{*2}=7.5\times10^{-6},S_{n_2}^{*2}=8.97\times10^{-6},n_1=n_2=6$，显著性水平 $\alpha=0.05$.

先检验假设 $H_0:\mu_1=\mu_2$; $H_1:\mu_1\neq\mu_2$.

构造 $T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$，$S_w=\sqrt{\dfrac{(n-1)S_{n_1}^{*2}+(n-1)S_{n_2}^{*2}}{n_1+n_2-2}}$.

拒绝域为 $|t|>t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$，即 $|t|>2.2281$.

若假设 H_0 成立，则 T 的观测值 $t=\dfrac{0.1405-0.1388}{2.8697\times10^{-3}\sqrt{\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}}}=1.026$.

故 T 没有落入拒绝域，所以接受原假设 H_0 .

再检验假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$; $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$.

构造 $F=S_{n_1}^{*2}/S_{n_2}^{*2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$，

拒绝域为 $F>F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$ 或 $F<F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$，

即 $F>7.15$ 或 $F<0.1397$.

若假设 H_0 成立，则 F 的观测值 $F=\dfrac{7.5\times10^{-6}}{8.97\times10^{-6}}=0.836$.

故 F 没有落入拒绝域，所以接受原假设 H_0 .

综上，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下认为两批电阻无显著差异．

期望、方差均未知，问“有无显著差异”，则都要检验一遍哦~

本节内容通常考察计算题，与上一章 6.3 节参数的区间估计形式类似，解题方法也很套路，只需记下表格，理解方法即可．

附录 1 部分证明汇总

P22 泊松分布是二项分布的极限

已知：$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$，

求证：$\lim\limits_{n\to\infty}P\{X=k\}=\dfrac{\lambda}{k!}e^{-\lambda}(\lambda=np)$.

证 由 $\lambda=np$ 得 $p=\lambda/n$，故：

$$\lim_{n\to\infty}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{n^k}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$ （将含 n 的项集中）

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-(k-1)}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}$$ （拆分分式）

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}(1\times1\times\cdots\times1)\times1\times\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}$$ （利用重要极限结论计算）

$$=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$ 命题得证 .

P28 一维连续型随机变量函数的分布

若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上严格单调，且随机变量 X 的密度函数为 $p_X(x)$，则随机变量 $Y=f(X)$ 在 $(f(a),f(b))$ 上的密度函数为：

$$p_Y(y)=p_X(f^{-1}(y))\cdot|[f^{-1}(y)]'|$$

其中 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数 .

证 下面只证明 $f(x)$ 为严格单调增函数的情况，减函数同理 .

因 $f'(x)>0$，且其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 存在且亦为严格单调增函数 .

故 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{f(X)\leqslant y\}=P\{X\leqslant f^{-1}(y)\}=F_X(f^{-1}(y))$.

（根据单调性 . 若为减函数，注意不等号方向要改变 .）

进而 $p_Y(y)=[F_Y(y)]'=p_X(f^{-1}(y))\cdot|[f^{-1}(y)]'|$.

（注意求复合函数的导数，内函数要再求一次导 .）

P39 泊松分布之和的分布

若 $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$，且 X,Y 相互独立，则 $X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$．

证 由题意 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}(k=1,2,\cdots), P\{Y=k\}=\dfrac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}(k=1,2,\cdots)$,

$$P\{X+Y=k\}=P\{X=0;Y=k\}+P\{X=1;Y=k-1\}+\cdots$$
$$+P\{X=k-1;Y=1\}+P\{X=k;Y=0\} \quad \text{（罗列所有情况）}$$
$$=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i;Y=k-i\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i\}P\{Y=k-i\} \quad \text{（独立性）}$$
$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \quad \text{（与 k 无关的提求和号外）}$$
$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda_1^i\lambda_2^{k-i} \quad \text{（同乘除 k! 配凑）}$$
$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k \sim P(\lambda_1+\lambda_2). \quad \text{（二项式定理逆向使用）}$$

命题得证．

P40 二维连续型随机变量函数的分布

若 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)$，则：

（1）$Z=X+Y$ 的密度函数 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z-y,y)\,dx$，

（2）$Z=X/Y$ 的密度函数 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|p(yz,y)\,dx$，

（3）$Z=YX$ 的密度函数 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\dfrac{1}{x}\right|p\left(x,\dfrac{z}{x}\right)dx$，

（4）$M=\max\{X,Y\}$ 分布函数 $F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$，（ X,Y 独立，下同 ）

（5）$N=\min\{X,Y\}$ 分布函数 $F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$．

证 (1) 由分布函数的定义，

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint_{x+y\leqslant z}p(x,y)\,dxdy$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x}p(x,y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z}p(x,u-x)\,dy \ (y=u-x) \quad \text{（换元换限）}$$
$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,u-x)\,dx\right]du. \quad \text{（改写为变上限积分的形式）}$$

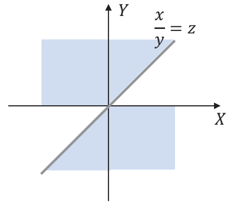
从而 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)\,dx$. 类似地， $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z-y,y)\,dx$.

(2) 下面仅对 $z>0$ 的情况加以证明， $z<0$ 类似．

由图可知， $F_Z(z)=\int_{-\infty}^{0}dy\int_{yz}^{+\infty}p(x,y)\,dx+\int_{0}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{yz}p(x,y)\,dx$.

令 $x=uy$，则 $F_Z(z)=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}y\int_{z}^{-\infty}p(uy,y)y\mathrm{d}u+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z}p(uy,y)y\mathrm{d}u.$

交换积分顺序并对求导数，可得：



$$p_Z(z)=-\int_{-\infty}^{0}yp(yz,y)\mathrm{d}y+\int_{0}^{+\infty}yp(yz,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|p(yz,y)\mathrm{d}x.$$

(3) 将 (2) 中的 Y 换为 $\frac{1}{Y}$ 即可．

(4) $F_M(z)=P\{\max\{X,Y\}\leqslant z\}=P\{X\leqslant z;Y\leqslant z\}=F_X(z)F_Y(z)$．

(5) $F_N(z)=P\{\min\{X,Y\}\leqslant z\}=1-P\{\min\{X,Y\}>z\}$

$=1-P\{X>z;Y>z\}=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$．

P44 常见分布的数学期望

(1) $X\sim B(n,p)$，$E(X)=np$．(2) $X\sim \mathrm{Geo}(p)$，$E(X)=\frac{1}{p}$．

(3) $X\sim P(\lambda)$，$E(X)=\lambda$．(4) $X\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，$E(X)=\frac{1}{\lambda}$．

(5) $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$E(X)=\mu$．(6) $X\sim U[a,b]$，$E(X)=\frac{a+b}{2}$．

证 (1) $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$，则：

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}npC_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=np\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$=np[p+(1-p)]^{n-1}=np.$　　（二项式定理逆向使用）

(2) $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p(k=1,2,\cdots)$，则：

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}$$

$=p(q+q^2+q^3+\cdots)'\ (q=1-p)$　　（幂级数可逐项求导）

$=p(\frac{q}{1-q})'=p\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}.$　　（等比级数求和）

(3) $P\{X=i\}=\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}(i=0,1,2,\cdots)$，则：

$E(X)=\sum_{i=0}^{\infty}i\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}\lambda e^{-\lambda}=e^{\lambda}\cdot\lambda e^{-\lambda}=\lambda.$　　（泰勒级数）

(4) $p(x)=\lambda e^{-\lambda x}(x>0)$，则：

$$E(X)=\int_0^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x\,\mathrm{d}e^{-\lambda x} \qquad (\mathrm{d}(e^{-\lambda x})=-\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x)$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}. \qquad \left(\int_0^{+\infty}u\mathrm{d}v=uv\,|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}v\mathrm{d}u\right)$$

(5) $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}(-\infty<x<+\infty)$，则：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sigma y+\mu)e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y$$

$$=0+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y=\mu.$$ （$y=\frac{x-\mu}{\sigma}$，拆分积分，奇函数的性质）

(6) $p(x)=\frac{1}{b-a}(a\leqslant x\leqslant b)$，则：

$$E(X)=\int_a^b x\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{1}{2(b-a)}x^2\,|_a^b=\frac{a+b}{2}.$$

P47 方差的重要计算公式

根据方差的定义证明：$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

证 $D(X)=E[X-E(X)]^2=E[X^2-2E(X)X+(E(X))^2]$

$\quad=E(X^2)-[E(X)]^2.$ （数学期望始终为常数）

其中 $E[E(X)X]=E(X)\cdot E(X)=E(X)^2$, $E[E(X)^2]=E(X)^2$.

P47 常见分布的方差

(1) $X\sim B(n,p)$，$D(X)=np(1-p)$. (2) $X\sim \mathrm{Geo}(p)$，$D(X)=\frac{1-p}{p^2}$.

(3) $X\sim P(\lambda)$，$D(X)=\lambda^2$. (4) $X\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$.

(5) $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$D(X)=\sigma^2$. (6) $X\sim U[a,b]$，$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$.

证 (1) 按定义推导二项分布的方差计算繁琐．这里给出另一种思路：

显然对两点分布 $X\sim B(1,p)$，$E(X)=p,D(X)=p(1-p)$.

而二项分布是 n 重伯努利试验的结果，即相互独立的两点分布之和，

根据方差的性质，$X\sim B(n,p)$，$D(X)=np(1-p)$.

(2) $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p\,(k=1,2,\cdots)$，则：

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)q^{k-1}p+E(X)=pq\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)q^{k-2}+E(X)\ (q=1-p)$$

$$=pq(q^2+q^3+\cdots)''+E(X)=pq\left(\frac{q^2}{1-q}\right)''+E(X)=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}.$$

故 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{2q}{p^2}+\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{q}{p^2}=\dfrac{1-p}{p^2}.$

(3) $P\{X=i\}=\dfrac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}(i=0,1,2,\cdots)$，则：

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+E(X)=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+E(X)=\lambda^2+\lambda.$$

故 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda=\lambda.$

(4) $p(x)=\lambda e^{-\lambda x}(x>0)$，则：

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty}(\lambda x)^2e^{-\lambda x}\mathrm{d}(\lambda x)=\frac{2}{\lambda^2}.$$

故 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{2}{\lambda^2}-\dfrac{1}{\lambda^2}=\dfrac{1}{\lambda^2}.$

(5) $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}(-\infty<x<+\infty)$，则：

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\right\}=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=\sigma^2.\ \left(t=\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

(6) $p(x)=\dfrac{1}{b-a}(a\leqslant x\leqslant b)$，则：

$$E(X^2)=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{1}{3(b-a)}x^3\Big|_a^b=\frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

故 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{(b-a)^2}{12}.$

P54 协方差的重要计算公式

根据协方差的定义证明：$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$.

证 $\operatorname{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$$=E[XY-XE(Y)-YE(X)+E(X)E(Y)]$$
$$=E(XY)-E(X)E(Y)-E(Y)E(X)+E(X)E(Y)$$
$$=E(XY)-E(X)E(Y).$$

P54 方差与协方差的关系

根据方差的定义证明：$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y)$.

证 $D(X\pm Y)=E[(X\pm Y)-E(X\pm Y)]^2$

$$=E\{[X-E(X)]\pm[Y-E(Y)]\}^2$$
$$=E\{[X-E(X)]^2\pm[Y-E(Y)]^2\pm 2[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$
$$=D(X)+D(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y).$$

P87 矩估计量的结论

无论总体 X 服从何种分布，期望 $E(X)$ 的矩估计量必为 $\overline{X}$ ，方差 $D(X)$ 的矩估计量必为 S_n^2 . 其中 $\overline{X}$ 为样本均值，S_n^2 为样本方差 .

证 由 $\alpha_1=E(X)=\mu,\ \alpha_2=E(X^2)=D(X)+(E(X))^2=\mu^2+\sigma^2$,

令 $A_1=\overline{X}=\widehat{\mu},\ A_2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2=\widehat{\mu}^2+\widehat{\sigma}^2$,

解得 $\widehat{\mu}=\overline{X},\ \widehat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2=S_n^2$.

编者注

此处仅给出书中标注了“证明见附录 1”的相关定理、结论等的证明 .

本书其他不加证明而给出的结论，或其证明过程超出了普通高等学校一般工科专业的《概率论与数理统计》及《高等数学》课程教学范畴，或其证明过程并不重要 . 感兴趣的读者可自行查阅相关资料了解 .

附录 2　标准正态分布表

λ	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

λ	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

标准正态分布 $N(0,1)$
分布函数

$$\Phi(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

查表方法

表中所给 λ
精确到小数点后两位
即为 $a.bc$ 的形式
查表时，先查行
确定个位与十分位
再查列，确定百分位

例如要查 $\Phi(1.23)$
则先找到行 1.2
再看列 0.03
即得 $\Phi(1.23)=0.8888$

附录 3　χ^2 分布表

n	α												
	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.102	0.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	10.341	13.701	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	11.340	14.845	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299	12.340	15.984	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.165	13.339	17.117	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.037	14.339	18.245	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.912	15.338	19.369	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	12.792	16.338	20.489	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	13.675	17.338	21.605	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	14.562	18.338	22.718	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	15.452	19.337	23.828	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997

n	α												
	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	20.843	25.336	30.435	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	21.749	26.336	31.528	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	22.657	27.336	32.620	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	23.567	28.336	33.711	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	24.478	29.336	34.800	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	25.390	30.336	35.887	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	26.304	31.336	36.973	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	27.219	32.336	38.058	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	28.136	33.336	39.141	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	29.054	34.336	40.223	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	29.973	35.336	41.304	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.586	19.960	22.106	24.075	26.492	30.893	36.336	42.383	48.363	52.192	55.668	59.893	62.883
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	31.815	37.335	43.462	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	32.737	38.335	44.539	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	33.660	39.335	45.616	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
41	21.421	22.906	25.215	27.326	29.907	34.585	40.335	46.692	52.949	56.942	60.561	64.950	68.053
42	22.138	23.650	25.999	28.144	30.765	35.510	41.335	47.766	54.090	58.124	61.777	66.206	69.336
43	22.859	24.398	26.785	28.965	31.625	36.436	42.335	48.840	55.230	59.304	62.990	67.459	70.616
44	23.584	25.148	27.575	29.787	32.487	37.363	43.335	49.913	56.369	60.481	64.201	68.710	71.893
45	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	38.291	44.335	50.985	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166

χ^2 分布 $\chi^2(n)$
上 α 分位点
$P\{\chi^2_n \geqslant \chi^2_\alpha\} = \alpha$

查表方法

先查行确定自由度
再查列确定分位点

例如要查 $\chi^2(5)$ 的
上 0.95 分位点
只需看行 5 ，列 0.95
即得 $\chi^2(5)_{0.95} = 1.145$

注：若遇到 n 较大
超出表格所给范围时
近似为正态分布

附录 4 t 分布表

n	α					
	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8207	63.6574
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0322
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.6884	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.6876	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.6864	1.3232	1.7207	2.0796	2.5177	2.8314
22	0.6858	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.6853	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.6848	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.6840	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.6837	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.6834	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.6830	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500

t 分布 $t(n)$ 上 α 分位点　　$P\{T \geqslant t_\alpha\} = \alpha$

查表方法

先查行确定自由度，再查列确定分位点

例如要查 $t(5)$ 的上 0.005 分位点
只需看行 5 ，列 0.005， 即得 $t(5)_{0.005} = 4.0322$

n	α					
	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
31	0.6825	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440
32	0.6822	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385
33	0.6820	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333
34	0.6818	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284
35	0.6816	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238
36	0.6814	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
37	0.6812	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154
38	0.6810	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116
39	0.6808	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079
40	0.6807	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
41	0.6805	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012
42	0.6804	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981
43	0.6802	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163	2.6951
44	0.6801	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923
45	0.6800	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896

注 1： t 分布具有对称性， $t_\alpha(n) = -t_{1-\alpha}(n)$
注 2：若遇到 n 较大，超出表格所给范围时，近似为标准正态分布

附录 5 F 分布表

n_2	n_1																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	246	249	250	251	252	253	254
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.43	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.70	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.86	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.62	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.94	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.51	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.22	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.01	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.85	2.77	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.72	2.65	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.62	2.54	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	8.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.53	2.46	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	8.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.46	2.39	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.40	2.33	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.35	2.28	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.31	2.23	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.27	2.19	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.23	2.16	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.20	2.12	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84

n_2	n_1																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	60	120	∞
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.18	2.10	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.15	2.07	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.13	2.05	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.11	2.03	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.09	2.01	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.07	1.99	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.06	1.97	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.04	1.96	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.53	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.03	1.94	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.01	1.93	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	1.92	1.84	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.84	1.75	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.75	1.66	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.67	1.57	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

F 分布 $F(n_1, n_2)$
上 α 分位点
$P\{F \geqslant F_\alpha\} = \alpha$

查表方法

给定 $\alpha = 0.05$ 时
先查列确定第一自由度
再查行确定第二自由度

例如要查 $F(5,5)$ 的
上 0.05 分位点
只需看行 5 ，列 5
即得 $F(5,5)_{0.05} = 5.05$

以上表格给定分位点：α=0.05

n_2	n_1																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	60	120	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	61.22	61.74	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.42	9.44	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.20	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.87	3.84	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.24	3.21	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.87	2.84	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.63	2.59	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.46	2.42	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.34	2.30	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.24	2.20	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.17	2.12	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.10	2.06	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.05	2.01	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.01	1.96	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	1.97	1.92	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.94	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.91	1.86	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.89	1.84	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.84	1.79	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	60	120	∞
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.83	1.78	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.81	1.76	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	1.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.80	1.74	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.78	1.73	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.77	1.72	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.76	1.71	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.75	1.70	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.74	1.69	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.73	1.68	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.72	1.67	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.66	1.61	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.60	1.54	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.55	1.48	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.49	1.42	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

F 分布 $F(n_1, n_2)$
上 α 分位点
$P\{F \geqslant F_\alpha\} = \alpha$

查表方法

给定 $\alpha = 0.10$ 时
先查列确定第一自由度
再查行确定第二自由度

例如要查 $F(5,5)$ 的
上 0.10 分位点
只需看行 5 ，列 5
即得 $F(5,5)_{0.10} = 5.45$

以上表格给定分位点：α=0.10

n_2	n_1																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	60	120	∞
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6157	6209	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.43	99.45	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	26.87	26.69	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	24.20	14.02	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.72	9.55	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.93	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.56	7.40	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.31	6.16	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.52	5.36	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	4.96	4.81	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.56	4.41	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.25	4.10	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.01	3.86	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.82	3.66	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.66	3.51	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.52	3.37	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.41	3.26	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.31	3.16	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.94	3.71	3.60	3.51	3.23	3.08	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.15	3.00	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.09	2.94	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42

n_2	n_1																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	60	120	∞
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.03	2.88	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	2.98	2.83	2.67	0.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	2.93	2.78	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	2.89	2.74	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.85	2.70	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.81	2.66	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.78	2.63	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.75	2.60	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.73	2.57	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.70	2.55	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.52	2.37	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.35	2.20	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.19	2.03	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.04	1.88	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

以上表格给定分位点：α=0.01

F 分布 $F(n_1,n_2)$
上 α 分位点
$P\{F \geqslant F_\alpha\} = \alpha$

查表方法

给定 $\alpha = 0.01$ 时
先查列确定第一自由度
再查行确定第二自由度

例如要查 $F(5,5)$ 的
上 0.01 分位点
只需看行 5 ，列 5
即得 $F(5,5)_{0.10} = 10.97$

n_2	n_1																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	60	120	∞
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	984.9	993.1	1001	1006	1010	1014	1018
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.43	39.45	39.46	39.47	39.48	39.40	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.25	14.17	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.66	8.56	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.43	6.33	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.27	5.17	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.57	4.47	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.10	4.00	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.23	4.20	4.10	4.03	3.96	3.77	3.67	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	8.52	3.42	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.33	3.23	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.18	3.07	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.03	2.95	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	2.95	2.84	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.86	2.76	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.79	2.68	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.26	3.06	2.98	2.92	2.72	2.62	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.67	2.56	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.03	2.96	2.88	2.82	2.62	2.51	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.50	2.46	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09

n_2	n_1																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	60	120	∞
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.53	2.42	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.73	2.84	2.76	2.70	2.50	2.39	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.47	2.36	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.44	2.33	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.41	2.30	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.39	2.28	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.36	2.25	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.34	2.23	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.32	2.21	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.31	2.20	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	3.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.18	2.07	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.06	1.94	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	1.94	1.82	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.83	1.71	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

以上表格给定分位点：α=0.025

F 分布 $F(n_1,n_2)$
上 α 分位点
$P\{F \geqslant F_\alpha\} = \alpha$

查表方法

给定 $\alpha = 0.025$ 时
先查列确定第一自由度
再查行确定第二自由度

例如要查 $F(5,5)$ 的
上 0.025 分位点
只需看行 5 ，列 5
即得 $F(5,5)_{0.025} = 7.15$

附录 6 全书知识点总结

第一章　随机事件及其概率

1. 随机事件的运算

（1）交换律　$A\cup B=B\cup A$　　$AB=BA$
（2）结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$　　$A(BC)=(AB)C$
（3）分配律　$A(B\cup C)=AB\cup AC$　　$A(B-C)=AB-AC$
（4）对偶律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$　　$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$

2. 概率的性质

（1）对立事件的概率　$P(\overline{A})=1-P(A)$
（2）互斥事件交的概率　若 A,B 互斥，则 $P(AB)=0$
（3）互斥事件并的概率　若 A,B 互斥，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$
（4）概率加法公式　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
（5）概率减法公式　若 $A\supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

3. 条件概率、全概率公式、贝叶斯公式

条件概率　若 A, B 为随机事件，且 $P(B)\neq 0$，则称

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$ 为在 B 发生的条件下 A 发生的概率．

全概率公式　若 A_i 两两互斥，且 $\sum_{i=1}^{n}BA_i=B$，

则 $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_iB)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$．

贝叶斯公式　若 A_i 两两互斥，且 $\sum_{i=1}^{n}BA_i=B$，

则 $P(A_i\mid B)=\dfrac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{P(B)}=\dfrac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}$．

4. 两个事件的独立性

定义 1.5（独立事件）若事件 A, B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称这两事件相互独立．

（1）必然事件 Ω、不可能事件 $\varnothing$ 与任何事件独立

（2）独立关于逆运算封闭 若 A,B 独立，则 $A,\overline{B}$、$\overline{A},B$、$\overline{A},\overline{B}$ 均独立

5. 三个事件的独立性

定义 1.6 （三事件独立）若事件 A, B, C 同时满足：

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \end{cases}$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$
，则称三事件 A, B, C 相互独立 .

第二章　随机变量及其分布

1. 一维随机变量的描述

分布律 / 分布列 若随机变量 X 的所有可能取值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，

则称 $P\{X=x_i\}=p_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$ 为其分布律 .

称表

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

为其分布列 .

概率密度函数 若存在可积函数 $p(x)(-\infty<x<+\infty)$，

使得 $P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x}p(x)\mathrm{d}x$，

则称 $p(x)$ 为连续型随机变量 X 的概率密度函数 .

累计分布函数 称 $F(x)=P\{X\leqslant x\}(-\infty<x<+\infty)$ 为随机变量 X 的（累计）分布函数 .

2. 分布律、密度函数的性质

离散型随机变量

（1）非负性 $0\leqslant p_i\leqslant 1$

（2）归一性 $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$

连续型随机变量

（1）非负性 $p(x)\geq 0$

（2）归一性 $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x=1$

（3） $P\{a<x\leqslant b\}=\int_{a}^{b}p(x)\mathrm{d}x$

3. 分布函数的性质

（1） $0\leqslant F(x)\leqslant 1,x\in\mathbf{R}$　（2） $F(x)$ 是单调不减的

（3） $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

（4）对离散型随机变量，$F(x)=\sum\limits_{x_k\leqslant x}P\{X=x_k\}$

对连续型随机变量，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(x)\mathrm{d}x$，$p(x)=F'(x)$

（5） $P\{a<X\leqslant b\}=P\{X\leqslant b\}-P\{X<a\}=F(b)-F(a)$

4. 典型离散型概率分布

单点分布　若 X 仅能取一个值 C 且取此值的概率为 1，即：$P\{X=C\}=1$，则 X 服从单点分布（退化分布）.

两点分布　若 X 仅能取值为 $0,1$ 且取值为 1 的概率为 p，即：$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}(k=0,1)$，则 X 服从两点分布.

二项分布　若 X 分布律 $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=1,2,\cdots,n)$，则 X 服从二项分布，记作 $X\sim B(n,p)$.（$0\leqslant p\leqslant 1$）

离散型均匀分布　若 X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=1/n(k=1,2,\cdots,n)$，则 X 服从离散型均匀分布.（x_k 各不相同）

泊松分布　若 X 分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k=0,1,2,\cdots)$，则 X 服从泊松分布，记作 $X\sim P(\lambda)$.（$\lambda>0$）

几何分布　若 X 分布律为 $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p(k=1,2,\cdots)$，则 X 服从几何分布，记作 $X\sim Geo(p)$.（$0\leqslant p\leqslant 1$）

超几何分布　若 X 分布律为 $P\{X=k\}=C_M^k C_{N-M}^{n-k}/C_N^n$，则 X 服从超几何分布.（$k=0,1,2,...,\min\{M,n\}$）

5. 典型连续型概率分布

连续型均匀分布　若 X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, a\leqslant x\leqslant b\\ 0\quad, otherwise\end{cases}$，

则 X 服从连续型均匀分布，记作 $X\sim U[a,b]$.

指数分布　若 X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & otherwise\end{cases}$，

则 X 服从指数分布，记作 $X\sim Exp(\lambda)$.

正态分布　若 X 的密度函数为 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$，

则 X 服从正态分布，记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.（$\sigma>0$）

6. 标准正态分布的转化

对于一般的正态随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，可通过如下变换：

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

将其转化为服从标准正态分布的随机变量 $Y\sim N(0,1)$.

7. 一维随机变量函数的求解

若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上严格单调，且随机变量 X 的密度函数为 $p_X(x)$，则随机变量 $Y=f(X)$ 在 $(f(a),f(b))$ 上的密度函数为：

$$p_Y(y)=p_X(f^{-1}(y))\cdot|[f^{-1}(y)]'|$$

其中 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数 .

8. 二维随机变量的描述

联合分布律　称 $P\{X=x_i;Y=y_i\}=p_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律 .
其中 $\{X=x_i;Y=y_i\}$ 表示“$X=x_i$ 且 $Y=y_i$” .

联合密度函数　若存在可积函数 $p(x,y)(-\infty<x,y<+\infty)$，
使得 $P\{X\leqslant x;Y\leqslant y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，
则称 $p(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数 .

联合分布函数　称 $F(x,y)=P\{X\leqslant x;Y\leqslant y\}(-\infty<x,y<+\infty)$
为二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数 .

9. 联合分布律、联合密度函数的性质

二维离散型随机变量	二维连续型随机变量
（1）非负性　$0\leqslant p_{ij}\leqslant 1$	（1）非负性　$p(x,y)\geq 0$
（2）归一性　$\sum_{i=1}^{n}p_{ij}=1$	（2）归一性　$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$
	（3）$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

10. 联合分布函数的性质

（1）$0\leqslant F(x,y)\leqslant 1,x,y\in\mathbf{R}$　　（2）$F(x,y)$ 关于 x,y 分别单调不减

（3）$F(-\infty,y)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=0,\quad F(x,-\infty)=\lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=0$

$F(+\infty,+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty,y\to+\infty}F(x,y)=1$

（4）对离散型随机变量，$F(x,y)=\sum\limits_{x_i\leqslant x,y_j\leqslant y}P\{X=x_i;Y=y_j\}$

对连续型随机变量，$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$p(x,y)=\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}$

11. 二维随机变量的边缘分布

边缘分布律　称 $P\{X=x_i\}=P\{X=x_i;\sum_j(Y=y_j)\}$ 为二维随机变量 (X,Y) 中分量 X 的边缘分布律．

边缘密度函数　称 $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y$ 为二维随机变量 (X,Y) 中分量 X 的边缘密度函数．

边缘分布函数　称 $F_X(x)=P\{X\leqslant x;Y\in\mathbf{R}\}=F(x,+\infty)$ 为二维随机变量 (X,Y) 中分量 X 的边缘分布函数．

11. 二维随机变量的条件分布

条件分布律　称 $P\{X=x_i\mid Y=y\}=\dfrac{P\{X=x_i;Y=y\}}{P\{Y=y\}}$ 为 $\{Y=y\}$ 发生的条件下 X 的条件分布律．

条件密度函数　称 $p(x\mid y)=\dfrac{p(x,y)}{p_Y(y)}$ 为 $\{Y=y\}$ 发生的条件下 X 的条件密度函数．

条件分布函数　称 $F(x\mid Y=y)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{p(x,y)}{p_Y(y)}\mathrm{d}x$ 为 $\{Y=y\}$ 发生的条件下 X 的条件分布函数．

12. 二维随机变量的独立性

定义 2.3（独立随机变量）设 X,Y 为两随机变量，若对任意实数 x 与 y，$P\{X\leqslant x;Y\leqslant y\}=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant y\}$，则称 X,Y 相互独立．

13. 二维随机变量函数的求解

$X+Y$ 的分布　若 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)$，则 $Z=X+Y$ 的密度函数为 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z-y,y)\mathrm{d}x$．

Y/X 的分布　若 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)$，则 $Z=Y/X$ 的密度函数为 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p(x,xz)\mathrm{d}x$．

YX 的分布　若 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)$，则 $Z=YX$ 的密度函数为 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\dfrac{1}{x}\right|p(x,\dfrac{z}{x})\mathrm{d}x$．

极值分布　若 X,Y 相互独立，且分布函数为 $F_X(x),F_Y(y)$，则

$M=\max\{X,Y\}$ 分布函数为 $F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$；

$N=\min\{X,Y\}$ 分布函数为 $F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$．

14. 泊松分布之和、正态分布之和的结论

若 $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$，且 X,Y 相互独立，则 $X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$．

若 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 X,Y 相互独立，则它们的和 $X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$．

15. 二维正态分布的结论

二维正态分布 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的两边缘分布、条件分布均仍是正态分布．

边缘分布即为一维正态分布 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$．

在 $Y=y$ 的条件下，$X \sim N(\mu_1+\rho\sigma_1(y-\mu_2)/\sigma_2, \sigma_1\sqrt{1-\rho^2})$．根据轮换对称性也可得 Y 的条件分布．

$\rho=0$ 是二维正态随机变量相互独立的充要条件．

第三章　随机变量的数字特征

1. 数学期望的定义与计算

数学期望（离散）　若 X 分布律为 $P\{X=x_i\}=p_i(i=1,2,\cdots)$，
且级数 $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ 绝对收敛（$\sum_{i=1}^{n}|x_i|p_i$ 收敛），
则称 $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ 为 X 的数学期望．

数学期望（连续）　若 X 密度函数为 $p(x)$，
且积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛（$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p(x)\mathrm{d}x$ 收敛），
则称 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x$ 为 X 的数学期望．

2. 随机变量函数的数学期望

只需将定义中的 x 换为 $f(x)$ 即可．若为二维随机变量的函数，则不仅要将 x 换为 $f(x,y)$，还需计算二重求和/积分．

3. 数学期望的性质

（1）若 C 为常数，则 $E(C)=C$．

即：常数的期望是它本身．（注：期望本身也是常数）

（2）若 C 为常数、X 为随机变量，则 $E(CX)=CE(X)$．

即：求期望时，随机变量的常系数可以直接提出．

（3）若 X,Y 为随机变量，则 $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$.

即：随机变量和 / 差的期望，等于它们期望的和 / 差 .

（4）若 X,Y 为相互独立的随机变量，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

即：相互独立的随机变量乘积的期望，等于它们期望的积 .（反之不成立）

4. 方差的定义与计算

方差（离散） 若 X 分布律为 $P\{X=x_i\}=p_i(i=1,2,\cdots)$，且期望 $E[X-E(X)]^2$ 存在，则称 $D(X)=\sum_{i=1}^{n}[x_i-E(X)]^2p_i$ 为 X 的方差 .

方差（连续） 若 X 密度函数为 $p(x)$，且期望 $E[X-E(X)]^2$ 存在，则称 $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2p(x)\mathrm{d}x$ 为 X 的方差 .

重要计算公式 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

5. 方差的性质

（1）若 C 为常数，则 $D(C)=0$. 反之亦然 .

即：常数的方差是 0，方差为 0 的随机变量是常数 .

（2）若 k 为常数、X 为随机变量，则 $D(kX)=k^2D(X)$.

即：求方差时，随机变量的常系数可以提出后平方 .

（3）若 X,Y 为相互独立的随机变量，则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$.

即：随机变量和 / 差的方差，等于它们方差的和.

（4）若 X 的期望 μ、方差 σ^2 存在，则 $\forall\varepsilon>0,P\{|X-\mu|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\sigma^2/\varepsilon^2$.

即：随机变量取值与期望的偏差比 ε 大的概率，不超过 σ^2/ε^2 .

6. 常见分布的数学期望与方差

分布形式	0-1分布 $X\sim B(1,p)$	二项分布 $X\sim B(n,p)$	几何分布 $X\sim Geo(p)$	泊松分布 $X\sim P(\lambda)$
数学期望	p	np	$1/p$	λ
方差	$p(1-p)$	$np(1-p)$	$(1-p)/p^2$	λ

分布形式	指数分布 $X\sim Exp(\lambda)$	正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$	均匀分布 $X\sim U(a,b)$
数学期望	$1/\lambda$	μ	$(a+b)/2$
方差	$1/\lambda^2$	σ^2	$(b-a)^2/12$

7. 随机变量的矩的定义

k 阶原点矩 若 X 为随机变量，且期望 $E(X^k)$ 存在，
则称其为 X 的 k 阶原点矩 $\alpha_k = E(X^k)$.

k 阶中心矩 若 X 为随机变量，且期望 $E[X-E(X^k)]$ 存在，
则称其为 X 的 k 阶中心矩 $\mu_k = E[X-E(X^k)]$.

8. 协方差的定义与性质

协方差 若 (X,Y) 为二维随机变量，
则称 $\operatorname{cov}(X,Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$
为随机变量 X,Y 的协方差 .

（1）$\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$.
即：随机变量的顺序与协方差无关 .

（2）$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
即：协方差等于 X,Y 的期望 减 X 期望与 Y 期望的乘积 .

（3）$\operatorname{cov}(aX,bY) = ab\operatorname{cov}(X,Y)$.
即：求协方差时，两随机变量前的常系数都可以提出 .

（4）$\operatorname{cov}(X_1+X_2,Y) = \operatorname{cov}(X_1,Y)+\operatorname{cov}(X_2,Y)$.
即：其中一个分量可分解为两随机变量时，协方差亦可分解 .

（5）**若 X,Y 为相互独立的随机变量，则 $\operatorname{cov}(X,Y)=0$.**
即：求协方差时，两随机变量前的常系数都可以提出 .

（6）$D(X\pm Y) = D(X)+D(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y)$.
即：两随机变量和差的方差，等于其方差的和再加减它们的协方差 .

9. 相关系数的定义与性质

相关系数 若 (X,Y) 为二维随机变量，则称

$$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$ 为随机变量 X,Y 的相关系数 .

其中 σ_X,σ_Y 为 X,Y 的标准差 .

（1）**对任意 X,Y，$|\rho_{XY}|\leqslant 1$.**
即：相关系数总是一个绝对值不大于 1 的常数 .

（2）$|\rho_{XY}|=1 \Leftrightarrow P\{Y=aX+b\}=1(a\neq 0)$.
即：$|\rho_{XY}|=1$ 等价于 X,Y 完全线性相关（Y 是关于 X 的一次函数）.

（3）**若 X,Y 相互独立，则它们不相关 . 反之不成立！**
即：独立一定不相关，不相关不一定独立 .

（4）**以下命题相互等价：** X,Y 不相关 $\Leftrightarrow \rho_{XY}=0 \Leftrightarrow \operatorname{cov}(X,Y)=0$
$\Leftrightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$
$\Leftrightarrow D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$.

第四章　极限定理

1. 随机变量序列的依概率收敛

定义 4.2 （依概率收敛）随机变量序列 $\{X_n\}$ 的通项为 X_n，若有另一个随机变量 X，使得对于任意小的正数 $\varepsilon>0$，总有：

$$\lim_{n\to\infty}P\{|Y_n-Y|<\varepsilon\}=1 \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty}P\{|Y_n-Y|\geqslant\varepsilon\}=0,$$

则称 $\{X_n\}$ **依概率收敛**于随机变量 X，记为 $X_n\xrightarrow{P}X$.

2. 三种常见的大数定律

定义 4.5 （大数定律）设 $\{X_n\}$ 是一个随机变量序列，$\{a_n\}$ 是一个数列，若对于任意正数 $\varepsilon>0$，总有：

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\overline{X}-a_n|<\varepsilon\}=1,\text{ 即 }\overline{X}\xrightarrow{P}a_n \text{（其中 }\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\text{）},$$

则称 $\{X_n\}$ 服从**大数定律**.

大数定律	对随机变量序列$\{X_n\}$的要求	均值$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$依概率收敛于
切比雪夫大数定律	两两不相关，方差均存在且有共同上界	期望的均值$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$
辛钦大数定律	独立同分布（即同期望），期望存在	共同的期望μ
伯努利大数定律	独立同服从两点分布，即$X_n\sim B(1,p)$	事件发生的概率p

3. 独立同分布中心极限定理

独立同分布中心极限定理

设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布，且存在期望和方差 $E(X_i)=\mu,D(X_i)=\sigma^2(i=1,2,\cdots)$，

则有：$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\leqslant x\right\}=\Phi(x).$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数.

(1) 各随机变量的和 $\sum_{i=1}^{n}X_i \sim AN(n\mu,n\sigma^2)$；

(2) 各随机变量的平均 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \sim AN(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$.

棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

设随机变量 $Y_n\sim B(n,p)$，

则有：$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x\right\}=\Phi(x).$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数.

第五章　数理统计的基本概念

1. 统计量与样本矩

统计量　设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为总体 X 的一个样本，
若样本的函数 $Y=f(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 不含任何未知参数，
则称此函数为样本的一个**统计量**．

若样本取得一组观测值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，
则统计量 Y 也相应取得其观测值（函数值） $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$．

（1）样本均值　$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

（2）样本方差　$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2$

样本标准差　$S_n=\sqrt{S_n^2}$

（3）修正样本方差　$S_n^{*2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{n}{n-1}S_n^2$

修正样本标准差　$S_n^*=\sqrt{S_n^{*2}}$

（4）样本 k 阶原点矩　$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$

样本 k 阶中心矩　$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$

2. 样本矩的性质

（1）$E(\overline{X})=E(X)$
即：样本均值的期望等于总体期望

（2）$D(\overline{X})=\frac{1}{n}D(X)$
即：样本均值的方差为总体方差 $1/n$ 倍

（3）$E(S_n^2)=\frac{n-1}{n}D(X)$
即：样本方差的期望渐进等于总体方差

（4）$E(S_n^{*2})=D(X)$
即：修正样本方差的期望等于总体方差

（5）$E(A_k)=\alpha_k$
即：样本原点矩的期望等于总体矩

（6）$A_k\xrightarrow{P}\alpha_k$
即：样本原点矩依概率收敛于总体矩

3. 次序统计量的分布

最小次序统计量　$p_{X_{(1)}}(x)=n[1-F(x)]^{n-1}p(x)$

最大次序统计量　$p_{X_{(n)}}(x)=n[F(x)]^{n-1}p(x)$

4. 经验分布函数

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为总体 X 的样本，观测一组样本值后将其按由小到大的次序排列为 $(x_{(1)},x_{(2)},\cdots,x_{(n)})$，则称函数：

$$F_n(x)=\begin{cases}0, & x<x_{(1)}\\ k/n, & x_{(k)}\leqslant x<x_{(k+1)} \quad (k=1,2,\cdots,n-1)\\ 1, & x\geqslant x_{(n)}\end{cases}$$

为总体 X **的经验分布函数**.

5. 卡方分布及其性质

χ^2 分布 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同服从 $N(0,1)$，

则称随机变量 $\chi^2{}_n=X_1^2+X_2^2+\cdots X_n^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 为 χ^2 **变量，**

其服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记作 $\chi^2{}_n \sim \chi^2(n)$.

（1） $E(\chi^2{}_n)=n,D(\chi^2{}_n)=2n$.

（2） $\chi^2{}_n \sim AN(n,2n)$.

（3）若 $X_1\sim\chi^2(n_1),X_2\sim\chi^2(n_2)$ 且 X_1,X_2 相互独立，则 $X_1+X_2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$

若总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体的样本，则随机变量 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) \sim \chi^2(n)$.

6. t 分布及其性质

t 分布 设随机变量 $X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n)$ 且相互独立，

则称随机变量 $T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 为 t **变量，其服从自由度为 n 的 t 分布，**

记作 $T \sim t(n)$.

（1） $E(T)=0,D(T)=\frac{n}{n-2}$ $(n>2)$.

（2） $T \sim AN(0,1)$.

7. F 分布及其性质

F 分布 设随机变量 $X\sim\chi^2(n_1),Y\sim\chi^2(n_2)$ 且相互独立，

则称随机变量 $F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}$ 为 F **变量，其服从：**

第一自由度为 n_1，第二自由度为 n_2 的 F 分布，记 $F \sim F(n_1,n_2)$.

（1）若 $F\sim F(n_1,n_2)$，则 $\frac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$.

（2）若 $T\sim t(n)$，则 $T^2\sim F(1,n)$.

8. 概率分布的分位点

上 α 分位点 设总体 X 和给定的概率值 $\alpha(0<\alpha<1)$，

若 X 可取值为实数 x_α，使得 $P\{X>x_\alpha\}=\alpha$，
则称此 x_α 为此概率分布的**上 α 分位点**（或称**临界值**）.

标准正态分布：上 α 分位点记为 u_α，可从附录 2 中查表得知.
注意此表是分布函数值表，因此要查 u_α，应寻找概率 $1-\alpha$ 所对应的值. 由标准正态分布的对称性，有性质：$u_\alpha=-u_{1-\alpha}$.

χ^2 分布：上 α 分位点记为 $\chi^2_\alpha(n)$，可从附录 3 中查表得知.
有性质：当 n 较大时，$\chi^2_\alpha(n)\approx n+\sqrt{2n}\,u_\alpha$.

t 分布：上 α 分位点记为 $t_\alpha(n)$，可从附录 4 中查表得知.
由 t 分布的对称性，有性质：$t_\alpha(n)=-t_{1-\alpha}(n)$.

F 分布：上 α 分位点记为 $F_\alpha(n_1,n_2)$，可从附录 5 中查表得知.
由 F 分布的性质，有：$F_\alpha(n_1,n_2)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_2,n_1)}$. 注意 F 分布的上 α 分位点与自由度 n_1, n_2 均有关.

第六章　参数估计

1. 参数矩估计的方法与性质

（1）总体 X 含有 m 个未知参数，
则需要计算其 $1,2,\cdots,m$ 阶矩 α_k，$k=1,2,\cdots,m$
α_k 中应含未知参数，即 α_k 是参数的函数：$\alpha_k=f(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$.

（2）根据样本，计算相应的样本矩 A_k，$k=1,2,\cdots,m$
样本矩关于样本的函数且完全已知，即 $A_k=g(X_1,X_2,\cdots,X_m)$.

（3）令样本矩 A_k 等于总体矩 α_k，解出参数 $\theta_k(k=1,2,\cdots,m)$ 的表达式
解 m 元方程组，得 $\widehat{\theta_k}=h(X_1,X_2,\cdots,X_m)$，称 $\widehat{\theta_k}$ 为 θ_k 的估计量.

（4）如有必要，则将样本观测值代入，得到估计量的观测值
估计量是关于样本的函数（即统计量）.

无论总体 X 服从何种分布，期望 $E(X)$ 的矩估计量必为 $\overline{X}$，方差 $D(X)$ 的矩估计量必为 S_n^2. 其中 $\overline{X}$ 为样本均值，S_n^2 为样本方差.

2. 参数最大似然估计的方法与性质

（1）求似然函数 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}p(x_i)$

（2）求出 $\ln L(\theta)$ 及似然方程 $\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta_i}=0\ (i=1,2,\cdots,m)$

（3）求解似然方程得到最大似然估计值 $\widehat{\theta}=(\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_2},\cdots,\widehat{\theta_m})$

（4）将样本值换为样本分量，得到最大似然估计量

若总体 X 服从几何分布 $\mathrm{Geo}(p)$、二项分布 $B(n,p)$、泊松分布 $P(\lambda)$、指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$，则期望 $E(X)$ 的最大似然估计量为 $\overline{X}$.

若总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则期望 μ 的最大似然估计量为 $\overline{X}$，方差 σ^2 的最大似然估计量为 S_n^2 .

若总体 X 服从均匀分布 $U[\theta_1,\theta_2]$，则下限 θ_1 的最大似然估计量为 $X_{(1)}$，上限 θ_2 的最大似然估计量为 $X_{(n)}$.

其中 $\overline{X}$ 为样本均值，S_n^2 为样本方差，$X_{(1)},X_{(n)}$ 为最小、最大次序统计量.

3. 估计量的优良性标准

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为总体 X 的样本，含参数 $\theta_i(i=1,2,\cdots,m)$，且 $\widehat{\theta_i}=f_i(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为未知参数 θ_i 对应的估计量 .

无偏性　若对估计量 $\widehat{\theta_i}$，有 $E(\widehat{\theta_i})=\theta_i$，
则称此估计量是参数 θ_i 的**无偏估计量** .
若当样本容量 $n\to\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}E(\widehat{\theta_i})=\theta_i$
则称此估计量是参数 θ_i 的**渐进无偏估计量** .

有效性　对参数 θ_i 的估计量 $\widehat{\theta_i}$ 来讲，$D(\widehat{\theta_i})$ 越小，
称此估计量越**有效** .

相合性　若当样本容量 $n\to\infty$ 时，估计量 $\widehat{\theta_i}$ 依概率收敛于参数 θ_i，
即 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\widehat{\theta_i}-\theta_i|<\varepsilon\}=1$，则称 $\widehat{\theta_i}$ 是 θ_i 的**相合估计量** .

4. 无偏性、有效性、相合性的结论

无论总体 X 服从何种分布，估计量：
$\overline{X}$ 为期望 $E(X)$ 的无偏估计；S_n^2 为方差 $D(X)$ 的渐进无偏估计；
S_n^{*2} 为方差 $D(X)$ 的无偏估计 .

若 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$、指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$，正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则期望 $E(X)$ 的最小方差无偏估计量为 $\overline{X}$.

若 $\widehat{\theta}=f(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为参数 θ 的一个估计量，且满足条件：

$\lim\limits_{n\to\infty}E(\widehat{\theta})=\theta$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}D(\widehat{\theta})=0$，则 $\widehat{\theta}$ 是 θ 的相合估计量 .

其中 $\overline{X}$ 为样本均值，S_n^2 为样本方差，S_n^{*2} 为修正样本方差 .

5. 参数区间估计的方法

（1）构造关于样本的，含有未知参数 θ 的统计量 W，且 W 的分布已知 .

（2）给定 α，查表得知 W 所服从分布的上 $1-\frac{\alpha}{2}$ 分位点，上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位点 .

由于 $P\{W>w_{1-\frac{\alpha}{2}}\}=1-(1-\frac{\alpha}{2})=\frac{\alpha}{2}$， $P\{W<w_{\frac{\alpha}{2}}\}=1-\frac{\alpha}{2}$，

故 $P\{w_{1-\frac{\alpha}{2}}<W<w_{\frac{\alpha}{2}}\}=1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}=1-\alpha$，

则 $P\{\widehat{\theta}_1<\theta<\widehat{\theta}_2\}=1-\alpha$ 与之等价 .

（3）解不等式 $w_{1-\frac{\alpha}{2}}<W<w_{\frac{\alpha}{2}}$ 得到 $\widehat{\theta}_1<\theta<\widehat{\theta}_2$.

待估参数	条件	构造的统计量及其分布
均值μ	σ^2已知	$\dfrac{\bar{X}-\boldsymbol{\mu}}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$
	σ^2未知	$\dfrac{\bar{X}-\boldsymbol{\mu}}{S_n^*/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$
方差σ^2	μ未知	$\dfrac{n-1}{\boldsymbol{\sigma^2}}S_n^{*2}\sim\chi^2(n-1)$
均值差$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2已知	$\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\boldsymbol{\mu_1}-\boldsymbol{\mu_2})}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1)$
	σ_1^2,σ_2^2未知 但$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\boldsymbol{\mu_1}-\boldsymbol{\mu_2})}{S_w^*\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$ 其中$S_w^*=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_{n_1}^{*2}+(n_2-1)S_{n_2}^{*2}}{n_1+n_2-2}}$
方差比σ_1^2/σ_2^2	μ_1,μ_2未知	$\dfrac{S_{n_1}^{*2}/S_{n_2}^{*2}}{\boldsymbol{\sigma_1^2/\sigma_2^2}}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

第七章　假设检验

1. 正态总体参数的假设检验

正态总体参数的假设检验结论，参见 P104, P105 表格.


bilibili
你感兴趣的视频都在B站
概率论与数理统计
可视化详解学习!
Section 1
随机事件及其概率
概率论与数理统计 可视化详解学习！｜第一讲｜50分钟学习 随机事件及...
6925播放 · 260点赞 · 32弹幕
发布于2022-12-09 23:09
期末才受欢迎の未央
9981粉丝
保存图片
打开哔哩哔哩APP
扫码观看视频

概率论与数理统计

《原神》版 教学辅导用书

非卖品