一、填空题（每空 2 分）

本题分数	20 分
得　分	

1. 在三阶行列式 $\begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix}$ 中，$A_{13}+A_{23}+A_{33}=$______

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(6,\ a-1,\ 3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(a,\ 2,\ 2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,\ 1,\ 0)^T$，则当 a 满足如下条件：______时，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

3. A 是三阶矩阵，$|A|=2$，则 $\left|\frac{1}{3}A^2\right|=$______，$\left|4A^*-\left(\frac{1}{5}A\right)^{-1}\right|=$______

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，将 A 表示成初等矩阵的乘积：______

5. 设 A 是 3×4 矩阵，其秩为 3，若 $\boldsymbol{\eta}_1$ 和 $\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的 2 个不同的解向量，则 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的通解为：______

6. 设 A 为 n 阶矩阵，则 A 和 A^T 的特征值：______(填“相同”或“不同”)，A 和 A^T 的特征向量一般：______(填“相同”或“不同”).

7. 三阶实对称矩阵 A 的三个特征值为 $a-2$、$a+1$、$a-1$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ 秩为 2，则 $a=$______，此二次型的规范形

的正惯性指数 $p=$

为______

三	四		

、已知线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases},$$

方程组有解？有解时，求出其通解。

本题分数	15
得　　分	

二、已知 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, 矩阵 C 满足方程

$CA-B=2C$.

（1）求矩阵 C.

（2）用初等行变换方法求 A^{-1}, 并将 A 表示成一系列初等矩阵的连乘积.

题分数	15
分	

三、设L: $R^3 \to R^3$为一变换，定义为

$$L(x)=\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

证明L为R^3上的线性变换。

给定R^3中一组基$\alpha_1=(1\ \ 1\ \ 1)^T,\alpha_2=(1\ \ 0\ \ 0)^T,\alpha_3=(1\ \ 1\ \ 0)^T$，求$L$在这个组基下矩阵表示。

给定R^3中另一组基$\beta_1=(1\ \ 0\ \ 0)^T,\beta_2=(1\ \ 2\ \ 0)^T,\beta_3=(1\ \ 2\ \ 3)^T$，求从$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1$, β_2,β_3的过渡矩阵。

分数	15
分	

四、给定向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}$.

(1) 令 $V=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，求 $\dim(V)$，并给出 V 中一个基。

(2) 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，计算 A 的基本子空间 $CS(A^T)$ 和 $N(A^T)$，并计算它们的维数。

数	15
分	

五、给定实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

正交矩阵 T ,使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵。

若 B 为奇数阶反对称矩阵，求 $|B|$.

本题分数	15
得　分	

六、假设三阶方阵 $A=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)$，并且 $|A|=1$，令 $B=(2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3 \quad 2\alpha_1-\alpha_2-3\alpha_3 \quad \alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)$.

(1) 求 $|B|$.

(2) 令 $C=\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$，求 $|C|$.

本题分数	10
得　分	

七、证明题。

(1) 在向量空间 V 中，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，令 $\beta_1=2\alpha_1+3\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+4\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+5\alpha_2$ 问 β_1,β_2,β_3 是否仍然线性无关？（5 分）

(2) 若 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2=A$，证明：$r(A)+r(A-E)=n$.（5 分）

一. 填空题

1. $\begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix}$ $A_{13}+A_{23}+A_{33}=(-9-5)+(-24-10)+(8-6)=-46$

2. $\alpha_1=(6,a-1,3)^T$, $\alpha_2=(a,2,2)^T$, $a_3=(a,1,0)^T$

线性相关 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ 有非零解.

$$\begin{vmatrix} 6 & a & a \\ a-1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 3\cdot(-a)-2[6-a(a-1)]=0.$$

$a=4$ 或 $a=-\frac{3}{2}$

3. $|A|=2$

$\left|\frac{1}{3}A^2\right|=\frac{1}{3^3}\times 2^2=\frac{4}{27}$ $\quad \left|4A^*-(\frac{1}{5}A)^{-1}\right|=\left|4A^*-5A^{-1}\right|$

$\left.\begin{aligned} &A^{-1}=\frac{A^*}{|A|} \\ &|A^*|=|A|^{n-1}\end{aligned}\right\}$ $=\left|\frac{3}{2}A^*\right|$

$=(\frac{3}{2})^3\cdot 2^2$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r2-3\times r1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{提-2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{27}{2}$

$\xrightarrow{r1-2\times r2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Q_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Q_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\quad Q_3=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A=Q_1^{-1}Q_2^{-1}Q_3^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5 $k_1(\eta_1-\eta_2)+\eta_1$

6. 相同 不相同.

二、解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & a-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & b-5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-a-2 \end{pmatrix}$$

当 $a=0$ 且 $b=2$ 时原方程组有解，

此时解得 $x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 - 2$

$x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 3$

特解 $\eta = (-2, 3, 0, 0, 0)^T$

$\eta_1 = (-1, 1, 1, 0, 0)^T$

$\eta_2 = (-1, -1, 0, 1, 0)^T$

$\eta_3 = (3, -3, 0, 0, 1)^T$

∴ 通解： $x = \eta + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$

二. $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ $CA-2B=2C$.

解: (1) $CA-B=2C$

$C(A-2E)=B$

$C=B\cdot(A-2E)^{-1}$

$A-2E=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$

$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$

$\therefore C=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&-1&-3\end{pmatrix}$

或 $\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0&0\\0&-1&1&0&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1&1&2\\0&1&0&0&-1&-1\\0&0&1&0&0&-1\end{pmatrix}$

(2) $(A\mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$

$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

三. $L(x) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

解：(1) $L(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0$

$\therefore$ L 为 R^3 上线性变换.

(2) 记 $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $L(x) = \begin{pmatrix} 2x_1+x_3 \\ x_1+x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$

(3) $P = C^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{C^*}{|C|}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

过渡矩阵

$\boxed{0}$ (1.)

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3 + r_1 \times 1 \\ r_4 + r_1 \times (-2)}]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(V) = 2$， α_1, α_2 为一个基

五. (1) $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$-(\lambda+1)^2(\lambda-8)=0$, $\lambda_{12}=-1$, $\lambda_3=8$

当 $\lambda_{12}=-1$ 时, $(A+E)X=0 \rightarrow$

$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\alpha_1=(-1,0,1)^T$

$\alpha_2=(-1,2,0)^T$

当 $\lambda_3=8$ 时, $(A-8E)X=0 \rightarrow$

$\begin{pmatrix} 2 & -8 & 2 \\ 0 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\alpha_3=(2,1,2)^T$

$\beta_1=(-1,0,1)^T$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\beta_1,\alpha_2\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=(-\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2})^T$

$\beta_3=(2,1,2)^T$

单位化 $\hat{\beta_1}=(\frac{-1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^T$

$\hat{\beta_2}=(\frac{-1}{\sqrt{18}},\frac{4}{\sqrt{18}},\frac{-1}{\sqrt{18}})^T$, $\beta_3=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})^T$

$T=\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ $T^{-1}AT=\Lambda=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

2) $B^T=-B$. , B为奇数

$\therefore |B^T|=|-B|$

$\therefore |B|=-|B|$ $\therefore 2|B|=0$

$\therefore |B|=0$

六 (1)

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

而

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -4$$

$$|B| = |(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

(2)

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AD \\ AD & A \end{pmatrix}$$

$$= A\begin{pmatrix} E & D \\ D & E \end{pmatrix}$$

$$|C| = |A| \begin{vmatrix} E & D \\ D & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 20$$

X(1) 设存数对 k_1, k_2, k_3.

$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$ (*)

$k_1(2\alpha_1 + 3\alpha_2) + k_2(\alpha_2 + 4\alpha_1) + k_3(\alpha_1 + 5\alpha_2) = 0$

$\therefore \alpha_1(2k_1 + k_3) + \alpha_2(3k_1 + k_2 + 5k_3) +$

$\alpha_3(4k_2) = 0$

$\because \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

$$\begin{cases} 2k_1 + k_3 = 0 \\ 3k_1 + k_2 + 5k_3 = 0 \\ 4k_2 = 0 \end{cases}$$

当且仅当 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 时

(*) 成立. 向量组线性无关