2022 高等工程数学试卷及答案

一、已知实矩阵 $C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & -2 & -1\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$，求 $\|C\|_1,\|C\|_\infty,\|C\|_F,\|C\|_2$。

解：$\|C\|_1=5,\|C\|_\infty=5$，$\|C\|_F=\sqrt{22},\|C\|_2=3$

二、已知矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$

1. 求 B 的特征多项式和 B 的全部特征值;
2. 求 B 的不变因子，初等因子及最小多项式;
3. 求 B 的 Jordan 标准型 J 及变换矩阵 P，使得 $P^{-1}BP=J$;
4. 令 $T>0$，确定幂级数 $s(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(T+\frac{3}{k})^k}z^k$ 的收敛半径。令 $h(z)=s(\frac{z}{2}-3)$，对上述 B

   讨论矩阵幂级数 $h(B)$ 的绝对收敛性（收敛圆边界上的情形除外）。

解：1. $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ 1 & \lambda-3 & 0\\ -4 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$，$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$

2. 不变因子 $d_1=d_2=1,d_3=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

初等因子为 $(\lambda-1),(\lambda-2)^2$，最小多项式为 $(\lambda-1)(\lambda-2)^2$.

3. $J=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，令 $P=(p_1,p_2,p_3)$，$P^{-1}BP=J\Rightarrow\begin{cases}Bp_1=2p_1\\ Bp_2=p_1+2p_2\\ Bp_3=p_3\end{cases}$

$$p_3=\begin{pmatrix}0\\0\\x_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ (2I-B)p_1=0\Rightarrow \mathrm{x}=\begin{pmatrix}x_2\\x_2\\3x_2\end{pmatrix},\ (B-2I)p_2=p_1\Rightarrow \mathrm{x}=\begin{pmatrix}x_2-k\\x_2\\3x_2-7k\end{pmatrix}$$

取 $k=1$, 则 $p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\-7\end{pmatrix}$ （不唯一）.

4. $R=T$，$\rho(h(B))=\frac{5}{2}$. 所以 $T>\frac{5}{2}$ 时，绝对收敛；$T<\frac{5}{2}$ 时，发散。

三、1. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\1&0&0\\0&1&2\end{pmatrix}$ 的因子分解 $A=QR$，其中 $Q\in\mathrm{R}^{4\times3}$ 为列正交规范矩阵，$R\in\mathrm{R}^{3\times3}$ 为可逆上三角矩阵.

2、已知矩阵 B，存在可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，使得 $P^{-1}BP=J=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 $\cos(B)$.

解：1. $A=(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\mathrm{a}_3)$，$q_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$，$q_2=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，

$$\beta_3=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\alpha_3-\alpha_1-\alpha_2,\quad q_3=\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)$$

所以 $\alpha_1=\sqrt{2}q_1$，$\alpha_2=\sqrt{2}q_2$，$\alpha_3=\sqrt{2}q_1+\sqrt{2}q_2+2q_3$，

则 $A=(q_1,q_2,q_3)\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\0&\sqrt{2}&\sqrt{2}\\0&0&2\end{pmatrix}=QR$ 即为所求.

2. $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$，$\cos J=\begin{pmatrix}\cos1&-\sin1&-\frac{1}{2}\cos1\\0&\cos1&-\sin1\\0&0&\cos1\end{pmatrix}$

$$\cos B=P\cos(J)P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\cos1&\frac{1}{2}\cos1-\sin1&-\frac{1}{2}\cos1\\\sin1&\cos1+\sin1&-\sin1\\\frac{1}{2}\cos1+\sin1&\frac{1}{2}\cos1&\frac{1}{2}\cos1-\sin1\end{pmatrix}.$$

四、1. 当实数 t 满足什么条件时，$A=\begin{pmatrix}2&4&0\\4&-t+12&t\\0&t&-t\end{pmatrix}$ 半正定？

2. 令 $B\in C^{n\times n}$ 为 Hermite 矩阵，证明：若 B 的顺序主子式均大于 0，则 B 为正定矩阵.

3. 令 $B\in C^{n\times n}$ 为复矩阵，$E\in C^{n\times n}$ 为可逆 Hermite 矩阵，证明：若 $tr(EE^HB^HB)=0$，则 $B=0$.

解：1. 由 $-t+12\geq 0,-t\geq 0,\begin{vmatrix}2&4\\4&-t+12\end{vmatrix}\geq 0,\begin{vmatrix}2&0\\0&-t\end{vmatrix}\geq 0,\begin{vmatrix}-t+12&t\\t&-t\end{vmatrix}\geq 0$，

$\begin{vmatrix}2&4&0\\4&-t+12&t\\0&t&-t\end{vmatrix}\geq 0$ 可得 $t\leq 0$.

2. 见课本

3. 证明：EE^H 为 Hermite 正定矩阵，BB^H 为 Hermite 半正定矩阵.

$tr(EE^HB^HB)=tr(E^HB^HBE)\geq 0$，若 $tr(EE^HB^HB)=0$ 当且仅当 $B^HB=0$，则可推出 $B=0.$

五、矩阵 $F=\begin{pmatrix}3&1&1\\-6&-1&-2\\3&2&1\end{pmatrix}$，向量 $g=\begin{pmatrix}4\\-8\\4\end{pmatrix}$

1. 求矩阵 F 的满秩分解，并计算 F^+；

2．对于方程组 $Fx=g$，用广义逆矩阵判定方程组是否相容？若相容，求其通解及极小范数解；若不相容，求其最小二乘解及极小最小二乘解.

解：1. $F=\begin{pmatrix}3&1&1\\-6&-1&-2\\3&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&1&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

则 $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-3&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\-6&-1&-2\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

所以 $F=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-3&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}=BC$。

$$F^{+}=\begin{pmatrix} \frac{3}{110} & -\frac{21}{110} & -\frac{6}{55} \\ \frac{1}{11} & \frac{4}{11} & \frac{7}{11} \\ \frac{1}{110} & -\frac{7}{110} & -\frac{2}{55} \end{pmatrix}.$$

2. 方程组相容，极小范数解 $\eta_0=\begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$, 通解为 $X=\eta_0+\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & -\frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}\gamma$.