南京航空航天大学 **2012** 级硕士研究生

2012 ~ 2013 学年第 1 学期 《矩阵论》 课程考试 A 卷

考试日期：2013 年 1 月 15 日 课程编号：A080001 命题教师： 阅卷教师：

学院	专业	学号	姓名	成绩

一、(20 分) 设 $V=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in R^{2\times 2} \mid a_{11}=a_{22}\right\}$ 是 $R^{2\times 2}$ 的一个线性子空间，对任意 $X\in V$，定义：$T(X)=PX+XP$，其中 $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

(1) 求 V 的一组基和维数；

(2) 对任意 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\in V$，定义：

$$(A,B)=a_{11}b_{11}+2a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21},$$

证明 (A,B) 是 V 的一个内积；

(3) 求 V 在题（2）所定义的内积下的一组标准正交基；

(4) 证明 T 是 V 的线性变换，并求 T 在题（1）所取基下的矩阵.

解答：(1) V 的一组基为 $E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$, 维数为 3.

……………………………………(5 分)

(2) 直接验证内积定义的四个条件成立. ……………………………… (4 分)

(3) 标准正交基 $E_1'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, E_2'=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_3'=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$. …………(5 分)

(4) 由于 $T(X)\in V$, 所以 T 是 V 的一个变换. 又直接验证, 知

$$T(X+Y)=T(X)+T(Y), T(kX)=kT(X),$$

因此 T 是 V 的一个线性变换. ……………………………………(3 分)

线性变换 T 在基 $E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 下的矩阵为

$$T=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$ ……………………………………………(3 分)

二、(20分)设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}3&a&0\\0&3&a\\0&0&3\end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的行列式因子、不变因子、初等因子及 Jordan 标准形;

(2) 利用 λ 矩阵的知识，判断矩阵 B 和 C 是否相似，并说明理由.

解答: (1) A 的行列式因子为 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1, D_1(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$; ⋯ (3分)

不变因子为 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1, d_1(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$; ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (3分)

初等因子为 $\lambda-2, (\lambda-1)^2$; ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (2分)

Jordan 标准形为 $J=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (2分)

(2) $a=0$, 不相似, 理由是2阶行列式因子不同; ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (5分)

$a\neq 0$, 相似, 理由是各阶行列式因子相同. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (5分)

三、(20 分) 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ 不相容.

(1) 求系数矩阵 A 的满秩分解;

(2) 求广义逆矩阵 A^+;

(3) 求该线性方程组的极小最小二乘解.

解答: (1) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, A 的满秩分解为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$ ……………………(5 分)

(2) $A^+ = \dfrac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 5 & 1 & -4 \\ -5 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$ ……………………(10 分)

(3) 方程组的极小最小二乘解为 $x = \dfrac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$ …………(5 分)

四、(20 分) 已知幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}x^k$ 的收敛半径为 3, 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\|A\|_1, \|A\|_\infty, \|A\|_2, \|A\|_F$；

(2) 证明矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}A^k$ 收敛；

(3) 求矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}A^k$ 的和.

解答：(1) $\|A\|_1=4, \|A\|_\infty=3, \|A\|_2=\sqrt{6}, \|A\|_F=3$. ·········(10 分)

(2) 因为 $\|A\|_2$ 是相容范数，且 $\|A\|_2=\sqrt{6}<3$，则 $\rho(A)<3$ 在收敛半径内，因此级数收敛. ················(5 分)

(3) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}A^k=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{A}{3})^k=3(3I-A)^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$. ················(5 分)

五、(20 分) 设 A, B 是两个 n 阶矩阵, 其中 $A=(a_{ij})$，证明:

(1) 若对任意 $i=1,2,\cdots,n$，有 $\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1$, 则 $I-A$ 可逆;

(2) 若 A, B 都是 Hermite 正定矩阵，则 AB 的特征值均为正数;

(3) 若 A, B 都是 Hermite 半正定矩阵，则 $tr(AB)\geq 0$, 并且当等号成立时, 必有 $AB=0$.

解答:

(1) 由 $\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1$ 可得，$\|A\|_{\infty}<1$，由于 $\|A\|_{\infty}$ 是相容范数，则 $\rho(A)<1$，$I-A$ 的特征值都不为零，因此 $I-A$ 可逆. ························(6 分)

(2) $A>0 \Rightarrow A=S^2=SS^H$, 这里 S 是可逆的 Hermite 矩阵, 从而 $AB=SS^HB$. 由于 SS^HB 与 S^HBS 有相同的特征值，且 $S^HBS>0$，所以 AB 的特征值均为正数. ··················(8 分)

(3) $A\geq 0 \Rightarrow A=S^2=S^HS, AB=S^HSB$，这里 S 是 Hermite 矩阵. 由于 S^HSB 与 SBS^H 有相同的特征值，且 $SBS^H\geq 0$, 所以 AB 的特征值均为非负数, 从而 $tr(AB)=tr(SBS^H)\geq 0$. ······················(4 分)

当 $tr(AB)=0$ 时, 有 $tr(SBS^H)=0$, 从而 $SBS^H=0$. 设 $B=Q^2=QQ^H$, 这里 Q 也是 Hermite 矩阵, 则

$$SBS^H=SQQ^HS^H=(SQ)(SQ)^H.$$

于是 $SQ=0$, 由此得到 $AB=0$. ············(2 分)