南京航空航天大学

研究生考试试卷

二00七～二00八 学年 第一学期《 矩 阵 论 》课程			
考试日期： 2008 年 月 日	试卷类型 B	课程编号： A000003	
学院	学号	姓名	成绩

一.（**20** 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & -4 & 0\\ 0 & -4 & 0\end{pmatrix}$，

（1）求 A 的不变因子、初等因子及最小多项式；

（2）求 A 的 **Jordan** 标准形 J 及可逆变换矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=J$；

（3）问矩阵序列 $\{A^k\}$ 是否收敛？ $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & -4 & 0\\ 0 & -4 & 0\end{pmatrix}$。

二.（20 分）

（1）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$，求 $\|A\|_1$，$\|A\|_2$，$\|A\|_\infty$，$\|A\|_F$；

（2）设 A 为 n 阶可逆矩阵，$\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的相容范数，λ 为 A 的任一特征值，

证明：$\|A^{-1}\|^{-1}\le|\lambda|\le\|A\|$。

三.（20 分）$R[x]_3$ 表示实数域上次数不小于 3 的多项式与零多项式构成的线性空间，

对 $\forall f(x)\in R[x]_3$，记 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 $a,b,c\in R$，在 $R[x]_3$ 上定义先行变换：

$T[f(x)]=3ax^2+(2a+2b+3c)x+(a+b+4c)$。

（1）给出 $R[x]_3$ 的一组基，并求出线性变化 T 在该基下的表示矩阵；

（2）求线性变换 T 的特征值和特征向量；

（3）判断线性变换 T 是否可对角化？若可以，给出对角化的一组基；若否，证明之。

四.（20 分）

（1）设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，试给出 A 的满秩分解，并计算 A^{+}；

（2）设 $b=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，利用广义逆矩阵判断线性方程组 $Ax=b$ 是否相容？若相容，求其通解；

若不相容，求其极小最小二乘解。

五.（20 分）

（1）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & t \\ 2 & t & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0.5t \\ 2 & 0.5t & 1 \end{pmatrix}$，其中 t 为实数，

问当 t 满足什么条件时，$A>B$ 成立？

（2）设 A 为 n 阶 Hermite 矩阵，对任意 $x\in C^n, x\neq 0$，记 $R(x)=\dfrac{x^H Ax}{x^H x}$，

证明：$\lambda_{\min}(A)\le R(x)\le \lambda_{\max}(A), x\neq 0$。

（2）设 n 阶 Hermite 矩阵 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^H & A_{22} \end{pmatrix}>0$，其中 $A_{11}\in C^{k\times k}(1\le k<n)$，

如果 $A_{11}>0$，$A_{22}-A_{12}^H A_{11}^{-1} A_{12}>0$，证明：$A>0$。