南 京 航 空 航 天 大 学

二〇一九～ 二〇二〇 学年 第一学期《结构动力学基础》考试试题

考试日期： 2019 年 11 月 日 试卷类型： A 试卷代号：

班号 学号 姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

本题分数	10
得 分	

一、判断题（每小题 1 分，总分 10 分）

1.简谐振动三要素分别为频率、振幅、周期。 （ × ）

2.两个可通约的近频简谐振动的合成将出现“拍现象”。 （ √ ）

3.已知振动输出与输入，求系统特性，称为结构动力学的第一类逆问题。（ √ ）

4.阻尼振动频率一般略大于固有频率。 （ × ）

5.无阻尼单自由度振动系统在简谐激励作用下，激励与位移同向。 （ × ）

6.无阻尼单自由度系统自由振动一定为简谐振动，无阻尼多自由度系统可能为非周期运动。

（ √ ）

7.作用在 $t=\tau$ 时刻的单位脉冲力可表示为 $f=1\bullet\delta(t-\tau)$，式中的“1”表示 1 牛顿。

（ × ）

8. 单自由度阻尼振动系统在激励力频率比为 1 时，稳态位移响应在相位上落后于激励 $\pi/2$，与阻尼比无关。 （ √ ）

9 简谐激励作用下结构上某非约束点稳态响应接近零，该点一定是某阶固有振型的节点。

（ × ）

10.两端固定杆的固有振型函数是正弦函数。 （ √ ）

本题分数	15
得　分	

二、填空题（每空 1 分，总分 15 分）

1.为隔离振源传递到基础的力，设频率比为λ，忽略系统阻尼的影响，要使隔振器有隔力效果，频率比应满足 $>\sqrt{2}$ ，若$\lambda=3$，则力传递率为 1/8 。

2.动刚度矩阵$Z(\omega)$与位移频响函数矩阵$H(\omega)$的关系是 互为逆矩阵 。

3.频响函数$H_{ij}(\omega)$的模和辐角的物理意义分别是 在系统的第 j 个自由度上施加单位幅值正弦激励后系统第 i 个自由度上的稳态响应幅值 和 上述响应超前激励的相位角 。

4.对于多自由度振动系统，刚度矩阵$\boldsymbol{K}$可逆的条件是无 刚体 模态，其逆矩阵为 柔度 矩阵。

5.多自由度无阻尼系统的频响函数模态展开式为$\boldsymbol{H}(\omega)=\sum_{r=1}^{N}\frac{\boldsymbol{\varphi}_r\boldsymbol{\varphi}_r^T}{K_r-\omega^2M_r}$，那么其中的一个元素$H_{ij}$的展开式是 $H_{ij}(\omega)=\sum_{r=1}^{N}\frac{\varphi_{ir}\varphi_{jr}}{K_r-\omega^2M_r}$ ；若外激振力的作用点恰好处于第r阶振型的节点自由度上，那么响应中不包含 第r阶模态的贡献 。

6.如果狄拉克δ函数的自变量是时间（单位：秒 s）的话，则δ函数的量纲为 1/s ；任意一个量与δ函数相乘后得到相应于该量的 分布量 。

7.杆的纵向自由振动由 2 个边界条件和 2 个初始条件决定。

8.在 Rayleigh 阻尼假设下，阻尼矩阵可以视为 质量 矩阵与 刚度 矩阵的线性组合。

本题分数	15
得　分	

三、计算（共 15 分）如图 1 所示的单自由度欠阻尼振动系统，求：1. 列出此系统的振动微分方程（2 分），求系统的固有频率和阻尼振动频率（3 分）；2. 当不考虑阻尼作用时，求在零初始条件下，系统在如图 2 所示外激励作用下的位移响应（10 分）。

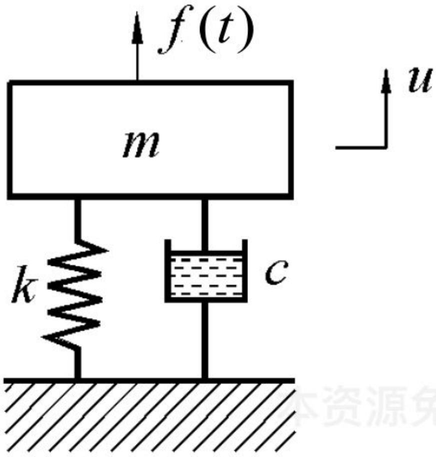

图 1 单自由度有阻尼振动系统

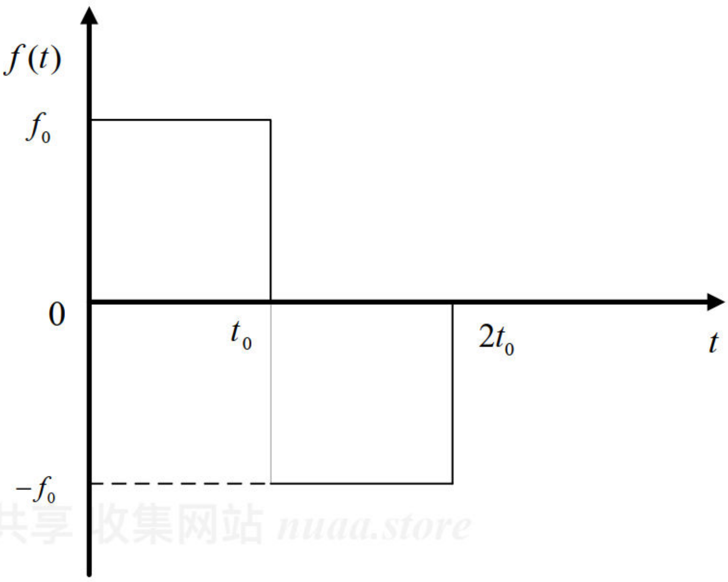

图 2 外激励的时间历程

解：

1.　运动方程：$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=f(t)$　（2 分）

固有频率：$\omega_n=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

阻尼振动频率：$\zeta=\dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$，$\omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$（3 分），

2.　单自由度无阻尼系统的单位脉冲响应函数为

$$h(t)=\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t$$

根据杜哈梅尔积分，得：

（1）$0<t\le t_0$ 时（3 分）：

$$u(t)=\int_0^t f_0\cdot h(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{f_0}{m\omega_n}\int_0^t \sin\omega_n(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{f_0}{k}(1-\cos\omega_n t)$$

（2）$t_0<t\le 2t_0$ 时（3 分）：

$$u(t)=\int_0^{t_0} f_0\cdot h(t-\tau)\mathrm{d}\tau-\int_{t_0}^{t} f_0\cdot h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$=\frac{f_0}{m\omega_n}\int_0^{t_0}\sin\omega_n(t-\tau)\mathrm{d}\tau-\frac{f_0}{m\omega_n}\int_{t_0}^{t}\sin\omega_n(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$=\frac{f_0}{k}(2\cos\omega_n(t-t_0)-\cos\omega_n t-1)$$

（3） $2t_0<t$ （4 分）

$$u(t)=\int_0^{t_0} f_0\cdot h(t-\tau)\mathrm{d}\tau-\int_{t_0}^{2t_0} f_0\cdot h(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{2t_0}^{t}0\cdot h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$=\frac{f_0}{m\omega_n}\int_0^{t_0}\sin\omega_n(t-\tau)\mathrm{d}\tau-\frac{f_0}{m\omega_n}\int_{t_0}^{2t_0}\sin\omega_n(t-\tau)\mathrm{d}\tau+0$$
$$=\frac{f_0}{k}(2\cos\omega_n(t-t_0)-\cos\omega_n t-\cos\omega_n(t-2t_0))$$

本题分数	20
得　　分	

四、如图 3 所示受简谐激励的弹簧振子-刚性摆系统（不计刚性杆质量，重力方向如图所示），刚性摆与小车 M 之间有扭转弹簧相连接。（1）考虑微振动情况，试以图示广义坐标，写出振动系统的动能和势能表达式（5 分）；（2）用拉格朗日方程建立振动系统的运动微分方程（5 分）；（3）作用如图所示简谐激励时，且激励频率不等于系统任意一阶固有频率，求 θ 和 u 的稳态响应振幅（5 分）；（4）求使小车 M 稳态振幅最小的激励频率，此时刚性单摆的振幅是多少（5 分）。

注：拉格朗日方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial D}{\partial\dot{q}_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=Q_i,\quad i=1,\cdots,n$

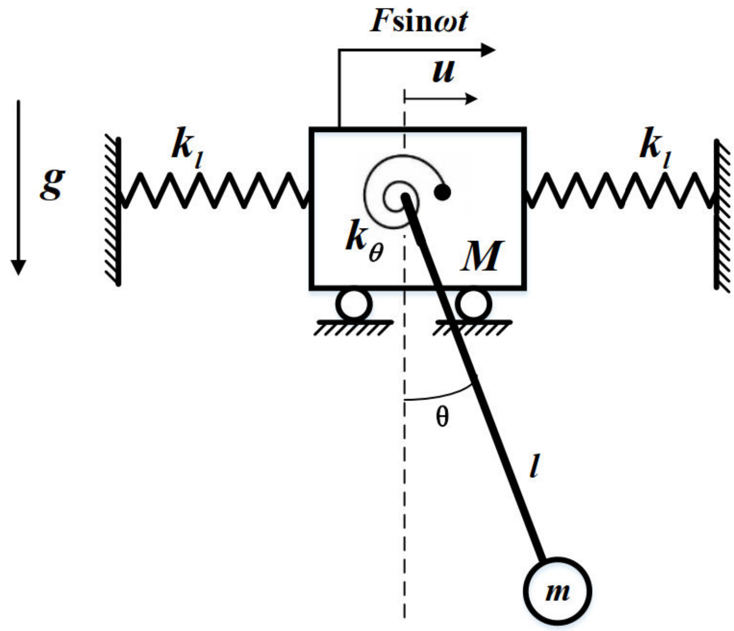

图 3

解：按图示坐标，摆球在任意时刻坐标为

$$x = u + l\sin\theta$$
$$y = l\cos\theta \qquad (1)$$

由此可得摆球在任意时刻的速度为

$$\dot{x} = \dot{u} + l\dot{\theta}\cos\theta$$
$$\dot{y} = -l\dot{\theta}\sin\theta \qquad (2)$$

系统任意时刻动能、势能和耗散函数可分别表示为

$$T = \frac{1}{2}M\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$
$$V = mgl(1-\cos\theta) + k_l u^2 + \frac{1}{2}k_\theta\theta^2 \qquad (3)$$

将式（2）代入式（4）可得

$$T = \frac{1}{2}M\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{u}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{u}l\dot{\theta}\cos\theta\right) \qquad (4)（5分）$$

外力虚功为

$$\delta W = \left(F\sin\omega t\right)\delta u \qquad (5)$$

拉格朗日方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \qquad (6)$$

外力虚功和广义力之间的关系为

$$\delta W = Q_i\delta q_i \qquad (7)$$

将式（3）、（4）和式（5）代入式（6），并略去二阶以上高阶小量，得系统运动方程

$$\left(M+m\right)\ddot{u} + ml\ddot{\theta} + 2k_l u = F\sin\omega t$$
$$ml\ddot{u} + ml^2\ddot{\theta} + (k_\theta + mgl)\theta = 0 \qquad (8)$$

将式（8）表示为矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} M+m & ml \\ ml & ml^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 2k_l & 0 \\ 0 & k_\theta+mgl \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}\sin\omega t \quad （9）（5 分）$$

简谐激励下的稳态振动可表示为

$$\begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix}e^{j\omega t} \quad （10）$$

将式（10）代入式（9），得

$$\left(\begin{bmatrix} 2k_l & 0 \\ 0 & k_\theta+mgl \end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix} M+m & ml \\ ml & ml^2 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad （11）$$

由式（11）解出系统稳态振幅为

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{Bmatrix} k_\theta+mgl-ml^2\omega^2 \\ ml\omega^2 \end{Bmatrix}F \quad （12）$$

$$\Delta=\left|\left[2k_l-(M+m)\omega^2\right]\left(k_\theta+mgl-ml^2\omega^2\right)-\left(ml\omega^2\right)^2\right| \quad （13）（5 分）$$

求反共振频率

$$k_\theta+mgl-ml^2\omega^2=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k_\theta+mgl}{ml^2}} \quad （14）$$

此时单摆的振幅是

$$\bar{\theta}=\frac{1}{\Delta}(mg+\frac{k_\theta}{l})F \quad （14）（5 分）$$

本题分数	20
得　分	

五、图 4 所示振动系统。（1）求系统的固有频率和按质量矩阵归一化的固有振型（8 分）；（2）系统初始时刻处于静止状态，若质量块在 $t=0$ 时刻受到图示脉冲力作用，分别获得冲量 I_1 和 I_2，请用模态叠加法求系统的自由振动位移响应（12 分）。

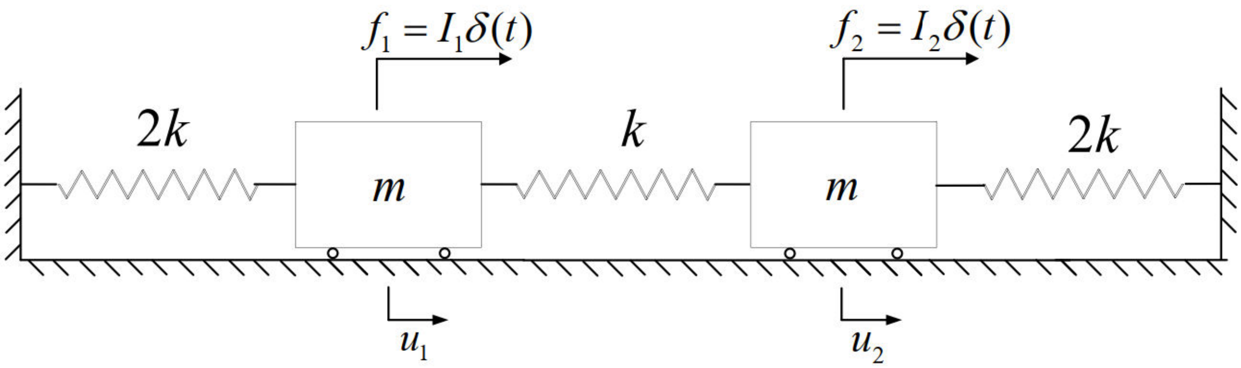

图 4

解：（1）根据牛顿第二运动定律得系统振动微分方程

$$\mathbf{M}\ddot{u}+\mathbf{K}u=\mathbf{f}$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}，\mathbf{K}=\begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & 3k \end{bmatrix}，u=\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}，\mathbf{f}=\begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix}\delta(t) \qquad （1）（3分）$$

令方程右端为零，并作傅氏变换，得系统特征方程

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3k-m\omega^2 & -k \\ -k & 3k-m\omega^2 \end{bmatrix}\right)=0 \qquad （2）$$

解得固有频率为

$$\omega_1=\sqrt{\frac{2k}{m}},\quad \omega_2=2\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad （3）$$

固有振型为

$$\varphi_1=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix},\quad \varphi_1=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \qquad （4）（3分）$$

将解得的固有振型按质量矩阵归一化，得

$$\tilde{\varphi}_1=\frac{\varphi_1}{\sqrt{\varphi_1^{\mathrm{T}}M\varphi_1}}=\frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

（5）（2分）

$$\tilde{\varphi}_2=\frac{\varphi_2}{\sqrt{\varphi_2^{\mathrm{T}}M\varphi_2}}=\frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

（2）定义模态变换

振动系统受到脉冲力作用后，两质量块获得初始速度，分别为$\dot{u}_1(0)=I_1/m$，$\dot{u}_2(0)=I_2/m$。那么初始条件为

$$\boldsymbol{u}(0)=\begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

（2分）

$$\dot{\boldsymbol{u}}(0)=\begin{bmatrix} \dot{u}_1(0) \\ \dot{u}_2(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_1/m \\ I_2/m \end{bmatrix}$$

进行模态坐标变换

$$\mathbf{u}=\tilde{\varphi}_1q_1+\tilde{\varphi}_2q_2 \qquad （6）$$

可以获得模态坐标的初始条件为

$$\boldsymbol{q}(0)=\begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}(0)=\begin{bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2m}}{2}\begin{bmatrix} \dfrac{I_1+I_2}{m} \\ \dfrac{I_1-I_2}{m} \end{bmatrix} \qquad (3\text{ 分})$$

将模态变换式代入系统运动微分方程，经变换后可得系统模态坐标运动方程

$$\begin{aligned} &\ddot{q}_1+\frac{2k}{m}q_1=0 \\ &\ddot{q}_2+\frac{4k}{m}q_2=0 \end{aligned} \qquad (7)$$

由初始条件获得模态坐标响应为

$$\begin{aligned} q_1(t)&=\frac{1}{2\sqrt{k}}(I_1+I_2)\sin\omega_1 t \\ q_2(t)&=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{k}}(I_1-I_2)\sin\omega_2 t \end{aligned} \qquad (10)（5\text{ 分}）$$

将式（10）代入式（6）后得系统位移响应

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2k}}(I_1+I_2)\sin\omega_1 t \\ \dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{k}}(I_1-I_2)\sin\omega_2 t \end{bmatrix}= \qquad (2\text{ 分})$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{8km}}(I_1+I_2)\sin\omega_1 t+\dfrac{1}{\sqrt{16km}}(I_1-I_2)\sin\omega_2 t \\ \dfrac{1}{\sqrt{8km}}(I_1+I_2)\sin\omega_1 t-\dfrac{1}{\sqrt{16km}}(I_1-I_2)\sin\omega_2 t \end{bmatrix}$$

本题分数	20
得　　分	

六、两端固定均匀杆，杆的密度为ρ，弹性模量为E，截面积为A，杆长为l。（1）试求杆作纵向振动时的任意阶模态的模态质量和模态刚度（12 分）；（2）试证明杆的固有振型的加权正交性（8 分）。

解：设杆上任意一点的位移为u，杆的纵向振动微分方程为

$$\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad 0\le x<l \tag{1}$$

边界条件可表示为

$$u(0)=0 \quad u(l)=0 \tag{2}$$

定义$c=\sqrt{E/\rho}$，设

$$u=U(x)q(t) \tag{3}$$

利用分离变量法可由式(1)解得

$$U=a_1\sin\frac{\omega}{c}x+b_1\cos\frac{\omega}{c}x$$
$$q=a_2\sin\omega t+b_2\cos\omega t \tag{4}$$

（2分）

边界条件可相应的改写为

$$U(0)=0 \quad U(l)=0 \tag{5}$$

（2分）

将式(4)中的第1式代入式(5)可得

$$U(0)=b_1=0 \quad U(l)=a_1\sin\frac{\omega l}{c}=0 \tag{6}$$

要使方程（4）有非零解，要求a_1和b_1不能全为零。因此有

$$\sin\frac{\omega l}{c}=0 \tag{7}$$

由式(7)解出杆的固有频率为

$$\omega_r=\frac{cr\pi}{l} \quad r=1,2\cdots\infty \tag{8}$$

（3分）

杆纵向振动的固有振型为

$$U_r=\sin\frac{r\pi x}{l} \quad r=1,2\cdots\infty \tag{9}$$

（3分）

任意阶模态质量和模态刚度可表示为

$$K_r=EA\int_0^l(U_r')^2\,\mathrm{d}x \quad M_r=\rho A\int_0^l U_r^2\mathrm{d}x \tag{10}$$

将式（9）代入式（10），并将$c=\sqrt{E/\rho}$代入，得

$$M_r=\frac{1}{2}\rho Al \quad K_r=\omega_r^2M_r=\frac{EA(r\pi)^2}{2l} \tag{11}$$

（2分）

设任意第r阶固有振型为U_r，应满足

$$U_r''+\left(\frac{\omega_r}{c}\right)^2U_r=0 \tag{11}$$

（2分）

设第s阶固有振型为U_s，将U_s乘以式（11），并沿杆长积分，得

$$\int_0^l U_r''U_s\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\omega_r}{c}\right)^2\int_0^l U_rU_s\,\mathrm{d}x=0 \tag{12}$$

对式（12）通过分离变量可得

$$U_sU'\Big|_{x=0}^{x=l}-\int_0^l U_s'U_r'\mathrm{d}x+\left(\frac{\omega_r}{c}\right)^2\int_0^l U_rU_s\mathrm{d}x=0 \qquad (13)$$

结合边界条件可将上式简化为

$$\left(\frac{\omega_r}{c}\right)^2\int_0^l U_rU_s\mathrm{d}x-\int_0^l U_s'U_r'\mathrm{d}x=0 \qquad (14)$$

同理可得

$$\left(\frac{\omega_s}{c}\right)^2\int_0^l U_sU_r\mathrm{d}x-\int_0^l U_r'U_s'\mathrm{d}x=0 \qquad (15)$$

将式（14）和式（15）式相减，得

$$\frac{\omega_s^2-\omega_r^2}{c^2}\int_0^l U_sU_r\mathrm{d}x=0 \qquad (16)$$ （2 分）

当 $r\neq s$ 时，杆的固有频率互异，因此有

$$\int_0^l U_sU_r\mathrm{d}x=0 \qquad (17)$$ （2 分）

将式（17）代入式（14），得

$$\int_0^l U_r'U_s'\mathrm{d}x=0 \qquad (18)$$ （2 分）

南 京 航 空 航 天 大 学

二〇一九～二〇二〇 学年 第一学期《结构动力学基础》考试试题

考试日期： 2019 年 11 月 日 试卷类型： B 试卷代号：

班号 学号 姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

本题分数	10
得 分	

一、判断题（每小题 1 分，总分 10 分）

1.简谐振动三要素分别为质量、刚度、阻尼； （ × ）

2.振动 $\sin 2t$ 和振动 $\sin\sqrt{2}t$ 的合成振动为周期振动； （ × ）

3.增大结构刚度既可能减小结构的位移响应幅值，也可能增大位移响应幅值。（ √ ）

4.速度共振的激励频率恰好是系统固有频率； （ √ ）

5. 在简谐激励作用下，考虑不考虑阻尼影响，位移总是与激励同步。 （ × ）

6. 初始条件合适的情况下，无阻尼多自由度振动系统可按某一阶振型做自由振动。（ √ ）

7. 多自由度振动系统中，质量矩阵是半正定的，而刚度阵一定是正定的；（ × ）

8.基础简谐激励作用下，阻尼系数越大，系统的绝对运动传递率越小。 （ × ）

9.当激振力位于多自由度系统某阶振型的节点时，那么同反共振现象一样，系统不振动。 （ × ）

10. 一端固定，一端自由的均质直杆，其固有振型函数是正弦函数。 （ √ ）

本题分数	15
得　分	

二、填空题（每空 1 分，总分 15 分）

1.阻尼比对位移响应幅值的影响，振动系统在＿＿共振区＿＿时，阻尼对减小振幅有显著作用；在＿远离共振区＿时，阻尼对减小振幅的作用不大。

2.力的激励下，加速度频响函数矩阵元素的单位是＿g/N 或者 $\frac{m}{s^2 \cdot N}$ 或者 $1/kg$＿。

3.频响函数 $H_{ij}(\omega)$ 的模和辐角的物理意义分别是在系统的第 j 个自由度上施加单位幅值正弦激励后系统第 i 个自由度上的稳态响应幅值＿和＿上述响应超前激励的相位角＿。

4.对于多自由度无阻尼系统，其固有振型各个自由度的相位差不是＿0＿度就是＿180＿度。

5.多自由度无阻尼系统的频响函数模态展开式为 $\boldsymbol{H}(\omega)=\sum_{r=1}^{N}\frac{\boldsymbol{\varphi}_r\boldsymbol{\varphi}_r^T}{K_r-\omega^2 M_r}$，那么其中的一个元素 H_{ij} 的展开式是 $H_{ij}(\omega)=\sum_{r=1}^{N}\frac{\varphi_{ir}\varphi_{jr}}{K_r-\omega^2 M_r}$；若外激振力的作用点恰好处于第 r 阶振型的节点自由度上，那么响应中不包含＿第 r 阶模态的贡献＿。

6.如果狄拉克 δ 函数的自变量是时间（单位：秒 s）的话，则 δ 函数的量纲为 1/s；任意一个量与 δ 函数相乘后得到相应于该量的＿分布量＿。

7. 杆的纵向自由振动由＿2＿个边界条件和＿2＿个初始条件决定。

8. 在 Rayleigh 阻尼假设下，阻尼矩阵可以视为＿质量＿矩阵与＿刚度＿矩阵的线性组合。

本题分数	15
得　分	

三、计算（共 15 分）如图 1 所示的单自由度欠阻尼振动系统，求：1. 列出此系统的振动微分方程（2 分），求系统的固有频率和阻尼振动频率（3 分）；2. 当不考虑阻尼作用时，求在零初始条件下，系统在如图 2 所示外激励作用下的位移响应（10 分）。

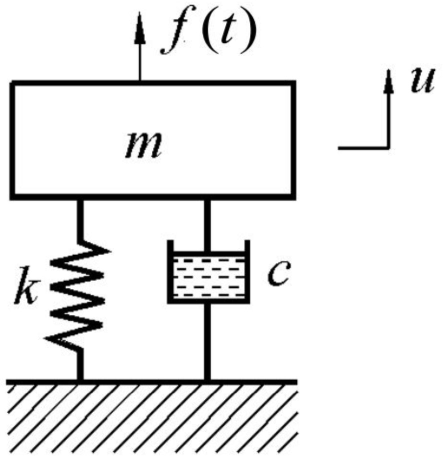

图 1 单自由度有阻尼振动系统

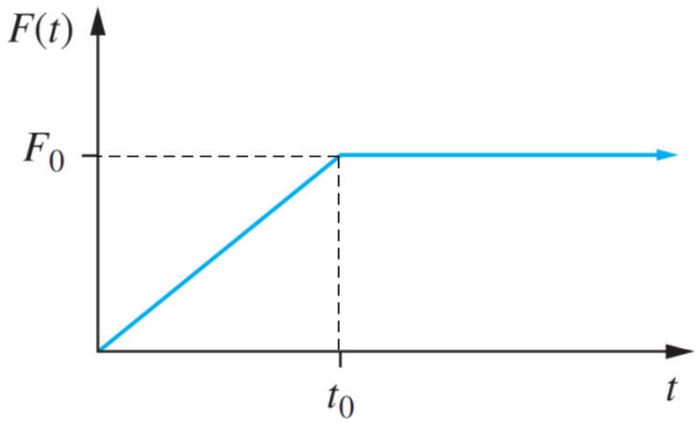

图 2 外激励的时间历程

解：

1． 运动方程：$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=f(t)$ （2 分）

固有频率：$\omega_n=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

阻尼振动频率：$\zeta=\dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$，$\omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$（3 分），

2． 激励载荷可以表示为

$$F(\mathrm{t})=\begin{cases}F_0\dfrac{t}{t_0} & t<t_0\\ F_0 & t\ge t_0\end{cases}$$

单自由度无阻尼系统的单位脉冲响应函数为

$$h(t)=\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t \quad （1 分）$$

根据杜哈梅尔积分，得：

$$u(t)=\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau \quad （2 分）$$

1）当 $t < t_0$ 时，

$$u(t)=\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F_0\frac{\tau}{t_0}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau$$

（3 分）

$$=\frac{F_0}{m\omega_n^2 t_0}(t-\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t)$$

2）当 $t > t_0$ 时，

$$u(t)=\frac{1}{m\omega_n}[\int_0^{t_0} F_0\frac{\tau}{t_0}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau+\int_{t_0}^t F_0\sin\omega_n(t-\tau)d\tau]$$

$$=\frac{F_0}{m\omega_n^2 t_0}[t_0\cos\omega_n(t-t_0)+\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n(t-t_0)-\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t+$$ （4 分）

$$\frac{1}{\omega_n}-\frac{1}{\omega_n}\cos\omega_n(t-t_0)]$$

本题分数	20
得　　分	

四、如图 3 所示铅锤平面内受简谐激励的弹簧振子-刚性摆系统（不计刚性杆质量，重力加速度方向如图所示）。刚性摆与小车 M 之间有扭转弹簧相连接，扭转弹簧平衡位置为刚性摆处于铅垂状态时。（1）考虑微振动情况，试以图示广义坐标，写出振动系统的动能和势能表达式（5 分）；（2）用拉格朗日方程建立振动系统的运动微分方程（5 分）；（3）作用如图所示简谐激励时，且外激励频率不等于系统任意一阶固有频率，求 θ 和 u 的稳态响应振幅（5 分）；（4）求使小车 M 稳态振幅最小的激励频率，此时刚性单摆的振幅是多少（5 分）。（扭转弹簧刚度足够大，刚性倒立摆不会出现不稳定，即 $k_\theta \geq mgl$）

注：拉格朗日方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=Q_i,\quad i=1,\cdots,n$

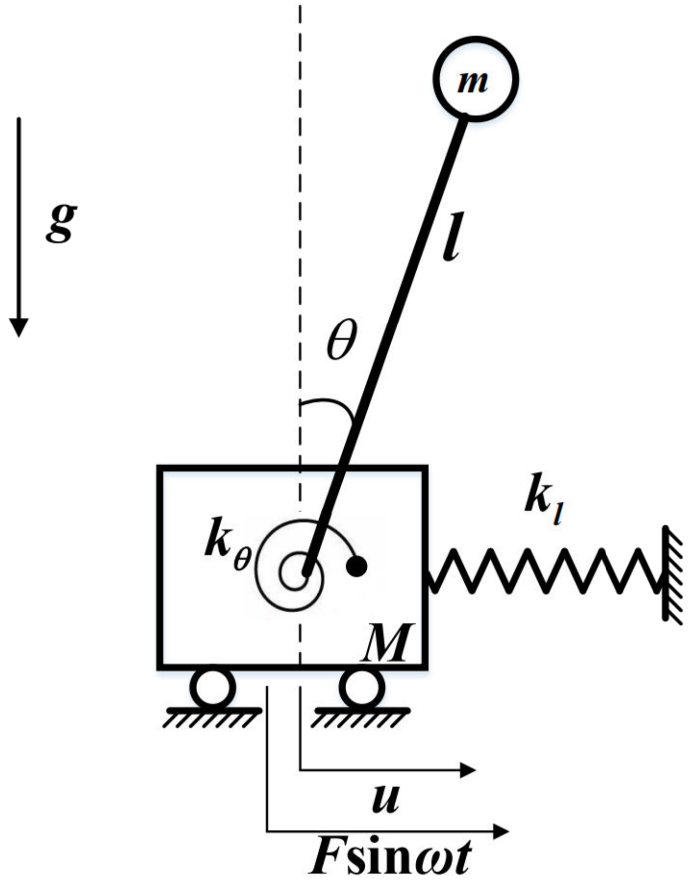

图 3

解：按图示坐标，摆球在任意时刻坐标为

$$\begin{aligned} x &= u + l\sin\theta \\ y &= l\cos\theta \end{aligned} \qquad (1)$$

由此可得摆球在任意时刻的速度为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{u} + l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} &= -l\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned} \qquad (2)$$

系统任意时刻动能、势能可分别表示为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \\ V &= +\frac{1}{2}k_l u^2 + \frac{1}{2}k_\theta\theta^2 - mgl(1-\cos\theta) \end{aligned} \qquad (3)$$

将式（2）代入式（3）可得

$$T = \frac{1}{2}M\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{u}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{u}l\dot{\theta}\cos\theta\right) \qquad (4)\ (5\ 分)$$

外力虚功为

$$\delta W = \left(F\sin\omega t\right)\delta u \qquad (5)$$

拉格朗日方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \qquad (6)$$

外力虚功和广义力之间的关系为

$$\delta W = Q_i \delta q_i \qquad (7)$$

将式（3）、（4）和式（5）代入式（6），并略去二阶以上高阶小量，得系统运动方程

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = M\dot{u} + m\left(\dot{u} + l\dot{\theta}\cos\theta\right) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m\left(l^2\dot{\theta} + \dot{u}l\cos\theta\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}}\right) \approx M\ddot{u} + m\left(\ddot{u} + l\ddot{\theta}\right) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) \approx m\left(l^2\ddot{\theta} + \ddot{u}l\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = k_l u \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} \approx k_\theta\theta - mgl\theta \tag{8}$$

$$\left(M+m\right)\ddot{u} + ml\ddot{\theta} + k_l u = F\sin\omega t$$

$$ml\ddot{u} + ml^2\ddot{\theta} + k_\theta\theta - mgl\theta = 0$$

将式（8）表示为矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} M+m & ml \\ ml & ml^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_l & 0 \\ 0 & k_\theta - mgl \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}\sin\omega t \tag{9}$$ （5分）

简谐激励下的稳态振动可表示为

$$\begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{j\omega t} \tag{10}$$

将式（10）代入式（9），得

$$\left(\begin{bmatrix} k_l & 0 \\ 0 & k_\theta - mgl \end{bmatrix} - \omega^2\begin{bmatrix} M+m & ml \\ ml & ml^2 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

由式（11）解出系统稳态振幅为

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{Bmatrix} k_\theta - mgl - \omega^2 ml^2 \\ \omega^2 ml \end{Bmatrix} F \tag{12}$$

其中

$$\Delta = \left|\left[k_l - \left(M+m\right)\omega^2\right]\left(k_\theta - mgl - ml^2\omega^2\right) - \left(ml\omega^2\right)^2\right| \tag{13}$$ （5分）

反共振频率为

$$k_\theta - mgl - \omega^2 ml^2 = 0$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k_\theta - mgl}{ml^2}} \tag{14}$$

单摆的振幅为

$$\bar{\theta} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{k_\theta}{l} - mg\right) F \tag{15}$$ （5分）

本题分数	20
得　　分	

五、图 4 所示系统。(1) 求系统的固有频率和按质量矩阵归一化的固有振型（10 分）；(2) 若右侧质量块在 $t=0$ 时刻受到图示脉冲力作用，获得冲量 I，位移初始条件为 $u_1(0)=u_0, u_2(0)=0$。求速度初始条件，并用模态叠加法求系统的自由振动位移响应（10 分）。

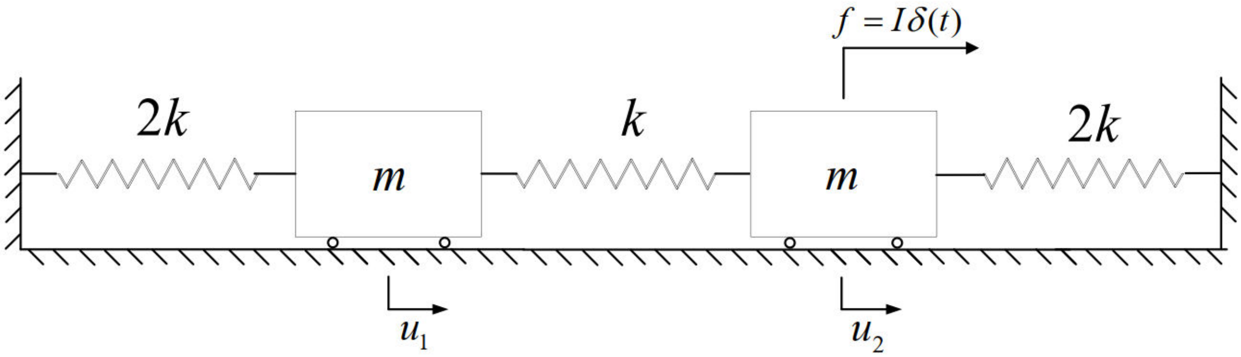

图 4

解：(1) 根据牛顿第二运动定律得系统振动微分方程

$$\mathbf{M}\ddot{u}+\mathbf{K}u=\mathbf{f}$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix},\quad \mathbf{K}=\begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & 3k \end{bmatrix},\quad u=\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix},\quad \mathbf{f}=\begin{Bmatrix} 0 \\ I \end{Bmatrix}\delta(t) \qquad (1)（3 分）$$

令方程右端为零，并作傅氏变换，得系统特征方程

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3k-m\omega^2 & -k \\ -k & 3k-m\omega^2 \end{bmatrix}\right)=0 \qquad (2)$$

解得固有频率为

$$\omega_1=\sqrt{\frac{2k}{m}},\quad \omega_2=2\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (3)$$

固有振型为

$$\varphi_1=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix},\quad \varphi_1=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \qquad (4)（4 分）$$

将解得的固有振型按质量矩阵归一化，得

$$\tilde{\varphi}_1=\frac{\varphi_1}{\sqrt{\varphi_1^{\mathrm{T}}M\varphi_1}}=\frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{\varphi}_2=\frac{\varphi_2}{\sqrt{\varphi_2^{\mathrm{T}}M\varphi_2}}=\frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \qquad (5)（3 分）$$

(2) 定义模态变换

振动系统受到脉冲力作用后，右侧质量块获得初始速度，为，$\dot{u}_2(0)=I/m$。那么初始条件为

$$\boldsymbol{u}(0)=\begin{bmatrix}u_1(0)\\u_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_0\\0\end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}(0)=\begin{bmatrix}\dot{u}_1(0)\\\dot{u}_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\I/m\end{bmatrix}$$

进行模态坐标变换

$$\mathbf{u}=\tilde{\varphi}_1q_1+\tilde{\varphi}_2q_2 \tag{6}$$

可以获得模态坐标的初始条件为

$$\boldsymbol{q}(0)=\begin{bmatrix}q_1(0)\\q_2(0)\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2m}}{2}\begin{bmatrix}u_0\\u_0\end{bmatrix}$$

（2 分）

$$\dot{\boldsymbol{q}}(0)=\begin{bmatrix}\dot{q}_1(0)\\\dot{q}_2(0)\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2m}}{2}\begin{bmatrix}\dfrac{I}{m}\\-\dfrac{I}{m}\end{bmatrix}$$

将模态变换式代入系统运动微分方程，经变换后可得系统模态坐标运动方程

$$\ddot{q}_1+\frac{2k}{m}q_1=0$$

（7）

$$\ddot{q}_2+\frac{4k}{m}q_2=0$$

由初始条件获得模态坐标响应为

$$q_1(t)=\frac{\sqrt{2m}}{2}u_0\cos\omega_1t+\frac{I}{2\sqrt{k}}\sin\omega_1t$$

$$q_2(t)=\frac{\sqrt{2m}}{2}u_0\cos\omega_2t-\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{k}}I\sin\omega_2t$$

（10）（3 分）

将式（10）代入式（6）后得系统位移响应

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2m}}{2} u_0 \cos\omega_1 t + \frac{I}{2\sqrt{k}} \sin\omega_1 t \\ \frac{\sqrt{2m}}{2} u_0 \cos\omega_2 t - \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{k}} I \sin\omega_2 t \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} u_0 \cos\omega_1 t + \frac{I}{\sqrt{8mk}} \sin\omega_1 t \\ \frac{1}{2} u_0 \cos\omega_2 t - \frac{I}{\sqrt{16mk}} \sin\omega_2 t \end{bmatrix} = \qquad \text{（5 分）}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} u_0 \cos\omega_1 t + \frac{1}{2} u_0 \cos\omega_2 t + \frac{I}{\sqrt{8mk}} \sin\omega_1 t - \frac{I}{\sqrt{16mk}} \sin\omega_2 t \\ \frac{1}{2} u_0 \cos\omega_1 t - \frac{1}{2} u_0 \cos\omega_2 t + \frac{I}{\sqrt{8mk}} \sin\omega_1 t + \frac{I}{\sqrt{16mk}} \sin\omega_2 t \end{bmatrix}$$

本题分数	20
得　　分	

六、已知长度为 l 具有简单边界的等截面直杆的自由振动方程为：

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = EA \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

（1）试推导杆振型函数的正交性条件。（10 分）

（2）求解左端自由，右端固定杆的振动频率和振型函数。（10 分）

解：（1）采用分离变量法 $u(x,t)=U(x)q(t)$ 得到

$\frac{\ddot{q}}{q} = \frac{EA}{\rho A}\frac{U''}{U} = -\omega^2$ 从而有 $\rho A\omega^2 U + EAU'' = 0$ 该方程有无限多组解，取任意 2 个

$$\rho A\omega_r^2 U_r + EAU_r'' = 0$$
$$\rho A\omega_s^2 U_s + EAU_s'' = 0$$

将该两方程两边分别乘以 U_s 和 U_r，然后在 0~l 上积分，并运用分部积分，（细节略）最后得到：

$$\begin{cases} \int_0^l \rho AU_r(x)U_s(x)\mathrm{d}x = M_r\delta_{rs} \\ \int_0^l EAU_r'(x)U_s'(x)\mathrm{d}x = K_r\delta_{rs} \end{cases}$$

（若学生仅写成类似 $\int_0^l U_r U_s dx = 0 \quad r \neq s$ ，可酌情扣 1 分。）（10 分）

（2）

$$\omega_r = \left(r - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi v}{l}$$

$$U_r(x) = \cos\frac{(2r-1)\pi x}{2l} \quad r = 1, 2\ldots$$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

或者：

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{2l}$$

$$U_r(x) = \cos\frac{n\pi x}{2l} \quad n = 1, 3, 5\ldots$$ （10 分）

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$